تطبيقات الرياضيات

الجزء الخاص بالشرح و التمارين





تطبيق التعلم التفاعلى



2023

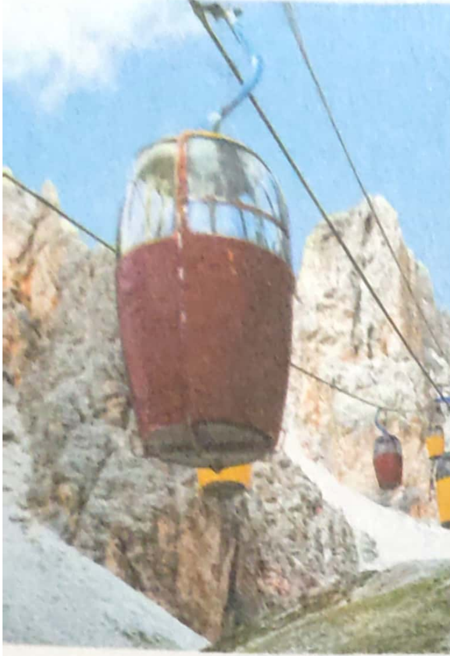
المعاصر

إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب

الوحدة 1 الاستاتيكا



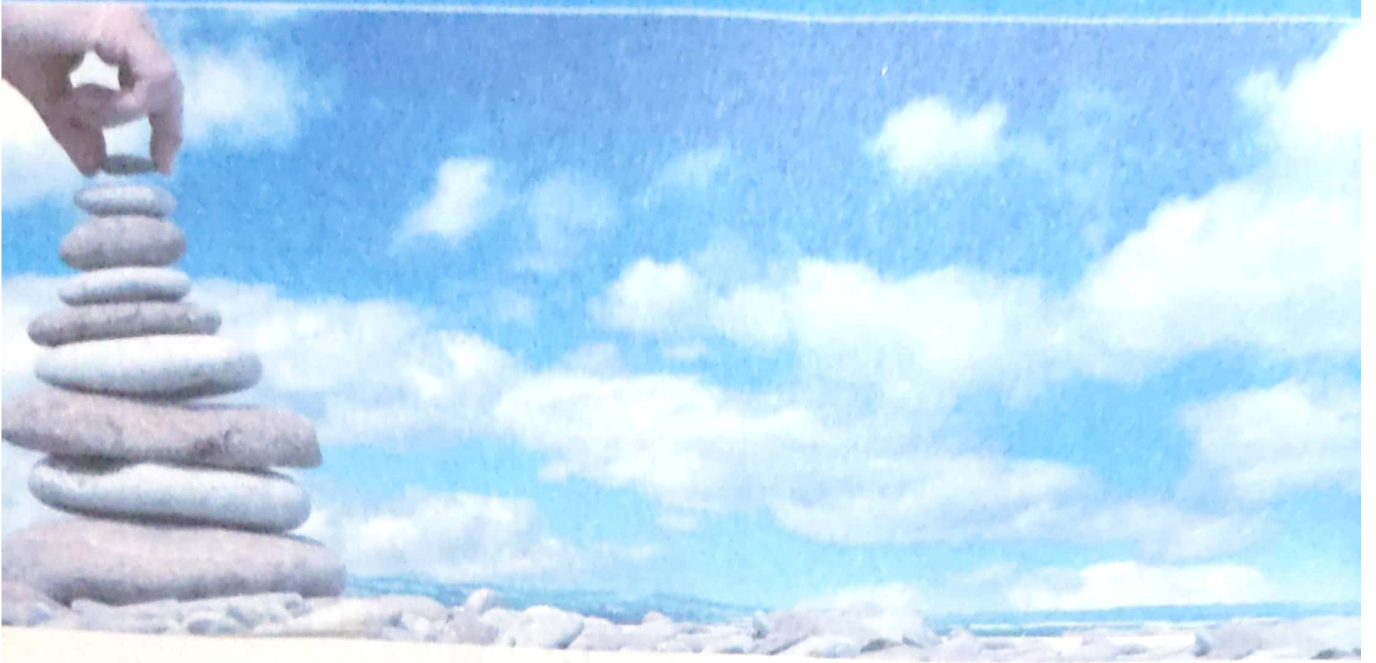
الوحدة 2 الهندسة والقياس



الوحدة الأولى

الاستاتيكا





مراجعة على المتجهات

- تنقسم الكميات التى نتعامل معها فى حياتنا إلى نوعين :

١ **الكمية القياسية** : هى كمية تتعين تمامًا بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية.

أى أن يلزم لتعريفها تعريفًا تامًا معرفة مقدارها فقط.

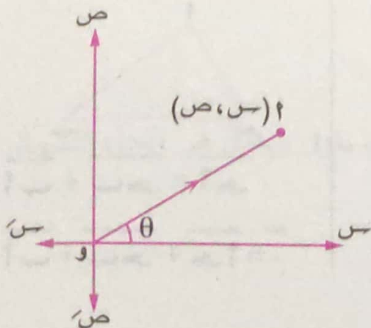
ومن أمثلتها : الطول – الكتلة – الزمن – درجة الحرارة – الحجم – المسافة.

٢ **الكمية المتجهة** : هى كمية تتعين بعدد حقيقى هو مقدار هذه الكمية بالإضافة إلى الاتجاه.

أى أن يلزم لتعريفها تعريفًا تامًا معرفة مقدار واتجاه هذه الكمية.

- **القطعة المستقيمة الموجهة** : هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.
- **معيار القطعة المستقيمة الموجهة (معيار $\overrightarrow{أب}$)** : هو طول $\overline{أب}$ ويرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{أب}\|$
- تتكافأ القطعتان المستقيمتان الموجهتان إذا كانتا لهما نفس الطول (المعيار) ونفس الاتجاه.
- $\overrightarrow{أب} \neq \overrightarrow{بأ}$ (لاختلافهما فى الاتجاه)
- $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{بأ}$ • $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{بأ}\|$
- متجه الموضع لنقطة معلومة أ بالنسبة لنقطة الأصل و هو القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{وأ}$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{أ}$

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overrightarrow{وأ}$ هو متجه الموضع لنقطة أ (س ، ص) فإن :

* $\|\overrightarrow{أ}\| =$ طول $\overline{وأ} = \sqrt{س^2 + ص^2}$

وإذا كان : $\|\overrightarrow{أ}\| = ١$ وحدة طول (الوحدة)

فإن $\overrightarrow{أ}$ يسمى متجه الوحدة.

* $\overrightarrow{س} = (١ ، ٠)$ ، $\overrightarrow{ص} = (٠ ، ١)$ هما متجها الوحدة الأساسيان في اتجاه محوري الإحداثيات.
* $\overrightarrow{و} = (٠ ، ٠)$ هو المتجه الصفري وهو ليس له اتجاه وأحيانًا يرمز له بالرمز $\overrightarrow{0}$
* $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ تسمى بالصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$
* $\overrightarrow{أ} = س\,\overrightarrow{س} + ص\,\overrightarrow{ص}$ تعبير عن المتجه $\overrightarrow{أ}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
* $\overrightarrow{أ} = (\|\overrightarrow{أ}\| ، \theta)$ تسمى بالصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$
* θ هي قياس الزاوية التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{و أ}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وتسمى بالزاوية القطبية.
* $س = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جتا } \theta$ ومنها $\text{جتا } \theta = \frac{س}{\|\overrightarrow{أ}\|}$
* $ص = \|\overrightarrow{أ}\| \text{ جا } \theta$ ومنها $\text{جا } \theta = \frac{ص}{\|\overrightarrow{أ}\|}$

- إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_2 ، ص_2)$ فإن :

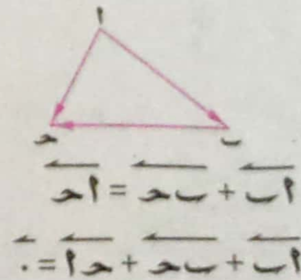
* $\overrightarrow{أ} = \overrightarrow{ب}$ إذا وإذا فقط كان $س_1 = س_2$ ، $ص_1 = ص_2$
* $\overrightarrow{أ} \pm \overrightarrow{ب} = (س_1 \pm س_2 ، ص_1 \pm ص_2)$
* $\overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (س_2 - س_1 ، ص_2 - ص_1)$
* $ك\,\overrightarrow{أ} = ك\,(س ، ص) = (ك\,س ، ك\,ص)$
* $\overrightarrow{أ} \,//\, ك\,\overrightarrow{أ}$ مع مراعاة أن :

إذا كان : $ك > ٠$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $ك\,\overrightarrow{أ}$ لهما نفس الاتجاه

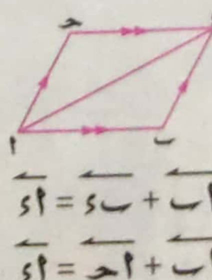
إذا كان : $ك < ٠$ فإن $\overrightarrow{أ}$ ، $ك\,\overrightarrow{أ}$ متضادان في الاتجاه

حيث $ك \neq$ صفر

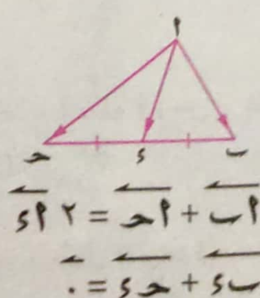
- **جمع وطرح المتجهات هندسيًا :**


$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} = \overrightarrow{أ ح}$

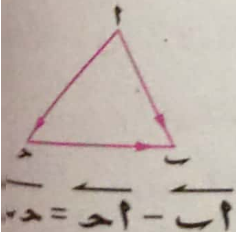
$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ح} + \overrightarrow{ح أ} = \overrightarrow{0}$


$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{ب ء} = \overrightarrow{أ ء}$

$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ح} = \overrightarrow{أ ء}$


$\overrightarrow{أ ب} + \overrightarrow{أ ح} = ٢\,\overrightarrow{أ ء}$

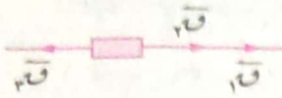
$\overrightarrow{ب ء} + \overrightarrow{ح ء} = \overrightarrow{0}$


$\overrightarrow{أ ب} - \overrightarrow{أ ح} = \overrightarrow{ح ب}$

تطبيقات فيزيائية

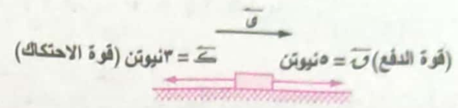
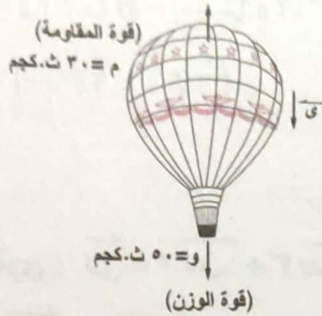
القوة المحصلة $\overleftarrow{ح}$

- محصلة القوى المؤثرة على جسم تخضع لعملية جمع المتجهات



أى أن القوة المحصلة $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} + \cdots$

فمثلا إذا حددنا متجه وحدة $\overleftarrow{ى}$ فى اتجاه حركة الجسم فإنه فى حالة :

حركة جسم على مستوى خشن	الحركة الرأسية
	
القوة المحصلة $\overleftarrow{ح} = ٥\ \overleftarrow{ى} + (-٣\ \overleftarrow{ى}) = ٢\ \overleftarrow{ى}$	القوة المحصلة $\overleftarrow{ح} = ٥٠\ \overleftarrow{ى} + (-٣٠\ \overleftarrow{ى}) = ٢٠\ \overleftarrow{ى}$
أى أن	**أى أن**
• مقدار المحصلة = ٢ نيوتن	• مقدار المحصلة = ٢٠ ث.كجم
• اتجاه المحصلة فى اتجاه حركة الجسم	• اتجاه المحصلة فى اتجاه وزن الجسم

- إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين فإن القوة المحصلة $(\overleftarrow{ح}) = \overleftarrow{٠}$
- إذا كانت محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = $\overleftarrow{٠}$

هذا يعنى أن مجموعة هذه القوى متزنة.

مثال ①

١ اكتب المتجه $\overleftarrow{أ} = (٣ ، -\sqrt{٣})$ بالصورة القطبية.

٢ اكتب بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه $\overleftarrow{أ}$ الذى معياره ١٠ وحدات طول ويعمل فى اتجاه الشمال الغربى.

الحل

(1) ∵ $\|\vec{أ}\| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ ∴ جتا $\theta = \frac{س}{\|\vec{أ}\|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$

، جا $\theta = \frac{ص}{\|\vec{أ}\|} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{2} < 0$ ∴ θ تقع في الربع الرابع.

∴ $\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ ∴ $\vec{أ} = (2\sqrt{3} \text{ ، } 330^\circ)$

(2) ∵ $\|\vec{أ}\| = 10$ ، $\theta = 135^\circ$

، ∵ س $= \|\vec{أ}\|$ جتا $\theta = 10$ جتا $135^\circ = -5\sqrt{2}$

، ص $= \|\vec{أ}\|$ جا $\theta = 10$ جا $135^\circ = 5\sqrt{2}$

∴ $\vec{أ} = (-5\sqrt{2} \text{ ، } 5\sqrt{2})$ ∴ $\vec{أ} = -5\sqrt{2}\,\overleftarrow{س} + 5\sqrt{2}\,\overleftarrow{ص}$

مثال (2)

إذا كانت القوى : $\overleftarrow{ق_1} = 2\,\overleftarrow{س} + 3\,\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = أ\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق_3} = 5\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص}$ تؤثر في نقطة مادية.

أوجد قيمتي أ ، ب إذا كانت هذه القوى :

(1) محصلتها $5\,\overleftarrow{س} - 2\,\overleftarrow{ص}$ (2) متزنة.

الحل

المحصلة $= \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} = (2\,\overleftarrow{س} + 3\,\overleftarrow{ص}) + (أ\,\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}) + (5\,\overleftarrow{س} + ب\,\overleftarrow{ص})$

$= (2 + أ + 5)\,\overleftarrow{س} + (3 + 1 + ب)\,\overleftarrow{ص}$

$= (7 + أ)\,\overleftarrow{س} + (4 + ب)\,\overleftarrow{ص}$

(1) ∵ المحصلة $= 5\,\overleftarrow{س} - 2\,\overleftarrow{ص}$

∴ $(7 + أ)\,\overleftarrow{س} + (4 + ب)\,\overleftarrow{ص} = 5\,\overleftarrow{س} - 2\,\overleftarrow{ص}$

∴ $7 + أ = 5$ ∴ $أ = -2$

، $4 + ب = -2$ ∴ $ب = -6$

(2) ∵ القوى متزنة ∴ المحصلة $= \vec{0}$

∴ $(7 + أ)\,\overleftarrow{س} + (4 + ب)\,\overleftarrow{ص} = \vec{0}$ ∴ $أ = -7$ ، $ب = -4$

1 اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① معيار المتجه $\overrightarrow{أ} = -٣\ \overrightarrow{س} + ٤\ \overrightarrow{ص}$ هو .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١

② الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{ب} = (٥\sqrt{٢}\ ،\ ٢٢٥°)$ هي ....

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (−٥ ، −٥) (جـ) (٥ ، −٥) (د) (−٥ ، ٥)

③ قياس الزاوية القطبية للمتجه $\overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{س} + \sqrt{٣}\ \overrightarrow{ص}$ يساوي ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

④ الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ} = \sqrt{٢}\ \overrightarrow{س} + \sqrt{٢}\ \overrightarrow{ص}$ هي ....

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

⑤ الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{م} = ٥\ \overrightarrow{س} + ١٢\ \overrightarrow{ص}$ هي ....

(أ) (١٧ ، ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°) (ب) (١٧ ، ١٢ً ٣٧َ ٢٢°)

(جـ) (١٣ ، ٤٨ً ٢٢َ ٦٧°) (د) (١٣ ، ١٢ً ٣٧َ ٢٢°)

⑥ المتجه الذي يعبر عن قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق يكتب على الصورة الإحداثية كالآتي ....

(أ) $(١٠ ، -١٠\sqrt{٣})$ (ب) $(١٠\sqrt{٣} ، -١٠)$

(جـ) $(-١٠ ، ١٠\sqrt{٣})$ (د) $(١٠\sqrt{٣} ، ١٠)$

⑦ إذا كانت : $\overrightarrow{ق} = ك\ \overrightarrow{س} + ٢\sqrt{٢}\ \overrightarrow{ص}$ وكان $\|\overrightarrow{ق}\| = ٢\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : $|ك| =$ ....

(أ) $٦\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٦}$ (جـ) −٢ (د) ٢

⑧ إذا كان : $\overrightarrow{ق_١} = (٥ ، -٣)$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = (٧ ، ٤)$ فإن محصلة القوتين $\overrightarrow{ح} =$ ....

(أ) $\overrightarrow{س} + ١٢\ \overrightarrow{ص}$ (ب) $٩\ \overrightarrow{س} + ٤\ \overrightarrow{ص}$

(جـ) $٣٥\ \overrightarrow{س} - ١٢\ \overrightarrow{ص}$ (د) $١٢\ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

(٩) إذا كان : $\overrightarrow{ق}_1$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = ٧ $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ فإن : $|\overrightarrow{ح}|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (ج) ١٣ (د) $٢\sqrt{٧٣}$

(١٠) إذا كانت : $\overrightarrow{ق}_1$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$

فإن مقدار محصلتهما .... وحدة قوة.

(أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ٧

(١١) قوتان مقداراهما ٥ نيوتن ، ٧ نيوتن تؤثران فى اتجاه الشرق فإن مقدار المحصلة = ...

(أ) ١٢ نيوتن فى اتجاه الشرق. (ب) ٢ نيوتن فى اتجاه الشرق.

(جـ) ١٢ نيوتن فى اتجاه الغرب. (د) ٢ نيوتن فى اتجاه الغرب.

(١٢) إذا كانت $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة بحيث :

$\overrightarrow{ق}_1$ = (٢ ، -٥) ، $\overrightarrow{ق}_2$ = (-٣ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{ق}_3$ = ...

(أ) (٢ ، ١) (ب) (-١ ، -٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

(١٣) إذا كانت مجموعة القوى : $\overrightarrow{ق}_1$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٧ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = -٥ $\overrightarrow{س}$ - ب $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق}_3$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٢ ، ٤) (ب) (١ ، ٢) (جـ) (-٤ ، -٨) (د) (٤ ، ٨)

(١٤) إذا كانت مجموعة القوى : $\overrightarrow{ق}_1$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق}_3$ = ٧ $\overrightarrow{س}$ - ب $\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن : أ + ب = ...

(أ) ١٣ (ب) -١٣ (جـ) -١١ (د) -٢

(١٥) إذا أثرت القوى : $\overrightarrow{ق}_1$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = أ $\overrightarrow{س}$ - ٧ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_3$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$

فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) -٣

(١٦) إذا كان : $\overrightarrow{ق}_1$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ - ٨ $\overrightarrow{ص}$

، محصلتهما $\overrightarrow{ح}$ = ٢ أ $\overrightarrow{س}$ - ٣ ب $\overrightarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

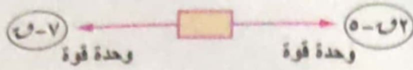
(أ) ٣ (ب) $٣\frac{١}{٢}$ (جـ) $٦\frac{١}{٢}$ (د) ١٢

(١٧) إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1} = 5\overrightarrow{س} + 3\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\overrightarrow{س} + 6\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -14\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$

ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ، $\overrightarrow{ح} = \left(10\sqrt{2} \text{ ، } \frac{3}{4}\pi\right)$ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (-١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (-١ ، ٢) (د) (١ ، -١)

(١٨) فى الشكل المقابل :



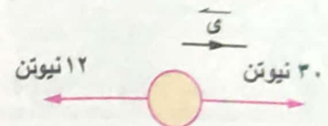
إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : ق = ... وحدة قوة.

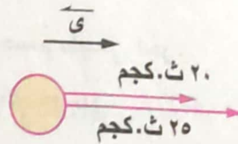
(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ٢,٥ (د) ٣,٥

---

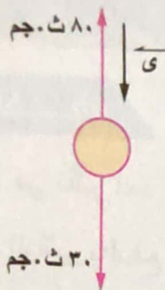
٢ اكتب بدلالة متجه الوحدة $\overrightarrow{ى}$ محصلة القوى الموضحة بكل شكل من الأشكال التالية :



• المحصلة هى ....



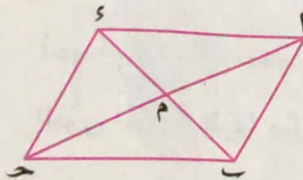
• المحصلة هى ....



• المحصلة هى ....

---

٣ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د متوازى أضلاع م نقطة تلاقى قطريه.

أكمل :

• $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} =$ ....

• $\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دجـ} =$ ....

• $\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{جـم} =$ ....

• $\overrightarrow{أب} + 2\overrightarrow{بم} =$ ....

• $\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أم} =$ ....



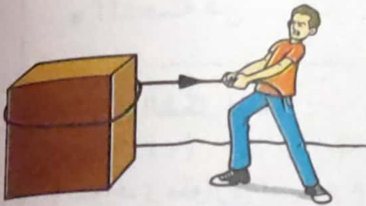
القـــوة



القوة : هى تأثير أحد الأجسام الطبيعية على جسم طبيعى آخر.

ويكون التأثير بالدفع أو الجذب أو الضغط أو التنافر

، والجسم الطبيعى هو جسم يتكون من مادة وله حجم لا يساوى الصفر.



والأجسام الطبيعية تنقسم إلى نوعين :

– أجسام جاسئة (متماسكة) وهى التى لا يتغير شكلها مهما كانت القوى المؤثرة عليها مثل المعادن الصلبة أو الصخور أو ...

– أجسام قابلة للتشكل فيتغير شكلها تحت تأثير القوى مثل الخيوط والسوائل والغازات بأنواعها والمطاط والصلصال.

وستقتصر دراستنا فى هذه الوحدة على الأجسام الجاسئة فقط.

أنواع القوى

هناك أنواع مختلفة للقوى أهمها :



١ **قوى الشد (ش)** : مثل القوة التى تظهر فى الخيط (أو الحبل) عند تعليق جسم فيه.



٢ **قوى الضغط (ض)** : مثل القوة التى تظهر عند ارتكاز جسم على سطح.

٣ **قوة رد الفعل (ر)** : كما فى حالة رد فعل سطح أملس على جسم مرتكز عليه.

٤ **قوى الجذب والتنافر** : مثل القوى التى تنشأ بين الأقطاب المغناطيسية والشحنات الكهربية والأجرام السماوية.

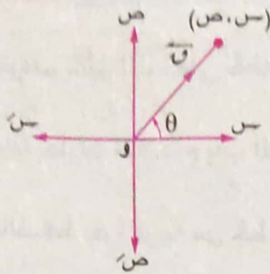
٥ قوى التثاقل (أو الوزن) : إذا ترك جسم فى الهواء فإنه يتحرك ساقطًا نحو سطح الأرض إذ أن الأرض تجذب جميع الأجسام نحوها بقوة تسمى «قوة جذب الأرض» أو «قوة التثاقل» أو «وزن الجسم».

• لاحظ أن : قوة الوزن (و) = كتلة الجسم × عجلة الجاذبية الأرضية = ك × ء

التعبير عن القوة

القوة كمية متجهة لذلك يمكن كتابتها بنفس طرق التعبير عن المتجه.

أى أن متجه القوة يمكن التعبير عنه كالتالى :



١ $\overline{ق}$ = (س ، ص) ⇐ الصورة الإحداثية.

٢ $\overline{ق}$ = س $\overline{س}$ + ص $\overline{ص}$ ⇐ بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين.

٣ $\overline{ق}$ = ($\|\overline{ق}\|$ ، θ) ⇐ الصورة القطبية.

تعيين القوة

القوة هى متجه يتميز بأنه يمر بنقطة محددة أى أنه يعمل فى خط مستقيم معلوم :

أى أن القوة تتعين تمامًا بمعرفة

١ مقدار القوة. ٢ اتجاه القوة. ٣ نقطة تأثير القوة.



فمثلًا :

لاعب كرة القدم يركل الكرة بقوة معينة (مقدار القوة) فى اتجاه معين (اتجاه القوة) وفى موضع معين على سطح الكرة (نقطة تأثير القوة)

١ وحدات قياس مقدار القوة

- يقاس مقدار القوة (القيمة العددية للقوة) بوحدات تسمى وحدات تثاقلية مثل : ثقل الجرام (ث.جم) ، ثقل الكيلو جرام (ث.كجم)

حيث ١ ث.كجم = ١٠٠٠ ث.جم = $١٠^{٣}$ ث.جم

- كما توجد وحدات أخرى لقياس مقدار القوة تسمى وحدات مطلقة مثل : الداين ، النيوتن

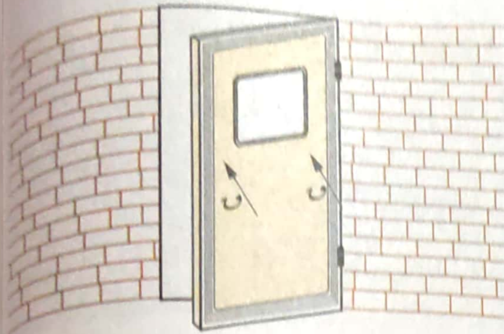
حيث ١ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ داين = $١٠^{٥}$ داين

- وترتبط الوحدات التثاقلية بالوحدات المطلقة بالعلاقة :

١ ث.كجم = ٩,٨ نيوتن
١ ث.جم = ٩٨٠ داين
(ما لم يذكر خلاف ذلك)

٢ اتجاه القوة

- اتجاه القوة هو اتجاه المتجه الذى يمثل هذه القوة ، ويتحدد بقياس الزاوية القطبية لمتجه القوة فى حالة القوى المؤثرة فى مستوى واحد.
- والزاوية القطبية هى الزاوية الموجهة الموجبة التى يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



٣ نقطة تأثير القوة

يتوقف تأثير القوة على نقطة تأثيرها.

فإذا حاولت مثلًا فتح باب الحجرة أو غلقه بالضغط بقوة قريبة من خط المفصلات فإنك تجد صعوبة كبيرة ، وتتلاشى هذه الصعوبة كلما ابتعدت عن خط المفصلات كما فى الشكل المقابل.



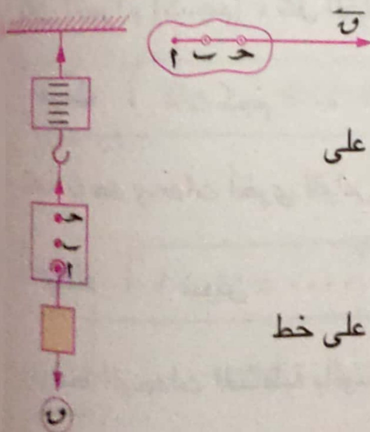
خط عمل القوة

خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازى لاتجاهها.

فمثلًا :

- خط عمل الشد فى خيط هو الخيط نفسه.
- خط عمل قوة وزن الجسم هو الخط الرأسى المار بمركز ثقل الجسم.

«نقل نقطة تأثير القوة» أو مبدأ «نفاذ القوة»

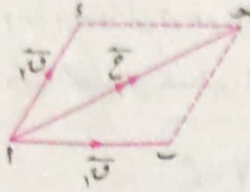


إذا أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى جسم متماسك وكانت نقطة تأثيرها أ فإنه يمكن نقل نقطة التأثير إلى أى نقطة أخرى موجودة على الجسم «ب» أو «حـ» أو ... على خط عمل $\overleftarrow{ق}$ دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم أى أن أية نقطة موجودة على الجسم على خط عمل قوة يمكن اعتبارها نقطة تأثير لهذه القوة.

محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة

محصلة قوتين أو أكثر هى قوة واحدة تحدث نفس التأثير الذى تحدثه هاتان القوتان أو مجموعة هذه القوى.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة هندسيا



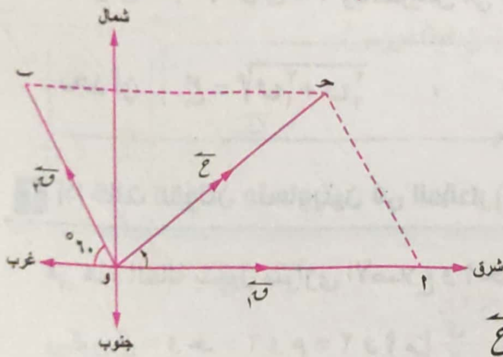
وتعتمد هذه الطريقة على قاعدة متوازى الأضلاع لجمع قوتين :

«فإذا مُثلت قوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ متلاقيتان فى نقطة مقدارًا واتجاهًا بضلعى متوازى أضلاع يبدأن من هذه النقطة فإن محصلتهما ($\overleftarrow{ح}$) تمثل مقدارًا واتجاهًا بقطر متوازى الأضلاع الذى يبدأ من نفس النقطة»

أى أن $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2}$

مثال ①

$\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان تؤثران فى نقطة (و) من جسم متماسك حيث $ق_1$ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، $ق_2$ = ٣٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد محصلتهما بيانيًا.



الحل

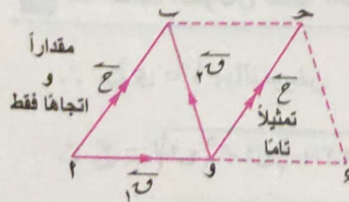
* نختار مقياس رسم ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن
* نرسم $\overleftarrow{و أ}$ يمثل $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ يمثل $\overleftarrow{ق_2}$

حيث $\|\overleftarrow{و أ}\|$ = ٥ سم ، $\|\overleftarrow{و ب}\|$ = ٣ سم

* نكمل متوازى الأضلاع و أ حـ ب فيكون $\overleftarrow{و حـ}$ يمثل المحصلة $\overleftarrow{ح}$
* بالقياس نجد أن : $\|\overleftarrow{و حـ}\|$ = ٤,٤ سم تقريبًا ، ق (∠ أ و حـ) = ٣٧°

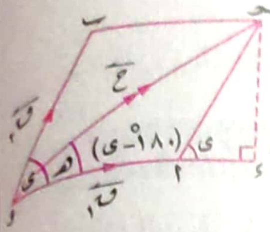
∴ $\overleftarrow{ح}$ تؤثر فى (و) ومقدارها ٤٤٠ نيوتن فى اتجاه ٣٧° شمال الشرق تقريبًا.

ملاحظة



إذا كانت $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثران فى نقطة (و) ومثلناهما تمثيلاً تامًا (أى مقدارًا واتجاهًا وخط عمل) بالمتجهين $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ كما فى الشكل المقابل فطبقًا لقاعدة جمع متجهين يكون $\overleftarrow{أ ب}$ ممثلاً لمحصلة هذين المتجهين. ولكن خط عمل محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ يجب أن يمر بالنقطة (و) نقطة تأثيرهما ، لذلك نرسم من (و) قطعة مستقيمة موجهة $\overleftarrow{و حـ}$ تكافئ $\overleftarrow{أ ب}$ فتكون هى التى تمثل محصلة القوتين تمثيلاً تامًا.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة تحليليا



نفرض أن $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة (و)

وأن قياس الزاوية بين اتجاهي القوتين = ى

فإذا كان و أ ، و ب تمثلان $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ فإن و ح تمثل المحصلة $\overline{ح}$

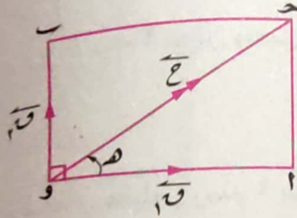
وإذا فرضنا أن هـ هو قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة $\overline{ح}$ مع القوة $\overline{ق_1}$ فإنه كما سبق فى دراسة قاعدة جيب التمام فى حساب المثلثات يمكن إيجاد محصلة القوتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ مقدارًا واتجاهًا من العلاقتين الآتيتين :

$$ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2\, ق_1\, ق_2\, جتا ى} \quad ، \quad طا هـ = \frac{ق_2\, جا ى}{ق_1 + ق_2\, جتا ى}$$

حيث $ق_1$ ، $ق_2$ ، ح مقادير القوى $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ ، $\overline{ح}$

حالات خاصة

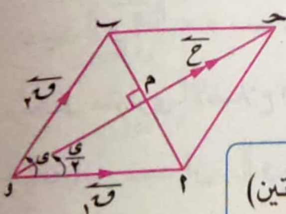
١ إذا كانت القوتان متعامدتين (أى أن : ى = ٩٠°) :



∴ جتا ى = ٠ ، جا ى = ١ وبالتعويض فى العلاقتين السابقتين

نجد أن $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ ، $طا هـ = \frac{ق_2}{ق_1}$

٢ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار (أى أن : $ق_1 = ق_2 = ق$) :



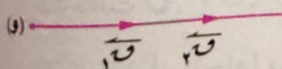
فى هذه الحالة يتحول متوازى الأضلاع و أ ح ب إلى معين

ويكون ح = و ح = ٢ و م = ٢ و أ $جتا \frac{ى}{2}$ = ٢ ق $جتا \frac{ى}{2}$

أى أن ح = ٢ ق $جتا \frac{ى}{2}$ ، هـ = $\frac{ى}{2}$ (حيث $\overline{ح}$ تنصف الزاوية بين القوتين)

* لاحظ أن : إذا كانت ى = ١٢٠° فإن : ح = ق

٣ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى نفس الاتجاه (أى أن : ى = ٠°) :



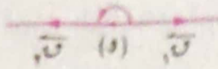
∴ جتا ى = ١ وبالتعويض

$$∴ ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2\, ق_1\, ق_2 \times 1} = \sqrt{(ق_1 + ق_2)^2} = ق_1 + ق_2$$

أى أن $ح = ق_1 + ق_2$ ويكون اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه خط عمل القوتين.

* وتسمى ح فى هذه الحالة أكبر محصلة أو القيمة العظمى للمحصلة.

٤ إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين (أى أن : ى = ١٨٠°) :



∴ $\text{جتا ى} = -1$ وبالتعويض

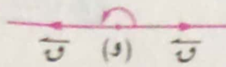
∴ $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \times (-1)} = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 - 2 ق_1 ق_2}$

$= \sqrt{(ق_1 - ق_2)^2} = |ق_1 - ق_2|$

أى أن $ح = |ق_1 - ق_2|$ ويكون اتجاه المحصلة فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا.

* وتسمى ح فى هذه الحالة أصغر محصلة أو القيمة الصغرى للمحصلة.

٥ إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين :

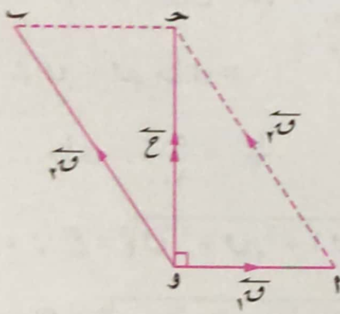


فى هذه الحالة يكون : $ق_1 = ق_2 = ق$ ، $ى = 180°$

∴ $\text{جتا ى} = -1$ ∴ $ح = \sqrt{ق^2 + ق^2 - 2 ق^2} = 0$

∴ ح = صفر   **أى أن** المحصلة هى المتجه الصفرى.

٦ إذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى (أى أن : هـ = ٩٠°) :



∵ $هـ = 90°$ ∴ $ح^2 = ق_2^2 - ق_1^2$ (من فيثاغورس)

، $\text{ظتا هـ} = \text{صفر}$ ∴ $\dfrac{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}}{ق_2 \text{ جا ى}} = \text{صفر}$

∴ $ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى} = \text{صفر}$

∴ $\text{جتا ى} = \dfrac{-ق_1}{ق_2}$ ∴ ى زاوية منفرجة ، $ق_1 < ق_2$

أى أن المحصلة عندما تكون عمودية على إحدى القوتين فإنها دائمًا تكون متعامدة مع القوة الصغرى.

مثال ٢

قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما قياسها ٦٠°.

أوجد مقدار واتجاه محصلتهما تحليليًا.

الحل

∵ $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا ى}}$ ∴ $ح = \sqrt{25 + 9 + 2 \times 5 \times 3 \times \text{جتا } 60°} = 7$ نيوتن

، ∵ $\text{ظا هـ} = \dfrac{ق_2 \text{ جا ى}}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا ى}}$ ∴ $\text{ظا هـ} = \dfrac{3 \text{ جا } 60°}{5 + 3 \text{ جتا } 60°} = \dfrac{3\sqrt{3}}{13}$ ∴ $هـ \simeq 21° \; 47'$

∴ المحصلة $\overrightarrow{ح}$ مقدارها ٧ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها $21° \; 47'$

مثال ③

قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٢.٥ نيوتن تؤثران في نقطة مادية أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

الحل

$\because$ ح $= \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ $\therefore$ ح $= \sqrt{(٦)^2 + (٢.٥)^2} = ٦.٥$ نيوتن

، $\because$ ظا هـ $= \frac{ق_2}{ق_1}$ $\therefore$ ظا هـ $= \frac{٢.٥}{٦} = \frac{٥}{١٢}$ $\therefore$ هـ $= ٢٢° ٣٧'$

$\therefore$ المحصلة $\overrightarrow{ح}$ مقدارها ٦.٥ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها $٢٢° ٣٧'$

مثال ④

قوتان مقداراهما ٥٠ ، ١٠٠ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى

أوجد قياس الزاوية بينهما ومقدار المحصلة.

الحل

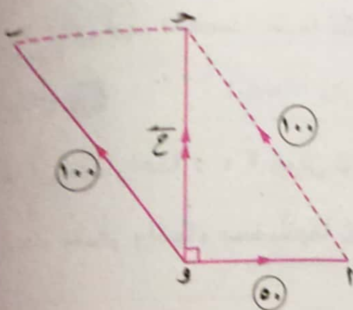
$\because$ ق$_1$ = ٥٠ نيوتن ، ق$_2$ = ١٠٠ نيوتن ، $\because$ المحصلة عمودية على القوة الأولى.

$\therefore$ ق$_1$ + ق$_2$ جتا ى = ٠ $\therefore$ ٥٠ + ١٠٠ جتا ى = ٠

$\therefore$ جتا ى $= \frac{-٥٠}{١٠٠} = \frac{-١}{٢}$ $\therefore$ ق (د ى) = ١٢٠°

، $\because$ ح $= \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + ٢ ق_1 ق_2 \text{ جتا ى}}$

$\therefore$ ح $= \sqrt{(٥٠)^2 + (١٠٠)^2 + ٢ \times ٥٠ \times ١٠٠ \text{ جتا } ١٢٠°} = ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن



حل آخر:

بفرض أن $\overrightarrow{و أ}$ يمثل القوة التي مقدارها ٥٠ نيوتن

، $\overrightarrow{و ب}$ يمثل القوة التي مقدارها ١٠٠ نيوتن

، $\because$ المحصلة عمودية على القوة الأولى

$\therefore$ Δ و أ جـ قائم الزاوية في و $\therefore$ جتا أ $= \frac{و أ}{أ جـ} = \frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ ق (د أ) = ٦٠° $\therefore$ ق (د أ و ب) = ١٢٠° وهو قياس الزاوية بين القوتين.

، $\because$ ح^2 = $(١٠٠)^2 - (٥٠)^2$ $\therefore$ ح $= \sqrt{(١٠٠)^2 - (٥٠)^2} = ٥٠\sqrt{٣}$ نيوتن

مثال ٥

قوتان تؤثران في نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

الحل

بفرض أن القوة الكبرى = $ق_1$ ، القوة الصغرى = $ق_2$

∴ $ق_1 + ق_2 = ٣٢$ (١) ، $ق_1 - ق_2 = ١٢$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) معاً : ∴ $ق_1 = ٢٢$ ث.كجم ، $ق_2 = ١٠$ ث.كجم

وإذا كان : ق(د ى) = ٦٠°

∴ $ح = \sqrt{(٢٢)^2 + (١٠)^2 + ٢ \times ٢٢ \times ١٠ \text{ حتا } ٦٠°} = ٢\sqrt{٢٠١}$ ث.كجم

مثال ٦

قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما $٧٠\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

أوجد مقدار كل من القوتين.

الحل

∵ القوتين متساويتان في المقدار ∴ $ح = ٢ ق \text{ حتا } \frac{ى}{٢}$

∴ $٧٠\sqrt{٣} = ٢ ق \text{ حتا } ٣٠°$ ∴ $ق = ٧٠$ نيوتن

∴ القوتان هما ٧٠ نيوتن ، ٧٠ نيوتن.

مثال ٧

قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة ق

الحل

∵ $\text{طا } هـ = \frac{ق_1 \text{ حا } ى}{ق_2 + ق_1 \text{ حتا } ى}$ حيث هـ هي الزاوية التي تميل بها المحصلة على القوة $ق_2$

∴ $\text{طا } ٤٥° = \frac{٦ \text{ حا } ١٣٥°}{ق + ٦ \text{ حتا } ١٣٥°}$ ∴ $١ = \frac{٣\sqrt{٢}}{ق - ٣\sqrt{٢}}$

∴ $ق - ٣\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$ ∴ $ق = ٦\sqrt{٢}$ ث.كجم

، ∵ $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + ٢ ق_1 ق_2 \text{ حتا } ى}$

∴ $ح = \sqrt{(٦)^2 + (٦\sqrt{٢})^2 + ٢ \times ٦ \times ٦\sqrt{٢} \text{ حتا } ١٣٥°} = ٦$ ث.كجم

مثال ٨

قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٤ ق ، ٣ ق أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كان مقدار محصلتهما $\sqrt{13}$ ق

الحل

∴ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

∴ $(\sqrt{13} ق)^2 = (4 ق)^2 + (3 ق)^2 + 2 \times 4 ق \times 3 ق \text{ جتا } ى$

∴ $13 ق^2 = 16 ق^2 + 9 ق^2 + 24 ق^2 \text{ جتا } ى$ ∴ $-12 ق^2 = 24 ق^2 \text{ جتا } ى$

∴ $\text{جتا } ى = \frac{-12 ق^2}{24 ق^2} = \frac{-1}{2}$ ∴ $ق(\angle ى) = 120°$

مثال ٩

أثرت قوتان فى نقطة مادية مقداراهما ٧ ، ق ث.كجم وقياس الزاوية بين خطى عملهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما $7\sqrt{3}$ ث.كجم فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على اتجاه القوة الأولى.

الحل

∵ $ح^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى$

∴ $(7\sqrt{3})^2 = (7)^2 + (ق)^2 + 2 \times 7 \times ق \text{ جتا } 120°$

∴ $147 = 49 + ق^2 - 7 ق$ ∴ $ق^2 - 7 ق - 98 = 0$

∴ $(ق - 14)(ق + 7) = 0$ ∴ $ق = 14$ ثقل كجم.

، ∵ $\text{ظا } هـ = \frac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى}$ ∴ $\text{ظا } هـ = \frac{14 \times \text{ جا } 120°}{7 + 14 \times \text{ جتا } 120°} = \frac{7\sqrt{3}}{0}$ (غير معرفة)

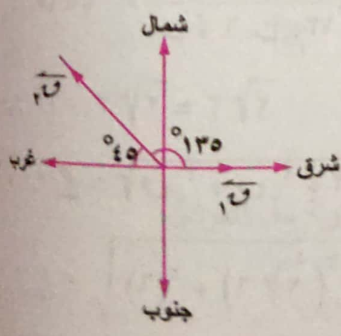
∴ $\text{ظتا } هـ = \text{صفر}$ ∴ $هـ = 90°$

أى أن المحصلة عمودية على القوة الأولى.

مثال ١٠

قوتان مقداراهما ٥ ، $5\sqrt{2}$ ثقل كجم تؤثران فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الغربى أثبت أن محصلتهما مقدارها يساوى مقدار القوة الأولى وأوجد قياس الزاوية التى تميل بها المحصلة على كل من القوتين.

الحل



$ق_1 = 5$ ث.كجم ، $ق_2 = 5\sqrt{2}$ ث.كجم ، ومن الرسم ى = ١٣٥°

، ∵ $ح = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى}$

∴ $ح = \sqrt{25 + 50 + 2 \times 5 \times 5\sqrt{2} \times \text{ جتا } 135°}$

∴ $ح = 5$ ث.كجم $= ق_1$

، ∵ $\text{طا هـ} = \frac{\text{ق}_{٢} \text{ جا ى}}{\text{ق}_{١} + \text{ق}_{٢} \text{ جتا ى}}$ ∴ $\text{طا هـ} = \frac{٥\sqrt{٢} \times \text{جا } ١٣٥^\circ}{٥ + ٥\sqrt{٢} \text{ جتا } ١٣٥^\circ} = \frac{٥}{\text{صفر}}$ (غير معرفة)

∴ طا هـ = صفر ∴ هـ = ٩٠°

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ عمودية على اتجاه $\overleftarrow{\text{ق}_{١}}$ أى نحو الشمال وتميل على اتجاه $\overleftarrow{\text{ق}_{٢}}$ بزاوية قياسها ١٣٥° − ٩٠° = ٤٥°

مثال (١١)

قوتان متســاويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يســاوى ٨ نيوتن وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين.

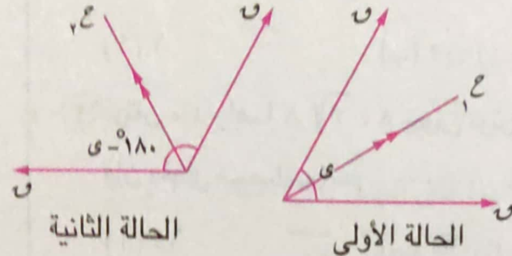
الحل

$\text{ح}_{١} = ٢ \text{ ق جتا } \frac{\text{ى}}{٢} = ٨$

∴ $\text{ق جتا } \frac{\text{ى}}{٢} = ٤$ (١)

، $\text{ح}_{٢} = ٢ \text{ ق جتا } \left(\frac{١٨٠^\circ - \text{ى}}{٢}\right) = ٦$

∴ $\text{ق جا } \frac{\text{ى}}{٢} = ٣$ (٢)



بتربيع المعادلتين (١) ، (٢) ثم الجمع :

∴ $\text{ق}^{٢} \text{ جتا}^{٢} \frac{\text{ى}}{٢} + \text{ق}^{٢} \text{ جا}^{٢} \frac{\text{ى}}{٢} = ١٦ + ٩$

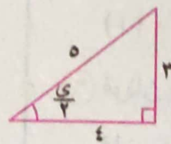
∴ $\text{ق}^{٢} \left(\text{جتا}^{٢} \frac{\text{ى}}{٢} + \text{جا}^{٢} \frac{\text{ى}}{٢}\right) = ٢٥$ ∴ $\text{ق}^{٢} = ٢٥$

∴ ق = ٥ نيوتن ∴ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن

* لاحظ أنه يمكن حل المعادلتين كما يلى

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) :

∴ $\text{طا } \frac{\text{ى}}{٢} = \frac{٣}{٤}$ ∴ $\text{جا } \frac{\text{ى}}{٢} = \frac{٣}{٥}$



بالتعويض فى معادلة (٢) :

∴ $\text{ق} \times \frac{٣}{٥} = ٣$ ∴ ق = ٥ نيوتن

∴ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن

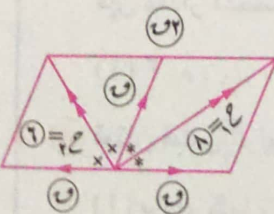
حل آخر هندسيًا : ∵ القوتان متساويتان

∴ كل من $\overleftarrow{\text{ح}_{١}}$ ، $\overleftarrow{\text{ح}_{٢}}$ تنصف الزاوية بين القوتين

∴ $\overleftarrow{\text{ح}_{١}} \perp \overleftarrow{\text{ح}_{٢}}$ ∴ $(\text{ح}_{١})^{٢} + (\text{ح}_{٢})^{٢} = (٢ \text{ ق})^{٢}$

∴ $٦٤ + ٣٦ = ٤ \text{ ق}^{٢}$ ∴ $\text{ق}^{٢} = ٢٥$

∴ ق = ٥ ∴ مقدار القوتين ٥ ، ٥ نيوتن



على القوى - محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة



من أسئلة الكتاب المدرسي ● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القوة تتعين تمامًا بمعرفة ....

(أ) مقدار القوة. (ب) اتجاه القوة. (جـ) نقطة تأثير القوة. (د) جميع ما سبق.

(٢) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

(٣) قوتان مقداراهما ٨ $\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

(٤) قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة

فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٥) القوتان ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما يمكن أن تكون .... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٢ (د) ١

(٦) قوتان مقداراهما ٤ ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما $\frac{-٢}{٥}$

فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ١٥ (ب) ٥ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

(٧) قوتان متلاقيتان فى نقطة مادية مقداراهما ٦ ، ٣ نيوتن والمحصلة عمودية على إحداهما

فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

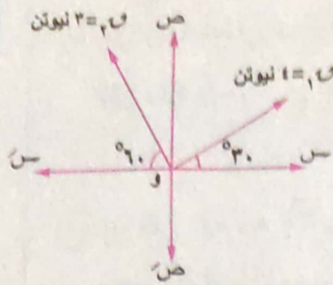
(أ) ٣ (ب) ٣ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(٨) قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ (ب) تتضاعف بتضاعف قيمة θ

(جـ) يزداد كلما نقصت قيمة θ (د) لا يتغير بتغير قيمة θ

(٩) في الشكل المقابل :



محصلة القوتين المبينتين في الشكل

تساوي .... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٥

(جـ) ١ (د) $\sqrt{٧}$

(١٠) في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٢ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) صفر

(١١) مقدار محصلة القوتين في الشكل المقابل هو ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) $\sqrt{٥}$ ق

(١٢) إذا كانت محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تنصف الزاوية بينهما فأي الجمل الآتية صحيحة ؟

(I) $ق_1 = ق_2$ (II) $\overleftarrow{ق_1} = \overleftarrow{ق_2}$ (III) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2}$

(أ) I فقط. (ب) I ، III فقط.

(جـ) II ، III فقط. (د) كل ما سبق صحيح.

(١٣) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما °٦٠

إذا كانت محصلتهما ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(١٤) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ق نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

(١٥) قوتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل قوة منهما يساوي .... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(١٦) قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما = ٧ $\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$

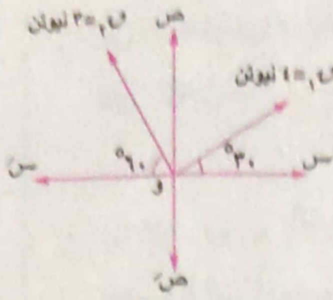
فإن مقدار كل منهما يساوي .... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) ٧

(٩) فى الشكل المقابل :

محصلة القوتين المبينتين فى الشكل

تساوى .... نيوتن.

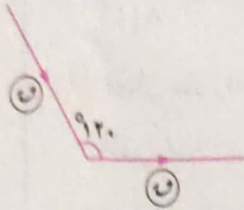


(أ) ٧ (ب) ٥

(جـ) ١ (د) $\sqrt{٧}$

(١٠) فى الشكل المقابل :

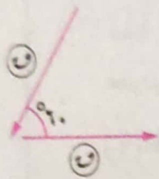
مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن.



(أ) ٢ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) صفر

(١١) مقدار محصلة القوتين فى الشكل المقابل هو ....



(أ) $\frac{١}{٢}$ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) $\sqrt{٥}$ ق

(١٢) إذا كانت محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تنصف الزاوية بينهما فأى الجمل الآتية صحيحة ؟

(I) $ق_١ = ق_٢$ (II) $\overleftarrow{ق_١} = \overleftarrow{ق_٢}$ (III) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢}$

(أ) I فقط. (ب) I ، III فقط.

(جـ) II ، III فقط. (د) كل ما سبق صحيح.

(١٣) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

إذا كانت محصلتهما ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

(١٤) قوتان مقداراهما ق ، ٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = $\frac{٢\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ق نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢ $\sqrt{٢}$

(١٥) قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

(١٦) قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما = ٧ $\sqrt{٣}$ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$

فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٥ (د) ٧

(١٧) قوتان مقدارهما ق ، ق ث.جم ومقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠°

فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٨ $\sqrt{2}$ (د) ١٢

(١٨) إذا كان : ق ، ٨ $\sqrt{3}$ مقداري قوتين تؤثران في جسيم وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ، المحصلة تنصف الزاوية المحصورة بين القوتين فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{3}$ (جـ) ٨ $\sqrt{2}$ (د) ١٢

(١٩) قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ (د) ٨

(٢٠) 📖 قوتان مقدارهما ٣ نيوتن ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١,٥ (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{3}$ (د) ٦

(٢١) قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{5}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣

(٢٢) قوتان مقدارهما ٦ نيوتن ، ١٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٤ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ٤٥°

(٢٣) 📖 قوتان متساويتان متلاقيتان فى نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢٤) قوتان مقدارهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٣٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

(٢٥) قوتان مقدارهما ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

(٢٦) قوتان مقدارهما ٢ ق ، ٥ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ى ومقدار محصلتهما ٣ ق فإن : ى = ...

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

(٢٧) قوتان مقداراهما ٣ ق ، ق نيوتن محصلتهما ٤ ق نيوتن يكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

(٢٨) قوتان مقداراهما ق ، ق تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما مقدارها ق فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوى ....

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٤٥° (د) ٩٠°

(٢٩) قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كان مقدار محصلتهما ٢ ق نيوتن فإن قياس الزاوية بين اتجاهى هاتين القوتين يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣٠) إذا كانت : $\overleftarrow{\text{ح}} = \overleftarrow{\text{ق}}_1 + \overleftarrow{\text{ق}}_2$ ، وكان : $\|\overleftarrow{\text{ح}}\| = \|\overleftarrow{\text{ق}}_1\| - \|\overleftarrow{\text{ق}}_2\|$

فإن قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overleftarrow{\text{ق}}_2$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) π

(٣١) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

(٣٢) قياس الزاوية بين $\overleftarrow{\text{ق}}_1$ ومحصلة القوتين $(\overleftarrow{\text{ق}}_1 + \overleftarrow{\text{ق}}_2)$ ، $(\overleftarrow{\text{ق}}_1 - \overleftarrow{\text{ق}}_2)$ هو ....

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

(٣٣) إذا كانت $\overleftarrow{\text{ح}}_1$ هى محصلة القوتين $(\overleftarrow{\text{ق}}_1 ، \overleftarrow{\text{ق}}_2)$ ، $\overleftarrow{\text{ح}}_2$ هى محصلة القوتين $(\overleftarrow{\text{ق}}_1 ، -\overleftarrow{\text{ق}}_2)$ ، $\|\overleftarrow{\text{ق}}_1\| = \|\overleftarrow{\text{ق}}_2\|$

فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{\text{ح}}_1 \perp \overleftarrow{\text{ح}}_2$ (ب) $\overleftarrow{\text{ح}}_1 = \overleftarrow{\text{ح}}_2$

(جـ) $\|\overleftarrow{\text{ح}}_1\| = \|\overleftarrow{\text{ح}}_2\|$ (د) $\overleftarrow{\text{ح}}_1 \parallel \overleftarrow{\text{ح}}_2$

(٣٤) قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠° فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

(٣٥) قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن قياس زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى هو ....

(أ) جا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$ (ب) جتا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$ (جـ) ظا$^{-1}$ $\frac{٤}{٣}$ (د) ظا$^{-1}$ $\frac{٣}{٤}$

(٣٦) قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما

فإن : ح = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ ق (ب) $\sqrt{٣}$ ق (جـ) ٣ ق (د) ق

(٣٧) قوتان مقداراهما ٣ $\sqrt{2}$ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما = ١٣٥° فإن قياس الزاوية بين محصلتهما والقوة الثانية = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

(٣٨) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ° بحيث جتا هـ = $-\frac{4}{5}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٦° ٥٢َ

(٣٩) قوتان تؤثران فى نقطة مادية مقداراهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٣

(٤٠) قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ نيوتن فإن القيمة العظمى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ١٠ (د) ١٥

(٤١) القيمة العظمى والصغرى على الترتيب لمحصلة قوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هى .... نيوتن.

(أ) ١٢ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

(٤٢) قوتان مقداراهما ٥ ، ق نيوتن أصغر محصلة لهم ١٠ نيوتن ، ق > ٥ فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

(٤٣) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإذا كانت القيمة العظمى لمحصلتهما ٤٠ نيوتن فإن القيمة الصغرى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) صفر

(٤٤) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن فإن مقدار محصلتهما مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[(جـ) [٣ ، ٥] (د)]٣ ، ٥[

(٤٥) إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى ∋]٠ ، π[فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ)]٤ ، ٨[(ب) [٤ ، ٨[(جـ)]٤ ، ٨] (د) [٤ ، ٨]

(٤٦) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) ٨ $\sqrt{2}$ (جـ) ١٦ $\sqrt{2}$ (د) صفر

(٤٧) قوتان مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ ث.جم حيث $ق_1 > ق_2$ ومقدار أصغر وأكبر محصلة لهما ٣ ، ١٢ ث.جم على الترتيب فإن : $ق_1^2 - ق_2^2 =$ ....

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

(٤٨) قوتان مقداراهما ١٢ ، ١٧ نيوتن فإن الفرق بين أكبر قيمة وأقل قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

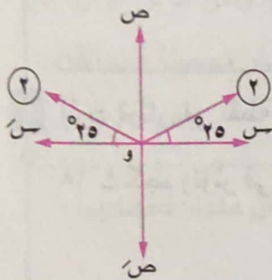
(أ) ٢٩ (ب) ٥ (جـ) ١٤ (د) ٢٤

(٤٩) قوتان مقداراهما ق ، $\sqrt{3}$ ق نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما $ح_1$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_2$ عندما كان قياس الزاوية بينهما ١٥٠°

فإن : ....

(أ) $ح_1 = ح_2$ (ب) $ح_1 = ٢ ح_2$ (جـ) $ح_1 = \frac{٣}{٥} ح_2$ (د) $ح_1 = \frac{١}{٢} ح_2$

(٥٠) محصلة القوتين فى الشكل المقابل تؤثر فى اتجاه ....



(أ) $\overleftarrow{\text{و س}}$

(ب) $\overleftarrow{\text{و سَ}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{و ص}}$

(د) $\overleftarrow{\text{و صَ}}$

(٥١) قوتان متلاقيتان فى نقطة ومقدار أصغر وأكبر محصلة لهما ٠ ، ١٢ نيوتن على الترتيب فإن القوتين ....

(أ) مقدار إحداهما ثلاث أمثال الأخرى. (ب) مقدار إحداهما ضعف الأخرى.

(جـ) متساويتان فى المقدار. (د) متعامدتان.

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مقدار واتجاه محصلة قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ ، ١٥ ث.كجم وتؤثران فى نقطة مادية.
«١٧ ث.كجم ، هـ = ٦١° ٥٥َ ٣٩ً»

٢ قوتان تؤثران فى نقطة مادية فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما = ١٧ ث.كجم وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما = ٧ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين.
«١٢ ، ٥ ث.كجم»

٣ قوتان متساويتان فى المقدار ، مقدار محصلتهما ٤ $\sqrt{3}$ ث.كجم وقياس الزاوية بين اتجاه إحدى القوتين واتجاه المحصلة ٣٠° فما مقدار كل من هاتين القوتين ؟
«٤ ث.كجم»

4 قوتان متعامدتان تؤثران في نقطة مادية مقدار محصلتهما ٥٠ نيوتن فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار كل من القوتين.

«٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥ نيوتن»

5 قوتان مقداراهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن. أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

«١٢٠°»

6 قوتان مقداراهما ٨ ، ١٦ ثقل جرام تؤثران في نقطة مادية. أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى.

«١٢٠°»

7 قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ى أوجد قيمة (ى) إذا كانت محصلتهما مقدارها ٣ $\sqrt{٧}$ ث.كجم وأوجد قياس الزاوية التي تصنعها المحصلة مع القوة الكبرى.

«ى = ١٢٠° ، هـ = ٤٦° ٣َ ٤٠ً»

8 أثرت قوتان في نقطة مادية فإذا كان مقدار القوة الأولى ١٥ ث.كجم وتؤثر في اتجاه الشرق ومقدار الثانية ١٨ ث.كجم وتؤثر في اتجاه ٣٠° غرب الشمال. احسب مقدار واتجاه المحصلة.

«٣ $\sqrt{٣١}$ ث.كجم ، هـ = ٥٤° ٥٦َ ٦٨ً»

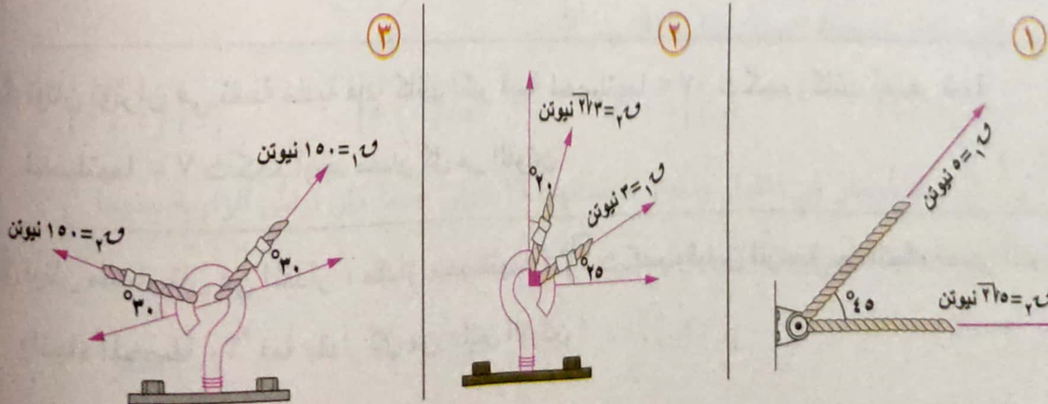
9 قوتان مقداراهما ١٢ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة ، تعمل الأولى في اتجاه الشرق وتعمل الثانية في اتجاه ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا علم أن خط عمل المحصلة يؤثر في اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

«٦ ث.كجم ، ٦ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

10 قوتان تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى حيث ظا ى = $\frac{-١}{\sqrt{٣}}$ فإذا علم أن محصلتهما عمودية على صغراهما وأن مقدار القوة الكبرى = ٣٠ ث.كجم فما مقدار كل من القوة الصغرى والمحصلة ؟

«١٥ $\sqrt{٣}$ ث.كجم ، ١٥ ث.كجم»

11 أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة في كل من الأشكال الآتية :



١٢ قوتان مقدارهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع ق «٨ نيوتن ، ٣٠°»

١٣ قوتان مقدارهما $\sqrt{٣}$ ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية. أوجد قياس الزاوية بينهما إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الصغرى وإذا كانت ق = ١٥ نيوتن. أوجد مقدار المحصلة. «١٥٠° ، ١٥ نيوتن»

١٤ قوتان مقدارهما ٢ $\sqrt{٢}$ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما $\sqrt{٢}$ نيوتن فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الثانية. أوجد ق وقياس الزاوية بين القوتين. «$\sqrt{٦}$ نيوتن ، ١٥٠°»

١٥ قوتان مقدارهما ١٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت محصلتهما تميل على القوة ١٦ ث.كجم بزاوية قياسها ٣٠° أوجد قيمة ق ومقدار محصلة القوتين. «٨ ، ٨ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

١٦ إذا أثرت القوى الثلاث التى مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{٧}$ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية يساوى ٦٠° أوجد القيمة العظمى والصغرى لمقدار محصلة هذه القوى.
«٩ $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٧}$ نيوتن»

١٧ قوتان مقدارهما ٢ ق ، ٣ ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما هـ أوجد قيمة هـ إذا كان مقدار محصلتهما :

(١) ٣ ق
(٢) ق
(٣) ٥ ق
(٤) $\sqrt{١٣}$ ق

«٦٦ ٢٨ ١٠٩° ، ١٨٠° ، صفر° ، ٩٠°»

١٨ قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° أوجد قيمة ق فى كل من الحالتين الآتيتين :

(١) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية.
(٢) اتجاه المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على القوة الثانية. «١ ، $\sqrt{٣}$ + ١ نيوتن»

١٩ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما $ق_١$ ، $ق_٢$ نيوتن ومحصلتهما ح نيوتن حيث ح ∈ [٢ ، ١٠] ، $ق_١$ > $ق_٢$ أوجد قيمتى $ق_١$ ، $ق_٢$ ثم أوجد مقدار المحصلة عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠° «٦ ، ٤ ، ٢ $\sqrt{٧}$ نيوتن»

٢٠ قوتان تؤثران فى نقطة مادية ومقدار إحداهما يزيد عن الأخرى بمقدار ٣ نيوتن ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الصغرى. أوجد مقدار كل من القوتين وقياس الزاوية بينهما.
«٣ ، ٦ نيوتن ، ى = ١٢٠°»

٢١ قوتان تؤثران فى نقطة فإذا كانت محصلتهما مقدارها $\sqrt{١٠}$ نيوتن عندما كانت الزاوية بين اتجاهيهما قائمة ويصبح مقدار المحصلة $\sqrt{١٣}$ نيوتن عندما يكون قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين ٦٠° فما مقدار كل من القوتين ؟ «١ ، ٣ نيوتن»

٢٢ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث.كجم. أوجد مقدار كل من القوتين. «٣ √٥ ، ٣ √٥ ث.كجم»

---

٢٣ قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومقدار محصلتهما = ح ث.جم وإذا عكس اتجاه $ق_2$ فإن مقدار المحصلة يصبح ح √٣ ث.جم أثبت أن : $ق_1 = ق_2$ وأن المحصلة في الحالة الثانية يكون اتجاهها عموديًا على اتجاه المحصلة في الحالة الأولى.

---

٢٤ قوتان ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت محصلتهما ١٠ نيوتن وتعمل زاوية قياسها ٦٠° مع القوة ٤ نيوتن. أوجد : قيمة ق «٢ √١٩ نيوتن»

---

٢٥ قوتان متلاقيتان في نقطة ، الفرق بين مقداريهما ١٥ نيوتن ومقدار محصلتهما = ٣٥ نيوتن عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد مقدار كل من القوتين. «٤٠ ، ٢٥ نيوتن»

---

٢٦ قوتان مجموع مقداريهما ٤ نيوتن، وعندما يكون قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوى √١٣ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين. «١ ، ٣ نيوتن»

---

٢٧ قوتان تؤثران في نقطة مادية مجموع مقداريهما ٤٠ ث.كجم ومقدار محصلتهما ٢٠ ث.كجم وعمودية على القوة ذات المقدار الأصغر. أوجد مقدار كل من القوتين وجيب تمام الزاوية بينهما. «١٥ ، ٢٥ ، $-\frac{٣}{٥}$»

---

٢٨ قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث $ق_1 > ق_2$ وبينهما زاوية قياسها ى وعندما ى = ٩٠° تصبح محصلتهما ٥ ثقل كجم ، عندما ى = ١٢٠° تصبح محصلتهما √١٣ ثقل كجم.

أوجد مقدار كل من : $ق_1$ ، $ق_2$ «٤ ، ٣ ثقل كجم»

---

٢٩ قوتان متساويتان مقدار كل منهما ق ث.كجم تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث.كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق «١ + ٢ √٣»

---

٣٠ ق ، ٢ ق قوتان تؤثران في نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى ومقدار محصلتهما يساوى √٥ ق (م + ١) وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما (٩٠° - ى) فإن مقدار المحصلة يساوى √٥ ق (م - ١)

أثبت أن : طا ى = $\frac{م - ٢}{م + ٢}$

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٧ : ٣
فإن النسبة بين القوتين = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (جـ) ٥ : ٣ (د) ٥ : ٢

(٢) إذا كانت النسبة بين مقدارى قوتين ومقدار محصلتهما هى ٤ : ٣ : $\sqrt{١٣}$ على الترتيب
فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(٣) إذا كانت محصلة القوتين $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ عمودية على $\overrightarrow{ق}_1$ فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$
يساوى ....

(أ) $جتا^{-1}\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (ب) $جتا^{-1}\left(\frac{-ق_1}{ق_2}\right)$ (جـ) $جا^{-1}\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (د) $جا^{-1}\left(\frac{-ق_1}{ق_2}\right)$

(٤) إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ
فأى القيم الآتية تصلح أن تكون قيمة لـ θ ؟

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

(٥) قوتان $\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$ تؤثران فى نقطة مادية محصلتهما ح وإذا عكس اتجاه $\overrightarrow{ق}_2$
فإن اتجاه المحصلة يدور بزاوية قياسها ٩٠° فإن : ....

(أ) $ق_1 = ق_2$ (ب) $ق_1 = ٢\,ق_2$ (جـ) $ق_1 = \frac{1}{2}\,ق_2$ (د) لا شيء مما سبق.

(٦) قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة واحدة وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°
فإن ق التى تجعل المحصلة أصغر ما يمكن تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٧) إذا كانت θ_1 هى قياس الزاوية بين محصلة القوتين ($\overrightarrow{ق}_1$ ، $\overrightarrow{ق}_2$) والقوة $\overrightarrow{ق}_1$ وكانت θ_2 هى قياس الزاوية بين محصلة القوتين ($\overrightarrow{ق}_1$ ، ٢ $\overrightarrow{ق}_2$) والقوة $\overrightarrow{ق}_1$ فإن : ....

(أ) $\theta_1 = \theta_2$ (ب) $\theta_1 < \theta_2$ (جـ) $\theta_1 > \theta_2$ (د) $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

(٨) قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن فإذا كانت $هـ_1$ هى قياس الزاوية بين ق ، ح وكانت $هـ_2$ هى قياس الزاوية بين ق $\sqrt{3}$ ، ح فإن : ....

(أ) $هـ_1 = هـ_2$ (ب) $هـ_1 = \frac{1}{2}\,هـ_2$ (جـ) $هـ_1 = ٣\,هـ_2$ (د) $هـ_1 = ٤\,هـ_2$

(٩) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث ٣ ≤ $ق_1$ ≤ ١٢ ، ٤ ≤ $ق_2$ ≤ ١٦

ومقدار محصلتهما ح وقياس الزاوية بينهما °٩٠ فإن : ....

(أ) ٥ ≤ ح ≤ ٢٠ (ب) ٧ ≤ ح ≤ ٢٨ (جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٨ (د) ١ ≤ ح ≤ ٤

(١٠) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث ١ ≤ $ق_1$ ≤ ٩ ، ٣ ≤ $ق_2$ ≤ ٧

ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) ٢ ≤ ح ≤ ١٦ (ب) ٤ ≤ ح ≤ ١٦ (جـ) ٦ ≤ ح ≤ ١٦ (د) ٠ ≤ ح ≤ ١٦

(١١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث ٥ ≤ $ق_1$ ≤ ٢٠ ، ١٢ ≤ $ق_2$ ≤ ٢١ وكان مقدار

محصلتهما ح ، قياس الزاوية بينهما θ حيث ٠ ≤ θ ≤ $\frac{\pi}{٢}$ فإن : ....

(أ) ١٣ ≤ ح ≤ ٢٩ (ب) ٠ ≤ ح ≤ ٤١ (جـ) ١٣ ≤ ح ≤ ٤١ (د) ١٧ ≤ ح ≤ ٢٩

---

٢ قوتان الأولى نصف الثانية فى المقدار ولهما محصلة ما فإذا زيد مقدار القوة الأولى بمقدار ٤ ثقل كجم وضوعف مقدار القوة الثانية فإن محصلتهما تظل فى نفس اتجاه المحصلة الأولى.

أوجد مقدار كل من القوتين والنسبة بين محصلتيهما فى الحالتين. «٤ ، ٨ ثقل كجم ، ١ : ٢»

---

٣ $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ متلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما = ح نيوتن وإذا عكس اتجاه $\overline{ق_2}$ فإن المحصلة تصبح $\sqrt{٣}$ ح نيوتن وفى اتجاه عمودى على المحصلة الأولى.

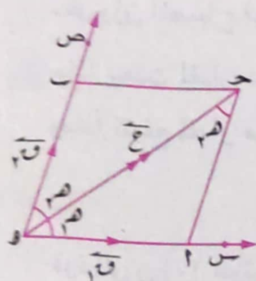
أوجد قياس الزاوية بين القوتين. «°١٢٠»

الدرس 2

تحليل القوة إلى مركبتين



تحليل قوة معلومة فى اتجاهين معلومين



نفرض أن لدينا قوة $\overrightarrow{ح}$ تؤثر فى نقطة مادية (و) ويراد تحليلها إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ حيث اتجاه المركبة الأولى يميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$ بزاوية هـ$_1$ واتجاه المركبة الثانية يميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$ بزاوية هـ$_2$ لذلك نرسم بمقياس رسم المتجه $\overrightarrow{وحـ}$ ليمثل القوة $\overrightarrow{ح}$ ثم نرسم من و الشعاعين $\overrightarrow{وس}$ ، $\overrightarrow{وص}$ يصنعان مع $\overrightarrow{وحـ}$

وفى اتجاهين مختلفين منه الزاويتين هـ$_1$ ، هـ$_2$ ونرسم من حـ موازيين لهذين الشعاعين لنحصل على متوازى الأضلاع و أ حـ ب كما فى الشكل الموضح.

فيكون المتجه $\overrightarrow{وأ}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{ق_1}$ ، والمتجه $\overrightarrow{وب}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{ق_2}$ ويكون المتجه $\overrightarrow{أحـ}$ ممثلاً للمركبة $\overrightarrow{ق_2}$ أيضًا.

وبتطبيق قانون الجيب على Δ و أ حـ حيث ق(د أ حـ و) = هـ$_2$ يكون :

جا (د و أ حـ) = جا [١٨٠° − (هـ$_1$ + هـ$_2$)] = جا (هـ$_1$ + هـ$_2$)

$$\therefore \quad \frac{ق_1}{جا\, هـ_2} = \frac{ق_2}{جا\, هـ_1} = \frac{ح}{جا\,(هـ_1 + هـ_2)}$$

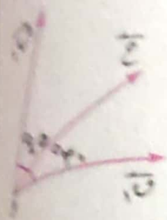
أى أن

$$ق_1 \text{ (مقدار المركبة التى تميل على } \overrightarrow{ح} \text{ بزاوية هـ}_1) = \frac{ح \times جا\, هـ_2}{جا\,(هـ_1 + هـ_2)}$$

$$، ق_2 \text{ (مقدار المركبة التى تميل على } \overrightarrow{ح} \text{ بزاوية هـ}_2) = \frac{ح \times جا\, هـ_1}{جا\,(هـ_1 + هـ_2)}$$

مثال ①

حلل قوة مقدارها ٢٠ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٣٠°، ٤٥° في ناحيتين مختلفتين منها ثم قرب الناتج لأقرب رقم عشري واحد.



الحل

$$ق_1 = \frac{ح\ جا\ هـ_2}{جا(هـ_1 + هـ_2)} = \frac{٢٠\ جا\ ٤٥^\circ}{جا\ ٧٥^\circ} \simeq ١٤,٦ \text{ نيوتن}$$

$$،\ ق_2 = \frac{ح\ جا\ هـ_1}{جا(هـ_1 + هـ_2)} = \frac{٢٠\ جا\ ٣٠^\circ}{جا\ ٧٥^\circ} \simeq ١٠,٤ \text{ نيوتن}$$

مثال ②

في الشكل المقابل :

مصباح وزنه ١٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ يميلان على الأفقي بزاويتين قياس كل منهما ٢٠°

1. حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$
2. ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٢٠°؛ وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدني أفقيًا ؟

الحل

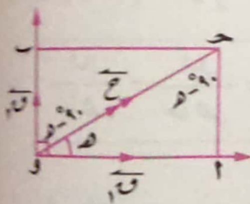
1. قوة الوزن (١٠ نيوتن) تعمل رأسيًا لأسفل.

ومن هندسة الشكل نجد أن : $\frac{ق_1}{جا\ ٧٠^\circ} = \frac{ق_2}{جا\ ٧٠^\circ} = \frac{١٠}{جا\ ١٤٠^\circ}$

$$\therefore ق_1 = ق_2 = \frac{١٠\ جا\ ٧٠^\circ}{جا\ ١٤٠^\circ} \simeq ١٥ \text{ نيوتن}$$

2. إذا نقص قياس الزاوية مع الأفقي عن ٢٠° فإن مقدار المركبة يزداد حتى تصبح لا نهائية عندما تكون الحبال أفقية.

تحليل قوة معلومة في اتجاهين متعامدين



نفرض أن لدينا قوة $\overrightarrow{ح}$ تؤثر في نقطة مادية (و) ويراد تحليلها إلى مركبتين متعامدتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ حيث اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$ يميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$ بزاوية قياسها هـ في هذه الحالة يؤول متوازي الأضلاع إلى مستطيل، وبتطبيق قانون الجيب على المثلث و أ حـ

يكون : $\frac{ق_1}{جا(٩٠^\circ - هـ)} = \frac{ق_2}{جا\ هـ} = \frac{ح}{جا\ ٩٠^\circ}$ $\therefore \frac{ق_1}{جتا\ هـ} = \frac{ق_2}{جا\ هـ} = ح$

$\therefore ق_1$ (مقدار المركبة في الاتجاه المعلوم) = ح جتا هـ

، $ق_2$ (مقدار المركبة في الاتجاه العمودي على الاتجاه المعلوم) = ح جا هـ

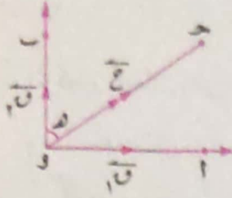
وتسمى المركبة $\overrightarrow{ق_1}$ أحيانًا «مسقط $\overrightarrow{ح}$ في اتجاه $\overrightarrow{و أ}$» وتسمى المركبة $\overrightarrow{ق_2}$ «مسقط $\overrightarrow{ح}$ في اتجاه $\overleftarrow{و ب}$»

ملاحظــات

مقدار المركبة المجاورة للزاوية المعلومة = ح × جتا (هذه الزاوية)

، مقدار المركبة الأخرى العمودية على المركبة السابقة = ح × جا (هذه الزاوية).

ففى الشكل المقابل :

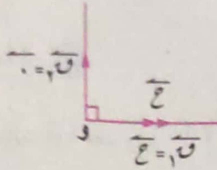


إذا كانت المركبة $\overrightarrow{ق_1}$ تميل على اتجاه $\overrightarrow{ح}$

بزاوية قياسها هـ فإن : $ق_1$ = ح جتا هـ ، $ق_2$ = ح جا هـ

٢ مركبة قوة $\overrightarrow{ح}$ فى اتجاه منطبق على خط عملها = القوة نفسها $\overrightarrow{ح}$

ومركبتها فى اتجاه عمودى على خط عملها = $\overrightarrow{0}$.



لأنه فى هذه الحالة يكون قياس الزاوية

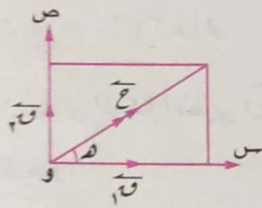
بين اتجاه $\overrightarrow{ح}$ واتجاه المركبة الأولى = $0°$.

فيكون مقدار المركبة الأولى = ح جتا $0°$ = ح × ١ = ح

ومقدار المركبة العمودية على المركبة السابقة = ح جا $0°$ = ح × ٠ = صفر

٣ إذا كان $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجهى وحدة متعامدين فى اتجاهى

$\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و ص}$ حيث و نقطة الأصل



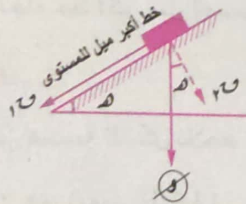
فإن : $\overrightarrow{ق_1}$ = (ح جتا هـ) $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = (ح جا هـ) $\overrightarrow{ص}$

∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2}$ = (ح جتا هـ) $\overrightarrow{س}$ + (ح جا هـ) $\overrightarrow{ص}$

٤ إذا كانت : $\overrightarrow{ق}$ = (ق ، هـ°) فإن : $\overrightarrow{ق}$ = ق جتا هـ° $\overrightarrow{س}$ + ق جا هـ° $\overrightarrow{ص}$

٥ إذا كانت : هـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[فإن كلًّا من مقدارى المركبتين (ح جتا هـ) ، (ح جا هـ) أقل من مقدار القوة (ح) نفسها وذلك لأن هـ ∈]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[وبالتالى ٠ < جا هـ < ١ ، ٠ < جتا هـ < ١

٦ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل على الأفقى



بزاوية قياسها (هـ) فإنه يمكن تحليل الوزن (و) الذى

يؤثر رأسيًا لأسفل إلى مركبتين

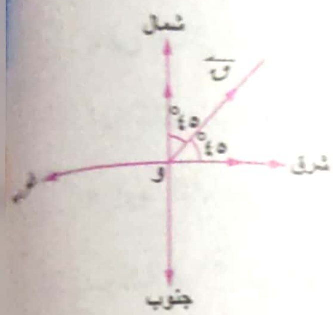
* $ق_1$ (مقدار المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى) = و جا هـ

* $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى) = و جتا هـ

مثال ٣

حلل قوة مقدارها ٨ $\sqrt{2}$ نيوتن تؤثر فى نقطة (و) فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

الحل



∵ المركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين قياساهما ٤٥° ، ٤٥°

وهما متعامدتان.

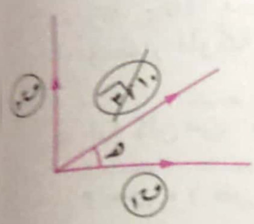
∴ مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ق جتا ٤٥° = ٨ $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٨ نيوتن.

، مقدار المركبة فى اتجاه الشمال = ق جا ٤٥° = ٨ $\sqrt{2}$ × $\frac{1}{\sqrt{2}}$ = ٨ نيوتن.

مثال ٤

حُللت قوة مقدارها ١٠ $\sqrt{3}$ ثقل كجم إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ ثقل كجم فما مقدار المركبة الأخرى؟

الحل



نفرض أن اتجاه المركبة المعلومة المقدار ($\overleftarrow{ق_1}$) يميل على اتجاه القوة بزاوية قياسها هـ

∴ مقدار هذه المركبة $ق_1$ = ١٠ $\sqrt{3}$ جتا هـ

∴ ١٥ = ١٠ $\sqrt{3}$ جتا هـ ∴ جتا هـ = $\frac{15}{10\sqrt{3}}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ هـ = ٣٠°

∴ مقدار المركبة الأخرى $ق_2$ = ١٠ $\sqrt{3}$ جا ٣٠° = ١٠ $\sqrt{3}$ × $\frac{1}{2}$ = ٥ $\sqrt{3}$ ثقل كجم.

حل آخر:

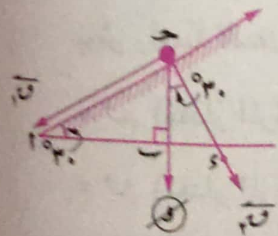
ح = $\sqrt{ق_1^2 + ق_2^2}$ ∴ $(10\sqrt{3})^2 = (15)^2 + ق_2^2$

∴ $ق_2^2$ = ٧٥ ∴ $ق_2$ = ٥ $\sqrt{3}$ ثقل كجم.

مثال ٥

وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

الحل



من هندسة الشكل نلاحظ أن : ق (∠ب حـ ء) = ق (∠ب أ حـ) = ٣٠°

∴ $ق_1$ (مقدار المركبة فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى)

= و جا ٣٠° = ٥٠ × $\frac{1}{2}$ = ٢٥ نيوتن

، $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على المستوى) = و جتا ٣٠° = ٥٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٢٥ $\sqrt{3}$ نيوتن.



من أسئلة الكتاب المدرسي • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

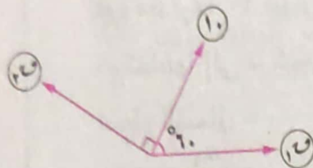
اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) فى الشكل المقابل :

بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتيها

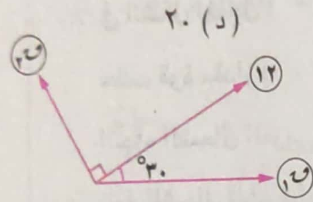
فإن : ق٢ = ... نيوتن.



(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

(٢) إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠° على الترتيب

كما بالشكل المقابل فإن : ق٢ = ... نيوتن.

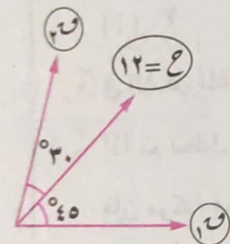


(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٤ $\sqrt{٣}$

(٣) فى الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

فإن : ق١ = ... نيوتن.



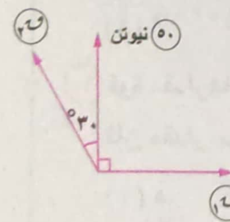
(أ) ١٢ حا ٧٥° (ب) ١٢ حا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قا ٧٥°

(٤) فى الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة التى مقدارها ٥٠ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

فإن : ق١ + ق٢ = ... نيوتن.



(أ) ٥٠ (ب) ٢٥

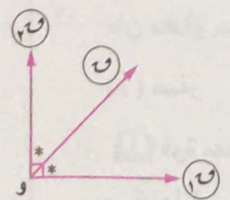
(جـ) ٥٠ $\sqrt{٢}$ (د) ٥٠ $\sqrt{٣}$

(٥) فى الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة $\overleftarrow{ق}$ إلى المركبتين المتعامدتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

وكان متجه القوة $\overleftarrow{ق}$ ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

وكان $\|\overleftarrow{ق_١}\|$ = ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن فإن : $\|\overleftarrow{ق}\|$ = ... نيوتن.



(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٢ (د) ١٢ $\sqrt{٢}$

(٦) في الشكل المقابل :

إذا حُللت القوة التي مقدارها ١٠٠ نيوتن إلى قوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

وكانت القوة مقدرة بالنيوتن فإن : $(ق_١ ، ق_٢)$ = ...

(أ) (٥٠ ، ٥٠ $\sqrt{٣}$) (ب) (٥٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠٠)

(جـ) (٥٠ ، ٥٠) (د) (١٠ ، ١٠)

(٧) في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠ شمال الشرق

ثم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها في

اتجاه الشمال = ... نيوتن.

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠ (د) ٥

(٨) في الشكل المقابل :

حللت قوة مقدارها ٢٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تعمل في

اتجاه الشمال الغربي إلى مركبتين إحداهما مقدارها $ق_١$

نحو الشمال الشرقي والأخرى مقدارها $ق_٢$ نحو الغرب

فإن : $ق_٢$ = ... ث.كجم.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) ٤٠ $\sqrt{٢}$

(٩) في الشكل المقابل :

إذا تم تحليل القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى مركبتين في اتجاهي المحاور الأساسية

فإن مركبة هذه القوة في اتجاه $\overleftarrow{و س}$ تساوي .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) $\frac{٤٠}{٣}$

(١٠) قوة مقدارها ١٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جرام تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب = ... ثقل جرام.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (د) ٥ $\sqrt{٢}$

(١١) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار مركبتها في اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{٢}$ (د) ٦

(١٢) قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل في اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار

مركبتها في اتجاه الشمال الشرقي = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

(١٣) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) $٣\sqrt{٢}$ (جـ) $٢\sqrt{٣}$ (د) صفر

(١٤) قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق يساوى .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $١٥\sqrt{٣}$

(١٥) قوة مقدارها ٨ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق ثم تحليلها إلى مركبتين قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإن مركبتها فى اتجاه الجنوب = ... نيوتن.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) $٨\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٨\sqrt{٣}}{٣}$

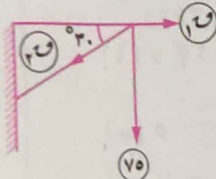
(١٦) قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية مقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار القوة الأخرى = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) $٢٠\sqrt{٣}$ (جـ) $٢٠\sqrt{٥}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

(١٧) بتحليل القوة التى مقدارها ق نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٩٠° من جهتين مختلفتين لخط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ على الترتيب فإن $ق_١$ = ...

(أ) ٢ $ق_٢$ (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $ق_٢$ (جـ) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ $ق_٢$ (د) $\frac{١}{٢}$ $ق_٢$

(١٨) فى الشكل المقابل :

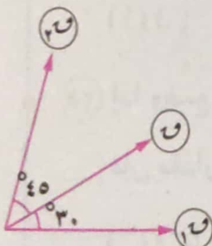


حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن إلى مركبتين إحداهما أفقية $ق_١$ والأخرى $ق_٢$

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ٧٥ (ب) $٧٥\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ (د) $١٥٠\sqrt{٣}$

(١٩) فى الشكل المقابل :



القوة $\overleftarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

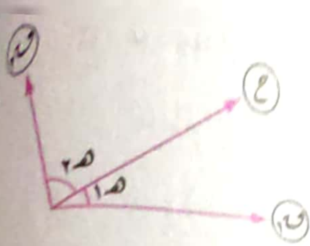
(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{\text{جا } ٧٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(جـ) $\frac{\text{جا } ٤٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$ (د) $\frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٣٠°} + \frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٤٥°}$

(٢٠) أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أ د}$ فإن مقدار مركبتى القوة فى اتجاهى $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ على الترتيب هما ....

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠ (ب) $٥\sqrt{٣}$ ، ١٠ (جـ) ١٠ ، $١٠\sqrt{٣}$ (د) $٢٠\sqrt{٣}$ ، ٢٠

(٢١) فى الشكل المقابل :

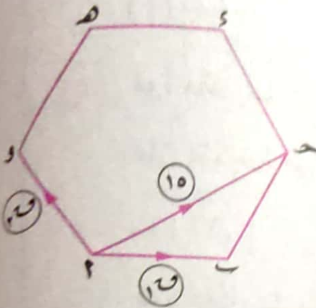


حُللت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١}{ق_٢}$ = ...

(أ) $\frac{جا هـ_٢}{جا هـ_١}$ (ب) جا $\frac{هـ_٢}{هـ_١}$ (جـ) جا (هـ٢ + هـ١) (د) $\frac{جا هـ_١}{جا هـ_٢}$

(٢٢) فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوة ١٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أحـ}$

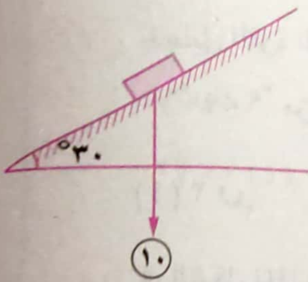
وحُللت إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ كما بالشكل

فإن : ق١ : ق٢ = ...

(أ) $\sqrt{٣}$: ٢ (ب) ٢ : ١

(جـ) ١ : ٢ (د) ١ : $\sqrt{٣}$

(٢٣) فى الشكل المقابل :



إذا وضع جسم وزنه ١٠ نيوتن على مستوى مائل أملس

يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مركبة وزن الجسم

فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل = ... نيوتن.

(أ) ٥ $\sqrt{٢}$ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٥ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

(٢٤) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (θ)

فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و (ب) و جا θ (جـ) و جتا θ (د) و ظا θ

(٢٥) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ)

فإن مقدار مركبة وزنه فى اتجاه عمودى على المستوى هى ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و قتا هـ

(٢٦) إذا وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الرأسى بزاوية قياسها (هـ)

فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه المستوى هى ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و (د) و ظا هـ

(٢٧) جسم وزنه (و) نيوتن موضوع على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) فإذا كانت مركبتا الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه مقدارهما ٧ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإن مقدار الوزن (و) = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٥ (د) ٣١

(٢٨) قاطرة تجر سيارة بقوة ١٢٠٠ نيوتن يراد استبدال القاطرة بقاطرتين عند ب ، حـ مثبتتين بحبلين متصلين بالسيارة وكان قياس الزاوية بين الحبلين ٩٠° فإذا كان أحد الحبلين يميل بزاوية قياسها ٦٠° على القاطرة أ فإن مقدار الشد في كل من الحبلين ب ، حـ هو .... نيوتن.

(أ) ٦٠٠ ، ٦٠٠ (ب) ٨٠٠ ، ٤٠٠ (جـ) ٦٠٠$\sqrt{3}$ ، ٦٠٠ (د) ٧٠٠ ، ٥٠٠

(٢٩) تعطلت سيارة نقل كبيرة فقام رجال المرور بإحضار سيارتين لسحب هذه السيارة بحيث كانت محصلة قوى الشد للسيارتين تمثل بقوة أفقية مقدارها ٦٠٠٠ نيوتن كما بالشكل فإن : ش = ... لأقرب نيوتن.

(أ) ٣١٠٥ (ب) ٣٦٠٦ (جـ) ٤٣٩٢ (د) ٤٢٩٣

(٣٠) في الشكل المقابل :

جسم وزنه (و) نيوتن ، وضع على مستوى مائل يميل على الأفقي بزاوية قياسها (هـ) ، ربط بخيط خفيف $\overline{بحـ}$ يميل على المستوى بزاوية قياسها ٢٠° لأعلى وكان ش$_1$ ، ش$_2$ هما مركبتا الشد في اتجاه المستوى والعمودي على المستوى فإن : ....

(أ) ش$_2$ = ش جتا هـ (ب) ش$_1$ = ش جا (٢٠° + هـ)

(جـ) ش$_1$ = ش جتا (٢٠° + هـ) (د) ش = ش$_1$ قا ٢٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) قوة مقدارها ٦٠٠ ث.جم تؤثر في نقطة مادية. أوجد مركبتيها في اتجاهين يصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥°

«٤٣٩,٢ ، ٣١٠,٦ ث.جم»

2 قوة مقدارها ١٠٠ ثقل جم تعمل في اتجاه الشمال الغربي، احسب مركبتيها في اتجاهي الشمال والغرب.

٥٠ $\sqrt{2}$ ، ٥٠ $\sqrt{2}$ ث جم

3 حللت قوة مقدارها ١٢ ث.كجم تؤثر في اتجاه الشمال الشرقي إلى مركبتين إحداهما نحو الشرق والأخرى نحو الشمال الغربي. أوجد مقدار هاتين المركبتين.

١٢ $\sqrt{2}$ ، ١٢ ث.كجم

4 حلل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث.جم في اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

٨٠ $\sqrt{3}$ ، ٨٠ ث.جم

5 قوة مقدارها ٣٠٠ داين تؤثر في اتجاه الشمال. أوجد مقدار مركبتيها المتعامدتين إذا كانت إحدى هاتين المركبتين تعمل في اتجاه شمال الشرق بزاوية قياسها ٣٠°

١٥٠ ، ١٥٠ $\sqrt{3}$ داين

6 قوة مقدارها ١٨ نيوتن تعمل في اتجاه الجنوب. أوجد مركبتيها في اتجاهي ٦٠° شرق الجنوب ، ٣٠° غرب الجنوب.

٩ ، ٩ $\sqrt{3}$ نيوتن

7 حلل قوة قدرها ٩٠ نيوتن إلى قوتين متساويتين في المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠°

٣٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

8 أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين ، لوزن جسم موضوع على مستوٍ أفقي ومقداره ٨٠ نيوتن إذا علم أن إحداهما تميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° إلى أسفل.

٤٠ ، ٤٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

9 قوتان تؤثران في نقطة وظل الزاوية بينهما يساوي $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ ، إذا علم أن محصلتهما عمودية على الصغرى وأن مقدار المركبة الكبرى يساوي ٣٠ نيوتن. فما هو مقدار كل من المركبة الأخرى والمحصلة ؟

١٥ ، ١٥ $\sqrt{3}$ ، ١٥ نيوتن

10 حلل قوة مقدارها ق نيوتن في اتجاه الشمال إلى مركبتين ، الأولى في اتجاه ٣٠° شمال الشرق ومقدارها ٤٠ نيوتن والثانية في اتجاه الغرب. **أوجد كلًا من :** مقدار القوة ق ومقدار المركبة الثانية.

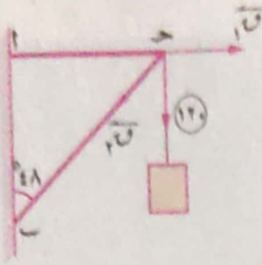
٢٠ ، ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

11 جسم جاسئ وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستوٍ يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مركبتي وزن هذا الجسم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه.

٢١ ، ٢١ $\sqrt{3}$ نيوتن

12 جسم وزنه ٦٠ نيوتن موضوع على مستوٍ مائل يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{3}{4}$ أوجد مقدار مركبتي الوزن في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودي عليه.

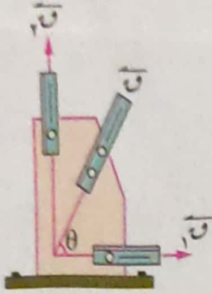
٣٦ ، ٤٨ نيوتن



١٣ فى الشكل المقابل :

حلل القوة الرأسية ١٢٠ ث.جم إلى مركبتين إحداهما فى الاتجاه الأفقى والأخرى فى اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨°

«١٣٣,٢٧ ، ١٧٩,٣٤ ث.جم»

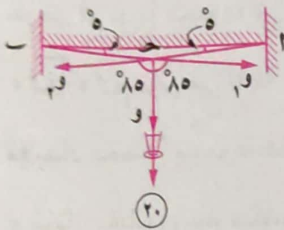


١٤ الشكل المقابل يمثل زاوية فى أحد الكبارى

، القوة $\overrightarrow{ق}$ مقدارها ٣٠ نيوتن ، حُللت إلى مركبتين متعامدتين مقدار إحداهما ١٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

فأوجد مقدار المركبة الأخرى.

«١٥ نيوتن»



١٥ فى الشكل المقابل :

مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بحـ}$ يميلان على الأفقى بزاويتين متساويتين قياس كل منهما ٥°

(١) حلل وزن المصباح فى الاتجاهين $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{بحـ}$

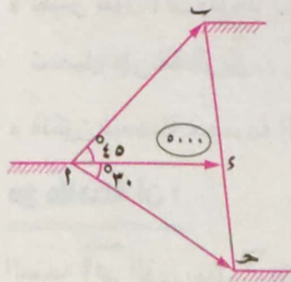
(٢) ماذا يحدث لمقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقى عن ٥° وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدنى أفقيًا ؟ فسر إجابتك.

«١١٤,٧٤ ، ١١٤,٧٤ نيوتن»

---

١٦ مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسئ وزنه ٣٩٠ ث.جم.

أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه. «١٥٠ ، ٣٦٠ ث.جم»



١٧ فى الشكل المقابل :

يراد سحب بارجة بواسطة قاطرتين ب ، حـ تتصلان بحبلين مثبتين فى خُطاف فى نقطة أ من البارجة وقياس الزاوية بينهما ٧٥° ، فإذا كان قياس زاوية ميل أحد الحبلين على $\overleftarrow{أء}$ يساوى ٤٥° وكانت محصلة القوى المبذولة لسحب البارجة تساوى ٥٠٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$.

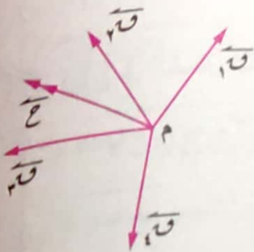
أوجد الشد فى كل من الحبلين.

«٢٥٨٨,٢ ، ٣٦٦٠,٣ نيوتن»

الدرس **3**

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

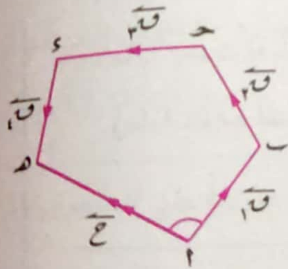
١ الطريقة الهندسية



نفرض أن لدينا مجموعة من القوى المستوية $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ ، $\overleftarrow{ق}_4$ تؤثر فى نقطة م كما فى الشكل المقابل :

فلإيجاد محصلة مجموعة هذه القوى نتبع الخطوات الآتية :

* نختار مقياس رسم مناسب.
* من أى نقطة مثل ا نرسم المتجه $\overleftarrow{اب}$ ليمثل $\overleftarrow{ق}_1$ (مقدارًا واتجاهًا)
* من نقطة ب نرسم المتجه $\overleftarrow{بحـ}$ ليمثل $\overleftarrow{ق}_2$
* من نقطة حـ نرسم المتجه $\overleftarrow{حـء}$ ليمثل $\overleftarrow{ق}_3$
* وأخيرًا من نقطة ء نرسم المتجه $\overleftarrow{ءهـ}$ ليمثل $\overleftarrow{ق}_4$



نصل نقطة البداية (ا) بنقطة النهاية (هـ) فيكون المتجه $\overleftarrow{اهـ}$ ممثلًا للمحصلة $\overleftarrow{ح}$ مقدارًا واتجاهًا حيث أن :

$$\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق}_1 + \overleftarrow{ق}_2 + \overleftarrow{ق}_3 + \overleftarrow{ق}_4$$

* نقيس طول $\overline{اهـ}$ ونوجد ق (د هـ ا ب) لتكون زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى وباستخدام مقياس الرسم نحصل على مقدار $\overleftarrow{ح}$
* فتكون محصلة مجموعة القوى هى قوة مقدارها ح تؤثر فى نقطة م فى اتجاه $\overleftarrow{اهـ}$

مع ملاحظة أن :

المتجه $\overleftarrow{اهـ}$ الذى يمثل $\overleftarrow{ح}$ يكون اتجاهه فى عكس الاتجاه الدورى لباقى المتجهات التى تمثل القوى والمضلع ا ب حـ ء هـ الذى أضلاعه تمثل القوى ومحصلتها يسمى «مضلع القوى».

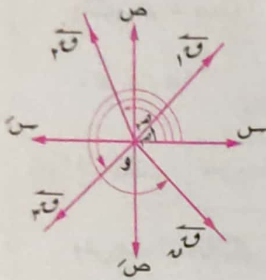
ملاحظـــة

إذا انطبقت نقطة نهاية خط عمل القوة الأخيرة مع نقطة بداية خط عمل القوة الأولى فى مضلع القوى فإن المحصلة $(\overrightarrow{\text{ح}}) = \overrightarrow{0}$ وبالتالى تكون مجموعة القوى متزنة.

أى أن الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هذه القوى هندسيًا بأضلاع مضلع مقفل مأخوذة فى اتجاه دورى واحد.

٢ الطريقة التحليلية

نفرض أن لدينا مجموعة من القوى $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ ، ... ، $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$ المستوية والمتلاقية فى نقطة (و) واعتبرنا أن النقطة (و) هى نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد فى هذا المستوى وكانت هـ_1 ، هـ_2 ، هـ_3 ، ... ، $\text{هـ}_{\text{ن}}$ هى الزوايا القطبية للقوى وكان $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ هما متجها الوحدة فى اتجاهى $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ص}}$ فإن :



$\overrightarrow{\text{ق}}_1 = (\text{ق}_1 ، \text{هـ}_1) = \text{ق}_1 \text{ جتا هـ}_1 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_1 \text{ جا هـ}_1 \overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}}_2 = (\text{ق}_2 ، \text{هـ}_2) = \text{ق}_2 \text{ جتا هـ}_2 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_2 \text{ جا هـ}_2 \overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}}_3 = (\text{ق}_3 ، \text{هـ}_3) = \text{ق}_3 \text{ جتا هـ}_3 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_3 \text{ جا هـ}_3 \overrightarrow{\text{ص}}$

⋮

، $\overrightarrow{\text{ق}}_{\text{ن}} = (\text{ق}_{\text{ن}} ، \text{هـ}_{\text{ن}}) = \text{ق}_{\text{ن}} \text{ جتا هـ}_{\text{ن}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_{\text{ن}} \text{ جا هـ}_{\text{ن}} \overrightarrow{\text{ص}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ق}}_1 + \overrightarrow{\text{ق}}_2 + \overrightarrow{\text{ق}}_3 + \dots + \overrightarrow{\text{ق}}_{\text{ن}}$

فبالجمع ينتج أن : $\overrightarrow{\text{ح}} = (\text{ق}_1 \text{ جتا هـ}_1 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_1 \text{ جا هـ}_1 \overrightarrow{\text{ص}}) + (\text{ق}_2 \text{ جتا هـ}_2 \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_2 \text{ جا هـ}_2 \overrightarrow{\text{ص}}) + \dots$

$+ (\text{ق}_{\text{ن}} \text{ جتا هـ}_{\text{ن}} \overrightarrow{\text{س}} + \text{ق}_{\text{ن}} \text{ جا هـ}_{\text{ن}} \overrightarrow{\text{ص}})$

$= (\text{ق}_1 \text{ جتا هـ}_1 + \text{ق}_2 \text{ جتا هـ}_2 + \dots + \text{ق}_{\text{ن}} \text{ جتا هـ}_{\text{ن}}) \overrightarrow{\text{س}}$

$+ (\text{ق}_1 \text{ جا هـ}_1 + \text{ق}_2 \text{ جا هـ}_2 + \dots + \text{ق}_{\text{ن}} \text{ جا هـ}_{\text{ن}}) \overrightarrow{\text{ص}}$

أى أن $\overrightarrow{\text{ح}} = \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ر}} \text{ جتا هـ}_{\text{ر}}\right) \overrightarrow{\text{س}} + \left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ر}} \text{ جا هـ}_{\text{ر}}\right) \overrightarrow{\text{ص}}$

والمقدار $\left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ر}} \text{ جتا هـ}_{\text{ر}}\right)$ يسمى المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ونرمز له بالرمز س~

، المقدار $\left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{ر}} \text{ جا هـ}_{\text{ر}}\right)$ يسمى المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ونرمز له بالرمز ص~

وعلى ذلك نكتب العلاقة السابقة بالصورة : $\overrightarrow{\text{ح}} = \text{س}\overrightarrow{\text{س}} + \text{ص}\overrightarrow{\text{ص}}$

وبفرض أن ح هى مقدار المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$ ، هـ هى قياس الزاوية القطبية لها

فإن : $\text{ح} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ ، $\text{ظا هـ} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ح}} = (\text{ح} ، \text{هـ})$

ملاحظات

١ لاحظ الفرق بين : س ، $\hat{\text{س}}$

• س = مجموع المركبات الجبرية للقوى فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$

• $\hat{\text{س}}$ = متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$

٢ إذا كانت : $\text{س} = \text{صفر}$ فإن : $\vec{\text{ح}} = \text{ص}\,\hat{\text{ص}}$

وتكون هـ = ٩٠° إذا كانت : $\vec{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$

، هـ = ٢٧٠° إذا كانت : $\vec{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

٣ إذا كانت : $\text{ص} = \text{صفر}$ فإن : $\vec{\text{ح}} = \text{س}\,\hat{\text{س}}$

وتكون هـ = صفر° إذا كانت : $\vec{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$

، هـ = ١٨٠° إذا كانت : $\vec{\text{ح}}$ فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

٤ إذا كانت : $\text{س} = \text{صفر}$ ، $\text{ص} = \text{صفر}$ فإن : $\vec{\text{ح}} = \vec{0}$

وفى هذه الحالة تكون مجموعة القوى متزنة.

٥ عند تعيين اتجاه المحصلة يراعى ما يلى :

س	ص	الربع	هـ
+	+	الأول	قياس الزاوية الحادة
−	+	الثانى	١٨٠° − قياس الزاوية الحادة
−	−	الثالث	١٨٠° + قياس الزاوية الحادة
+	−	الرابع	٣٦٠° − قياس الزاوية الحادة

٦ محصلة عدة قوى $\vec{\text{ق}}_1$ ، $\vec{\text{ق}}_2$ ، $\vec{\text{ق}}_3$ هى : $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{ق}}_1 + \vec{\text{ق}}_2 + \vec{\text{ق}}_3$

وإذا كان $\vec{\text{ح}} = \vec{0}$ فإن مجموعة القوى تكون متزنة

فمثلا : إذا كانت : $\vec{\text{ق}}_1 = 5\,\hat{\text{س}} + 2\,\hat{\text{ص}}$ ، $\vec{\text{ق}}_2 = -6\,\hat{\text{س}} + 3\,\hat{\text{ص}}$

، $\vec{\text{ق}}_3 = \hat{\text{س}} - 5\,\hat{\text{ص}}$ فإن : $\vec{\text{ح}} = \vec{\text{ق}}_1 + \vec{\text{ق}}_2 + \vec{\text{ق}}_3 = \vec{0}$

∴ القوى تكون متزنة.

مثال ١

إذا كانت القوى $\overline{ق}_1 = ٥ \overline{س} - ٤ \overline{ص}$ ، $\overline{ق}_2 = -٦ \overline{س} + أ \overline{ص}$

، $\overline{ق}_3 = ب \overline{س} + ٧ \overline{ص}$ متلاقية فى نقطة ومتزنة أوجد قيمة كل من : أ ، ب

الحل

∵ القوى متزنة. ∴ $\overline{ق}_1 + \overline{ق}_2 + \overline{ق}_3 = \overline{٠}$

∴ $(٥ \overline{س} - ٤ \overline{ص}) + (-٦ \overline{س} + أ \overline{ص}) + (ب \overline{س} + ٧ \overline{ص}) = \overline{٠}$

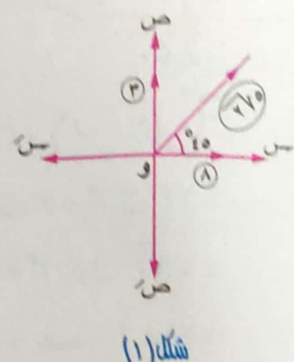
∴ $(-١ + ب) \overline{س} + (٣ + أ) \overline{ص} = \overline{٠}$ ∴ $-١ + ب = ٠$

∴ ب = ١ ، ٣ + أ = ٠ . ∴ أ = -٣

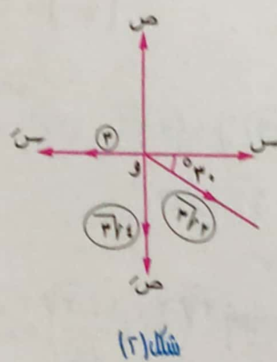
مثال ٢

فى كل من الأشكال الثلاثة التالية مجموعة من القوى متلاقية فى (و) ومقدرة بوحدة النيوتن.

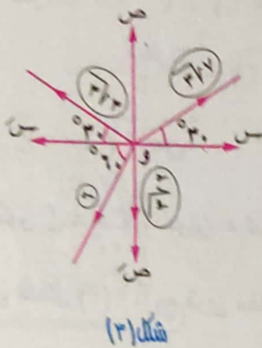
عيّن مقدار واتجاه محصلة كل منها.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

الحل

فى شكل (١) :

القوى الثلاث مقاديرها ٨ ، $٥\sqrt{٢}$ ، ٣ نيوتن وزواياها القطبية ٠° ، ٤٥° ، ٩٠°

على الترتيب والمجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$

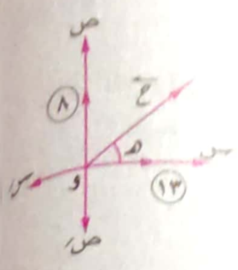
أى س = ٨ جتا ٠° + $٥\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٣ جتا ٩٠°

$= ٨ \times ١ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ \times$ صفر $= ٨ + ٥ + ٠ = ١٣$ نيوتن.

، المجموع الجبرى للمركبات فى اتجاه $\overrightarrow{و ص}$

أى ص = ٨ جا ٠° + $٥\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٣ جا ٩٠°

$= ٨ \times ٠ + ٥\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٣ \times ١ = ٠ + ٥ + ٣ = ٨$ نيوتن.



∴ $\overleftarrow{ح}$ = ١٣ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$

ويكون ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{١٦٩ + ٦٤}$ = $\sqrt{٢٣٣}$

∴ ح ≃ ١٥,٢٦٤ نيوتن ، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٨}{١٣}$ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ $\overleftarrow{ح}$ تقع فى الربع الأول وباستخدام حاسبة الجيب ∴ هـ ≃ ٣١° ٣٦َ

∴ $\overleftarrow{ح}$ مقدارها ١٥,٢٦٤ نيوتن وقياس زاويتها القطبية ٣١° ٣٦َ

فى شكل (٢) : ثلاث قوى مقاديرها ٣ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وزواياها القطبية هى ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٣٠° على الترتيب.

∴ س = ٣ جتا ١٨٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٣٠°

= ٣ × (−١) + ٤ $\sqrt{٣}$ × ٠ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = −٣ + ٠ + ٣ = ٠

، ص = ٣ جا ١٨٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٣٣٠°

∴ ص = ٣ × ٠ + ٤ $\sqrt{٣}$ × (−١) + ٢ $\sqrt{٣}$ × $(-\frac{١}{٢})$

= ٠ − ٤ $\sqrt{٣}$ − $\sqrt{٣}$ = −٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ $\overleftarrow{ح}$ = −٥ $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{ص}$

ويكون ح = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، هـ = ٢٧٠°

فى شكل (٣) : أربع قوى مقاديرها ٧ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ ، ٦ ، ٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن وزواياها القطبية هى ٣٠° ، ١٥٠° ، ٢٤٠° ، ٢٧٠° على الترتيب.

∴ س = ٧ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٣ $\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠° + ٦ جتا ٢٤٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

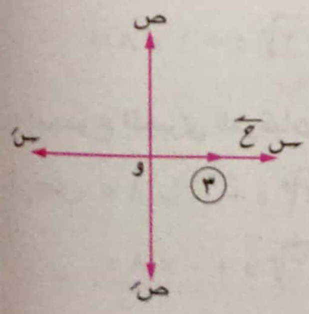
= ٧ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٣ $\sqrt{٣}$ × $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢})$ + ٦ × $(-\frac{١}{٢})$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ٠

= ١٠,٥ − ٤,٥ − ٣ + ٠ = ٣ نيوتن.

، ص = ٧ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٣ $\sqrt{٣}$ جا ١٥٠° + ٦ جا ٢٤٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

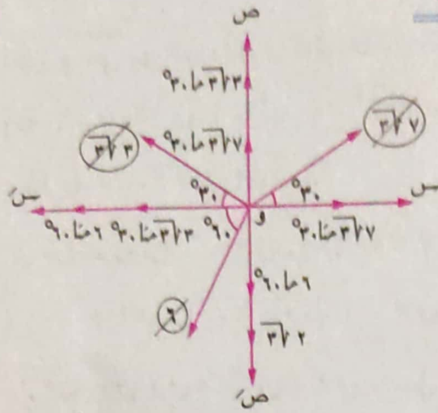
∴ ص = ٧ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٣ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٦ × $(-\frac{\sqrt{٣}}{٢})$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × (−١)

= $\frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ − ٣ $\sqrt{٣}$ − ٢ $\sqrt{٣}$ = صفر



∴ $\overleftarrow{ح}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ وتكون ح = ٣ نيوتن ، هـ = ٠°

حل آخر (شكل (٣)) باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين :



∵ س = ٧√٣ جتا ٣٠° − ٣√٣ جتا ٣٠° − ٦ جتا ٦٠°

= ٧√٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٣√٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٦ × $\frac{١}{٢}$

= ٣ نيوتن.

، ص = ٣√٣ جا ٣٠° + ٧√٣ جا ٣٠° − ٦ جا ٦٠° − ٢√٣

= ٣√٣ × $\frac{١}{٢}$ + ٧√٣ × $\frac{١}{٢}$ − ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ − ٢√٣ = صفر

∴ ح = $\sqrt{(٣)^٢ + (٠)^٢}$ = ٣ نيوتن ، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{صفر}{٣}$ = صفر ∴ هـ = ٠°

مثال ٣

خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥√٢ ، ٧√٢ ، ٧ ث.كجم. تعمل فى اتجاهات : الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى متزنة.

الحل

∵ القوى هى :

(١٢ ، ٠°) ، (٩ ، ٩٠°) ، (٥√٢ ، ١٣٥°) ، (٧√٢ ، ٢٢٥°) ، (٧ ، ٢٧٠°)

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ٩ جتا ٩٠° + ٥√٢ جتا ١٣٥°

+ ٧√٢ جتا ٢٢٥° + ٧ جتا ٢٧٠°

= ١٢ × ١ + صفر + ٥√٢ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ + ٧√٢ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ + صفر

= ١٢ − ٥ − ٧ = صفر

، ص = ١٢ جا ٠° + ٩ جا ٩٠° + ٥√٢ جا ١٣٥° + ٧√٢ جا ٢٢٥° + ٧ جا ٢٧٠°

= صفر + ٩ × ١ + ٥√٢ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧√٢ $\left(\frac{-١}{\sqrt{٢}}\right)$ + ٧ (−١) = ٩ + ٥ − ٧ − ٧ = صفر

∵ س = صفر ، ص = صفر ∴ $\vec{ح} = \vec{٠}$ ∴ المجموعة متزنة.

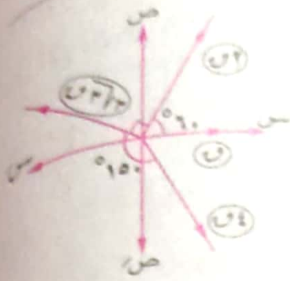
مثال ٤

أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق ، ٢ ق ، ٣√٣ ق ، ٤ ق ث.كجم

والزاوية بين اتجاهى الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى الثالثة والرابعة ١٥٠°

أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل



نعتبر $\overleftarrow{\text{و س}}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون القوى فى الصورة القطبية :

(ق ، ٠°) ، (٢ق ، ٦٠°) ، (٣$\sqrt{٣}$ ق ، ١٥٠°)

، (٤ق ، ٣٠٠°) على الترتيب.

∴ س = ق حتا ٠° + ٢ق حتا ٦٠° + ٣$\sqrt{٣}$ ق حتا ١٥٠°

+ ٤ق حتا ٣٠٠° = ق × ١ + ٢ق × $\frac{١}{٢}$ + ٣$\sqrt{٣}$ ق $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ + ٤ق × $\frac{١}{٢}$

∴ س = ق + ق − $\frac{٩}{٢}$ ق + ٢ق = − $\frac{١}{٢}$ ق

، ص = ق جا ٠° + ٢ق جا ٦٠° + ٣$\sqrt{٣}$ ق جا ١٥٠° + ٤ق جا ٣٠٠°

= ق × ٠ + ٢ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٣$\sqrt{٣}$ ق × $\frac{١}{٢}$ + ٤ق × $\left(-\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$

= ٠ + $\sqrt{٣}$ ق + $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ق − ٢$\sqrt{٣}$ ق = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق

∴ $\overleftarrow{\text{ح}}$ = − $\frac{١}{٢}$ ق $\overleftarrow{\text{س}}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق $\overleftarrow{\text{ص}}$

∴ ح = $\sqrt{\frac{١}{٤}\text{ق}^٢ + \frac{٣}{٤}\text{ق}^٢}$ = $\sqrt{\text{ق}^٢}$ ∴ ح = ق

، ظا هـ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = $\frac{\sqrt{٣}\text{ق}}{٢}$ × − $\frac{٢}{\text{ق}}$ = − $\sqrt{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ هـ = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

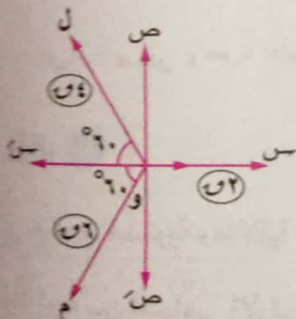
أى أن المحصلة مقدارها ق وتقع بين القوتين الثانية والثالثة وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع القوة الثالثة.

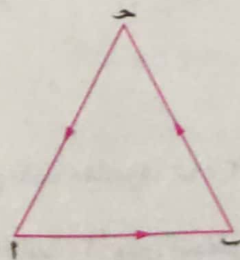
- حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.

مثال ٥

ثلاث قوى مقاديرها ٢ق ، ٤ق ، ٦ق تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

الحل





نفرض أن القوى تؤثر فى نقطة و فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{و م}}$ الموازية على الترتيب لاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ فى المثلث المتساوى الأضلاع أ ب حـ فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(٢ق ، ٠°) ، (٤ق ، ١٢٠°) ، (٦ق ، ٢٤٠°)

∴ س = ٢ ق جتا ٠° + ٤ ق جتا ١٢٠° + ٦ ق جتا ٢٤٠°

= ٢ ق × ١ + ٤ ق × (-١/٢) + ٦ ق × (-١/٢) = -٣ ق

، ص = ٢ ق جا ٠° + ٤ ق جا ١٢٠° + ٦ ق جا ٢٤٠°

= ٢ ق × ٠ + ٤ ق × √٣/٢ + ٦ ق × (-√٣/٢) = - ق √٣

∴ ح⃖ = -٣ ق س⃖ - ق √٣ ص⃖

∴ ح = √(س² + ص²) = √((-٣ ق)² + (- ق √٣)²) = √(١٢ ق²) = ٢ √٣ ق

، ظا هـ = ص/س = (- ق √٣)/(-٣ ق) = ١/√٣ ∴ هـ = ٣٠° أو ٢١٠°

، ∵ س ، ص سالبتان. ∴ هـ = ٢١٠°

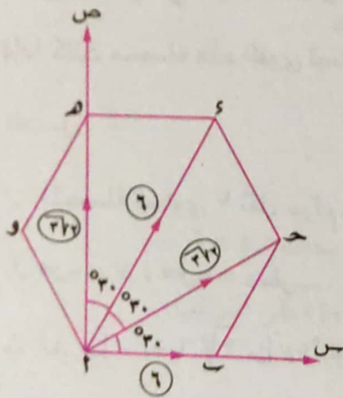
أى أن المحصلة مقدارها ٢ √٣ ق وتقع بين القوتين ٦ ق ، ٤ ق وتميل بزاوية قياسها ٣٠° مع القوة ٦ ق

• **حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين.**

مثال ٦

أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢ √٣ ، ٦ ، ٢ √٣ نيوتن فى أب⃖ ، أحـ⃖ ، أء⃖ ، أهـ⃖ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل



نعتبر و س⃖ هو اتجاه القوة الأولى

فتكون القوى فى الصورة القطبية هى :

(٦ ، ٠°) ، (٢ √٣ ، ٣٠°) ، (٦ ، ٦٠°) ، (٢ √٣ ، ٩٠°)

∴ س = ٦ جتا ٠° + ٢ √٣ جتا ٣٠° + ٦ جتا ٦٠° + ٢ √٣ جتا ٩٠°

= ٦ × ١ + ٢ √٣ × √٣/٢ + ٦ × ١/٢ + ٢ √٣ × ٠ = ١٢ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٠° + ٢ √٣ جا ٣٠° + ٦ جا ٦٠° + ٢ √٣ جا ٩٠°

= ٦ × صفر + ٢ √٣ × ١/٢ + ٦ × √٣/٢ + ٢ √٣ × ١ = ٦ √٣ نيوتن.

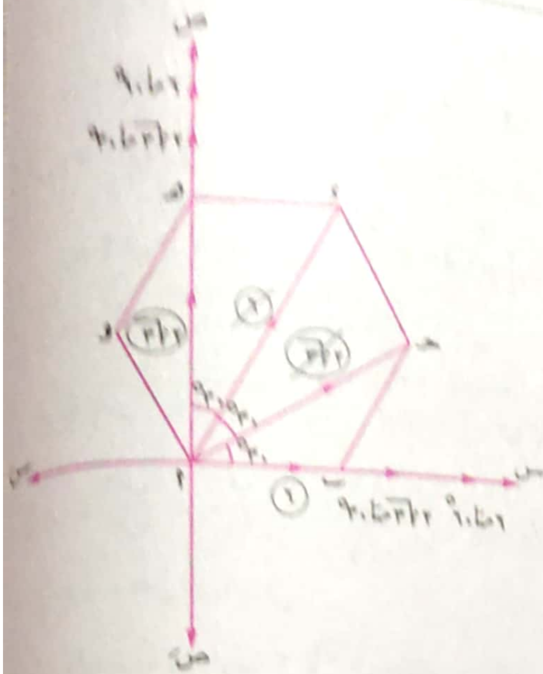
∴ ح = √(س² + ص²) = √((١٢)² + (٦ √٣)²) = ٦ √٧ نيوتن.

، ظا هـ = ص/س = ٦√٣/١٢ = √٣/٢

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ق(∠ هـ) ≈ ٤٠° ٥٣َ ٣٦ً

أى أن المحصلة مقدارها ٦ √٧ نيوتن وتقع بين أحـ⃖ ، أء⃖ وتصنع زاوية قياسها ١٠° ٥٣َ ٣٦ً مع أحـ⃖

حل آخر : باستخدام تحليل القوى في اتجاهين متعامدين :



∴ س = ٦ جتا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٦

= ٦ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٦ = ١٢ نيوتن،

، ص = ٦ جا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٢ $\sqrt{٣}$

= ٦ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

∴ ح = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٦\sqrt{٣})^٢}$ = ٦ $\sqrt{٧}$ نيوتن.

، ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٦\sqrt{٣}}{١٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ق (د هـ) = ٣٦ ٥٣ ٤٠°

أى أن المحصلة مقدارها ٦ $\sqrt{٧}$ نيوتن وتقع بين أ ج ، أ ء وتصنع زاوية قياسها ٣٦ ٥٣ ١٠° مع أ ج

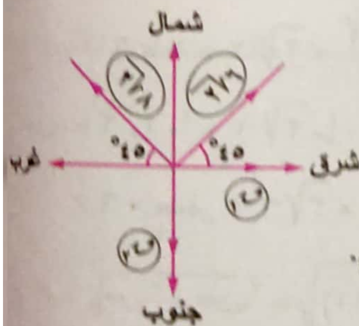
مثال ٧

أربع قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ق١ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ٨ $\sqrt{٢}$ ، ق٢ ثقل جرام والقوة الأولى في اتجاه الشرق والثانية في اتجاه الشمال الشرقي والثالثة في اتجاه الشمال الغربي والرابعة تؤثر في اتجاه الجنوب، فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر في اتجاه الشرق. **فأوجد قيمة كل من : ق١ ، ق٢**

الحل

∵ المحصلة تساوى ٧ ثقل جرام وفي اتجاه الشرق.

∴ س = ٧ ، ص = صفر



∴ ق١ جتا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٨ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° + ق٢ جتا ٢٧٠° = ٧

∴ ق١ × ١ + ٦ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٨ $\sqrt{٢}$ × $\left(-\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ + ق٢ × صفر = ٧

∴ ق١ + ٦ − ٨ = ٧   ∴ ق١ = ٩ ثقل جرام.

، ق١ جا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٨ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° + ق٢ جا ٢٧٠° = صفر

∴ ق١ × صفر + ٦ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٨ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ق٢ × (−١) = صفر

∴ ٦ + ٨ − ق٢ = صفر   ∴ ق٢ = ١٤ ثقل جرام.

- حاول حل هذا المثال باستخدام تحليل القوى في اتجاهين متعامدين.

مثال ٨

خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ق ، ٩ ، ٥$\sqrt{٢}$ ، ٧$\sqrt{٢}$ ، ك ث.كجم وكان قياس الزاوية بين القوة الأولى والثانية ٩٠° وبين القوة الثانية والثالثة ٤٥° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° وبين الرابعة والخامسة ٤٥°

فإذا كانت مجموعة القوى متزنة. **أوجد قيمة كل من : ق ، ك**

الحل

نعتبر و س← في اتجاه القوة الأولى فتكون القوى في الصورة القطبية هي :

(ق ، ٠°) ، (٩ ، ٩٠°) ، (٥$\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

، (٧$\sqrt{٢}$ ، ٢٢٥°) ، (ك ، ٢٧٠°)

، ∵ القوى متزنة

∴ س = ص = ٠

، ∵ س = ق جتا ٠° + ٩ جتا ٩٠° + ٥$\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° + ٧$\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ك جتا ٢٧٠°

∴ ق + ٩ × ٠ + ٥$\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧$\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ك × صفر = ٠

∴ ق = ١٢

، ∵ ص = ق جا ٠° + ٩ جا ٩٠° + ٥$\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° + ٧$\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ك جا ٢٧٠°

∴ ١٢ × ٠ + ٩ × ١ + ٥$\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٧$\sqrt{٢}$ × $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ك × −١ = صفر

∴ ك = ٧

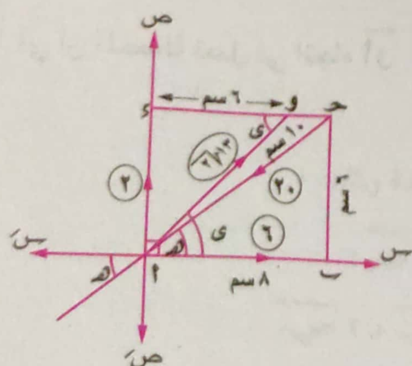
مثال ٩

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ٦ سم ، و ∈ حـ ء بحيث و ء = ٦ سم

أثرت القوى التي مقاديرها ٦ ، ٢٠ ، ١٣$\sqrt{٢}$ ، ٢ نيوتن في أ ب ، حـ أ ، أ و ، أ ء على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل



في Δ أ ب حـ :

∵ (أ حـ)² = (٦)² + (٨)² = ١٠٠ ∴ أ حـ = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

، ∵ Δ أ و ء متساوي الساقين. ∴ ق(∠ى) = ٤٥°

ونعتبر أ ب هو اتجاه القوة الأولى وفي اتجاه متجه الوحدة س

وتكون الزوايا القطبية للقوى كالآتي : صفر° ، ١٨٠° + هـ ، ى ، ٩٠° على الترتيب.

$\therefore$ س = ٦ حتا ٠° + ٢٠ حتا (١٨٠° + هـ) + ١٣ $\sqrt{٢}$ حتا ى + ٢ حتا ٩٠°

= ٦ حتا ٠° − ٢٠ حتا هـ + ١٣ $\sqrt{٢}$ حتا ٤٥° + ٢ حتا ٩٠°

= ٦ × ١ − ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ + ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ × صفر = ٣ نيوتن.

، ص = ٦ جا ٠° + ٢٠ جا (١٨٠° + هـ) + ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ى + ٢ جا ٩٠°

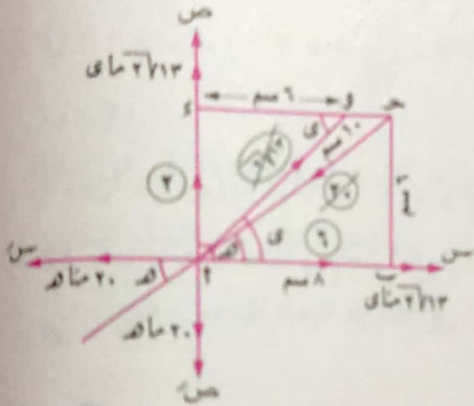
= ٦ جا ٠° − ٢٠ جا هـ + ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٢ جا ٩٠°

= ٦ × ٠ − ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ × ١ = ٣ نيوتن.

$\therefore$ ح = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، طا ل = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣}{٣}$ = ١

، $\because$ س > ٠ ، ص > ٠ . $\therefore$ ق(∠ل) = ٤٥° أى أن المحصلة فى اتجاه $\overleftrightarrow{أو}$

حل آخر : باستخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين :



من فيثاغورس : أ حـ = ١٠ سم

$\therefore$ جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، حتا هـ = $\frac{٨}{١٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

، $\because$ Δ أ و د متساوى الساقين.

$\therefore$ ق(∠ى) = ٤٥°

$\therefore$ س = ١٣ $\sqrt{٢}$ حتا ى + ٦ − ٢٠ حتا هـ

= ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦ − ٢٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣ نيوتن.

، ص = ١٣ $\sqrt{٢}$ جا ى + ٢ − ٢٠ جا هـ = ١٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ − ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣ نيوتن.

$\therefore$ ح = $\sqrt{(٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

، طا ل = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ، $\because$ س > ٠ ، ص > ٠ . $\therefore$ ق(∠ل) = ٤٥°

أى أن المحصلة تعمل فى اتجاه $\overleftrightarrow{أو}$

على محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى ● تذكر ● فهم ● تطبيق ● مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(حيث $\vec{س}$ ، $\vec{ص}$ متجها وحدة أساسيان فى اتجاهين متعامدين)

① إذا كان : $\vec{ق}_1 = \vec{س} - \vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = 2\vec{س} - 4\vec{ص}$

، محصلتهما $\vec{ح} = 2أ\,\vec{س} - 3ب\,\vec{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) $3\frac{1}{3}$ (جـ) $3\frac{1}{6}$ (د) ١٢

② إذا كان : $\vec{ق}_1 = 3\vec{س} - 2\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = أ\,\vec{س} - \vec{ص}$ ، $\vec{ق}_3 = 4\vec{س} - ب\,\vec{ص}$

، محصلتهم $\vec{ح} = 6\vec{س} - 4\vec{ص}$ فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

③ إذا كان : $\vec{ق}_1 = 4\vec{س}$ ، $\vec{ق}_2 = 8\vec{س} - 5\vec{ص}$ فإن : $\|\vec{ح}\|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{73}$

④ إذا كانت : $\vec{ق}_1 = 3\vec{س} + 2\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = أ\,\vec{س} + 7\vec{ص}$

، $\vec{ق}_3 = -12\vec{س} + ب\,\vec{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة

$\vec{ح} = (6\sqrt{2} ، \frac{3}{4}\pi)$ فإن : أ − ب = ...

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) صفر (د) ٦

⑤ إذا أثرت القوى : $\vec{ق}_1 = 6\vec{س} + 7\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = أ\,\vec{س} - 9\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_3 = 5\vec{س} + ب\,\vec{ص}$

فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : أ + ٢ب = ...

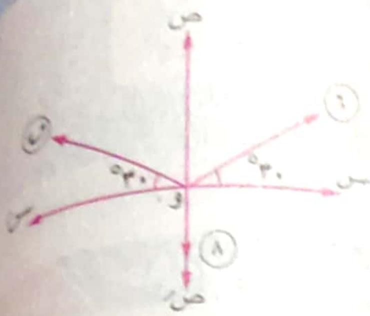
(أ) −٩ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٧

⑥ إذا كانت $\vec{ق}_1$ ، $\vec{ق}_2$ ، $\vec{ق}_3$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت :

$\vec{ق}_1 = 2\vec{س} - 3\vec{ص}$ ، $\vec{ق}_2 = 3\vec{س} + 5\vec{ص}$ فإن : $\vec{ق}_3$ = ...

(أ) $-5\vec{س} - 2\vec{ص}$ (ب) $-5\vec{س} + 2\vec{ص}$

(جـ) $5\vec{س} + 2\vec{ص}$ (د) $5\vec{س} - 2\vec{ص}$



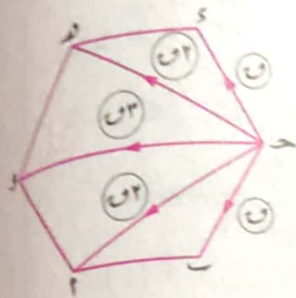
(٧) إذا كانت محصلة القوى الموضحة

بالشكل المقابل تؤثر في محور الصادات

فإن : ق = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

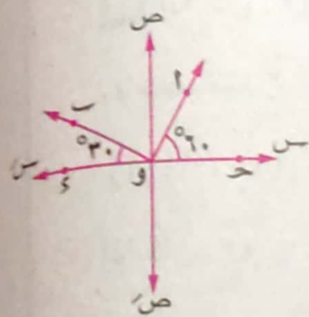


(٨) محصلة القوى في الشكل المقابل

تؤثر في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{حـ ء}$ (ب) $\overleftarrow{حـ هـ}$

(جـ) $\overleftarrow{حـ و}$ (د) $\overleftarrow{حـ أ}$



(٩) في الشكل المقابل :

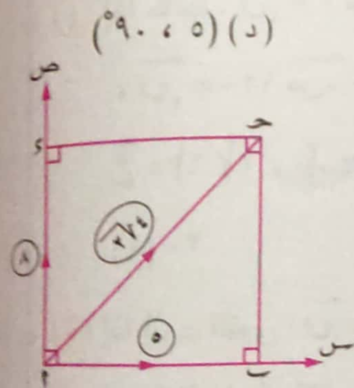
أربع قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن

وتؤثر في النقطة و في اتجاهات $\overleftarrow{و س}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ ، $\overleftarrow{و ص}$

، ق (∠ أ و حـ) = ٦٠° ، ق (∠ ب و ء) = ٣٠°

فإن مقدار واتجاه محصلة القوى يساوي ....

(أ) (٤ ، ١٨٠°) (ب) (٤ ، ٠°) (جـ) (٣ ، ٠°) (د) (٥ ، ٩٠°)



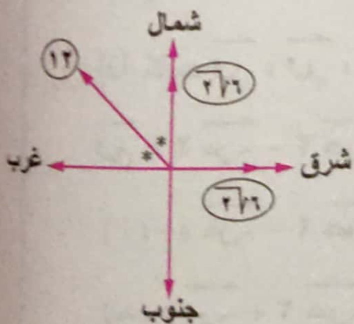
(١٠) في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مربع أثرت القوى ٥ ، ٨ ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن

في الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ على الترتيب

فإن المحصلة في الصورة القطبية هي ....

(أ) (٥ ، ٥٤°) (ب) (١٥ ، ٦٠°) (جـ) (١٥ ، ٥٣° ٨َ) (د) (١٣ ، ٩٠°)



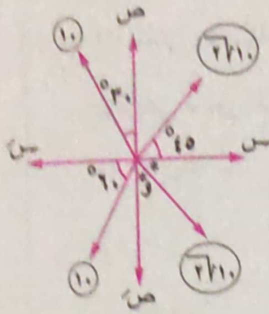
(١١) في الشكل المقابل :

تكون محصلة القوى في اتجاه ....

(أ) الجنوب. (ب) الشرق.

(جـ) الغرب. (د) الشمال.

(١٢) في الشكل المقابل :

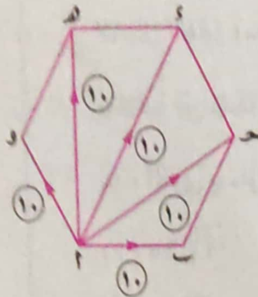


محصلة القوى (ح) = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ١٠ (د) صفر

(١٣) في الشكل المقابل :



أثرت خمس قوى متساوية في المقدار ومقدار كل منها

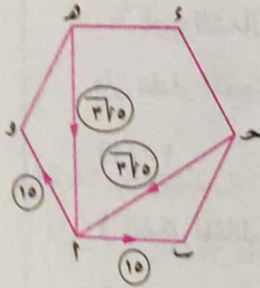
١٠ نيوتن في أحد رؤوس سداسي منتظم وفي اتجاهات

النقط الأخرى للسداسي فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن.

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠

(جـ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ + ١٠ $\sqrt{٣}$

(١٤) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم

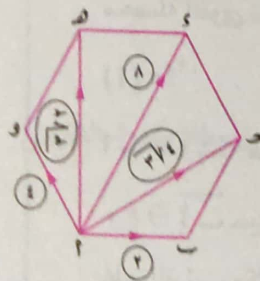
أثرت القوى ١٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥ نيوتن

على الترتيب في الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـأ}$ ، $\overleftarrow{هـأ}$ ، $\overleftarrow{أو}$

فإن : مقدار المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

(١٥) في الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم

تؤثر القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ثقل كجم

في الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب

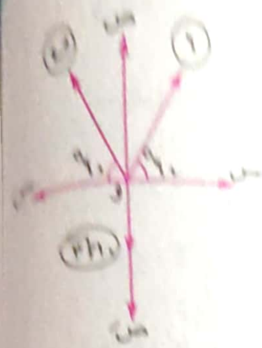
أولًا : مقدار محصلة القوى = ... ث.كجم.

(أ) (١٤ + ٦ $\sqrt{٣}$) (ب) ٢٠

(جـ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) (٢٠ + $\sqrt{٣}$)

ثانيًا : اتجاه محصلة هذه القوى تميل على $\overleftarrow{أب}$ بزاوية قياسها ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

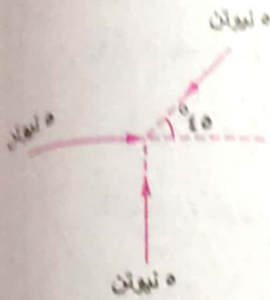


(١٦) إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل تؤثر فى محور السينات

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٤

(جـ) ١٨ (د) ٦



(١٧) الشكل المقابل يمثل عدة قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار محصلة هذه القوى يساوى .... نيوتن.

(أ) $١٥ \sqrt{٢}$ (ب) ٥

(جـ) $٥ \sqrt{٢} - ٥$ (د) صفر

(١٨) ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة مقاديرها ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن تؤثر فى نقطة الأولى فى اتجاه ٦٠° غرب الشمال والثانية فى اتجاه الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° شمال الشرق

فإن مقدار المحصلة يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ١١٠ (جـ) ٦٠ (د) ٥٠

(١٩) فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٤ سم ، ب حـ = ٣ سم

أثرت القوى ٤ ، ١٠ ، ٦ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب

محصلة القوى تصنع مع $\overline{أ ب}$ زاوية قياسها ....

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٣٠° (د) $جا^{-١} \left(\frac{٣}{٥}\right)$

(٢٠) أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه : أ ء = حـ ء = ٤ سم ، أ ب = ٧ سم

، م ∈ $\overline{أ ب}$ حيث أ م = ٤ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، $١٥ \sqrt{٢}$ ث.جم فى $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ م}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$

على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٤٥ ث.جم فإن : ق = ... ث.جم.

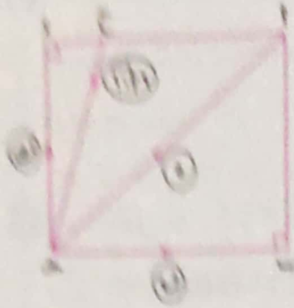
(أ) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

(٢١) أثرت قوى مقاديرها ق ، ١٢ ، $٨ \sqrt{٢}$ ، $١٠ \sqrt{٢}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب

وكان مقدار محصلة القوى = ٤ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق - ك = ...

(أ) ٢٤ (ب) ٢٧ (جـ) ١٢ (د) ٦

٢٢ فى الشكل المقابل :



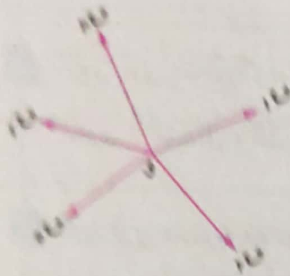
أثرت قوى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، $6\sqrt{10}$ فى المستطيل أ ب حـ ء فى الاتجاهات حـ ب ، حـ أ ، حـ ء ، ج حـ بحيث أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم ، أ ج = ٦ سم فإذا كانت مجموعة القوى متزنة فإن : ك = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

٢٣ أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم فى نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° إذا كانت المجموعة فى حالة اتزان فإن : ق + ٢ ك = ... ث.كجم

(أ) ٢١ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٥

٢٤ الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة (و) قام محمد باتخاذ إحداثيات متعامدة مركزها النقطة (و) والاتجاه الموجب لمحور س ينطبق على $\overrightarrow{ق_1}$ فكان مقدار المحصلة $ح_1$ وتصنع زاوية قياسها (θ_1) مع الاتجاه الموجب لمحور س وقام إبراهيم باتخاذ إحداثيات متعامدة مركزها النقطة (و) والاتجاه الموجب لمحور س ينطبق على القوة $\overrightarrow{ق_2}$ فكان مقدار المحصلة $ح_2$ وتصنع زاوية قياسها (θ_2) مع الاتجاه الموجب لمحور س فإن : ....



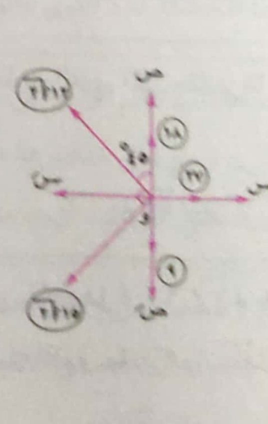
(أ) $ح_1 = ح_2$ ، $\theta_1 = \theta_2$ (ب) $ح_1 = ح_2$ ، $\theta_1 \neq \theta_2$

(جـ) $ح_1 \neq ح_2$ ، $\theta_1 = \theta_2$ (د) $ح_1 \neq ح_2$ ، $\theta_1 \neq \theta_2$

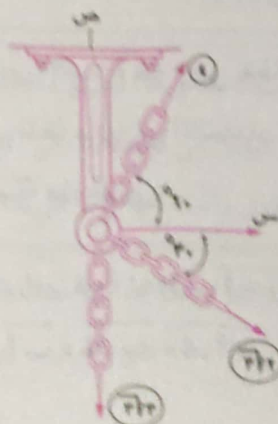
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المؤثرة فى كل شكل من الشكلين الآتيين (علمًا بأن القوى المعطاة مقدرة بالنيوتن) :

(١)



(٢)



المسموحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١ ، ٢ ، $\sqrt{3}$٢ نيوتن تؤثر فى نقطة م واتجاهاتها هى $\overrightarrow{م أ}$ ، $\overrightarrow{م ب}$ ، $\overrightarrow{م حـ}$ على الترتيب حيث ق (∠ أ م ب) = ٦٠° ، ق (∠ ب م حـ) = ٣٠° ، ق (∠ أ م حـ) = ٩٠°

أوجد المحصلة. «٤ نيوتن ، فى اتجاه ...»

---

٣ أثرت القوى ٨ ، ٤ ، $\sqrt{3}$٤ ، $\sqrt{3}$٦ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ... وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه ... مقدارًا واتجاهًا. «٤ نيوتن ، فى اتجاه القوة الر...»

---

٤ تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها ٢ ، $\sqrt{2}$٣ ، $\sqrt{3}$٢ ، $\sqrt{3}$ نيوتن فى نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقو... الرابعة ١٢٠° مأخوذة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى. «$\sqrt{13}$ نيوتن ، ١١° ١٩َ مع القوة الثا...»

---

٥ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ٩ ، ٦ ، $\sqrt{2}$٤ ، ٥ ، $\sqrt{2}$٥ ، ٥ نيوتن وتعمل فى اتجا... الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى متز...

---

٦ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ ث.جم تؤثر فى نقطة ، الأولى نحو الشمال والثانية فى اتج... ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

«٢٨ ث.جم ، ٣٠° جنوب الغر...»

---

٧ أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة مادية ، الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق والثانيـة مقدارها ٢ نيوتن وتـؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال والثالثة مقدارها ٥ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب والراب... مقدارها $\sqrt{3}$٣ نيوتن فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٤ نيوتن ، ١٢٠ ...»

---

٨ أثرت قوى مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساو... الأضلاع فى ترتيب دورى واحد. أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا. «$\sqrt{3}$ ق نيوتن ، عمودية على القوة ٣ ق»

---

٩ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع فيه م هى نقطة تلاقى المتوسطات. أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overrightarrow{م حـ}$ ، $\overrightarrow{م ب}$ ، $\overrightarrow{م أ}$

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «$\sqrt{3}$٥ نيوتن ، ٣٠° مع $\overrightarrow{م أ}$»

---

١٠ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : ق (∠ ب أ حـ) = ١٢٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٤ ، $\sqrt{3}$٦ ، ٤ نيوتن فى نقطة أ فى اتجاهات $\overrightarrow{أ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ على الترتيب. أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا.

«$\sqrt{3}$١٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{حـ ب}$»

١١ أربع قوى مقاديرها ٢ ، ١ ، ٤ ، ٣ $\sqrt{3}$ ٣ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية أ وتعمل فى اتجاهات ب ح ، ب أ ، ح أ ، أ ء على الترتيب حيث أ ب ح مثلث متساوى الأضلاع ، ء منتصف ب ح

أوجد مقدار المحصلة واتجاهها. «١ نيوتن فى اتجاه أ ح»

---

١٢ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٤ سم ، ب ح = ٣ سم ، أثرت القوى الثلاث ٢ ، ٥ ، ٣ ثقل كجم فى نقطة أ فى اتجاهات أ ب ، أ ح ، أ ء على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى وقياس زاوية ميلها على أ ب

«٦ $\sqrt{2}$ ثقل كجم ، ٤٥°»

---

١٣ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٨ سم ، ب ح = ٦ سم ، و ∈ ح ء بحيث : و ء = ٦ سم.

أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ٤٠ ، ٢٦ $\sqrt{2}$ ، ٤ نيوتن فى أ ب ، ح أ ، أ و ، أ ء على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٦ $\sqrt{2}$ نيوتن ، ٤٥°»

---

١٤ أ ب ح ء مستطيل فيه : أ ب = ٢١ سم ، ب ح = ٩ سم ، النقطة و ∈ أ ب حيث أ و = ٩ سم.

أربع قوى مقاديرها ٤ ، ١٠ ، ٦ ، ١٢ $\sqrt{2}$ ث.كجم تؤثر فى النقطة (و) فى اتجاهات و ب ، و ح ، ب ح ، و ء على الترتيب. أوجد مقدار محصلة هذه القوى وأثبت أنها توازى ب ح «٢٤ ث.كجم»

---

١٥ أ ب ح ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ٥ ، ٤ ، ٣ $\sqrt{3}$ نيوتن فى أ ب ، أ ح ، أ ء ، أ هـ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «$\sqrt{651}$ نيوتن ، ٩ ، ٤٠° مع أ ب»

---

١٦ أ ب ح ء هـ و شكل سداسى منتظم تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{3}$ ، ٤ ث.كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات أ ب ، أ ح ، أ ء ، أ هـ ، أ و على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٢٠ ث.كجم ، ٦٠° مع أ ب»

---

١٧ أ ب ح ء هـ م سداسى منتظم ، و نقطة تقاطع أقطاره. أثرت القوى ٤ ، ١ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٣ ثقل جرام فى نقطة و فى اتجاهات و أ ، و ب ، و ح ، و ء ، و هـ ، و م

أوجد محصلة هذه القوى وأثبت أنها تؤثر فى اتجاه و ء «٢ ث.جم»

---

١٨ أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٨٠ سم ، ب ح = ٦٠ سم ، النقطة ء ∈ أ ح حيث ب ء = ء ح ، أثرت أربع قوى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٠ نيوتن فى النقطة ب فى الاتجاهات أ ب ، ب ح ، ح أ ، ب ء على الترتيب. أوجد مقدار محصلة هذه القوى وأثبت أنها تؤثر فى ب ء «١٥ نيوتن»

---

١٩ أ ب ح ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ ب ح بحيث ب هـ = ٥ سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات أ ب ، أ هـ ، ح أ ، أ ء على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

«١٠ $\sqrt{2}$ ث.جم وتعمل فى اتجاه أ ح»

٢٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٦ سم ، النقطة هـ هي منتصف $\overline{ب حـ}$ والنقطة و هي منتصف $\overline{ء حـ}$ ، أثرت خمس قوى مقاديرها ٢ ، ١٢ ، $٦\sqrt{٢}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ، $٤\sqrt{٥}$ ث.كجم في النقطة أ في اتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى. «٢٠ ث.كجم ، ١٢ ٥ ٣٦ ٢°»

٢١ أ ب حـ ء مربع ، هـ ∈ $\overline{أ ء}$ أثرت أربع قوى متلاقية في ب مقاديرها ٤ ، $٤\sqrt{٣}$ ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ق ثقل كجم وخطوط عملها في الاتجاهات $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب هـ}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ فإذا كانت هذه القوى متزنة فأوجد قياس ∠ أ ب هـ وقيمة ق «٣٠° ، ٢ (٥ - $\sqrt{٣}$) ث.كجم»

٢٢ أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم في نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة في حالة اتزان. «٩ ، ٦ ث.كجم»

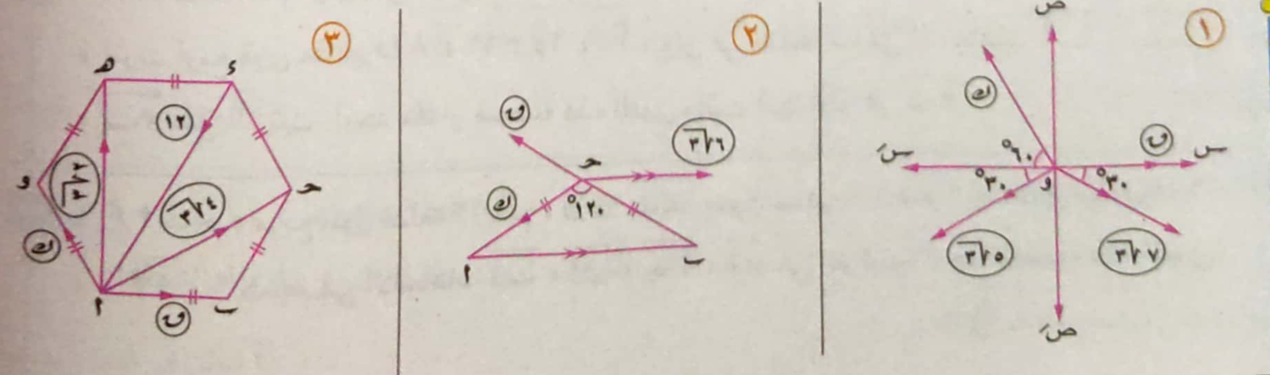
٢٣ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، $٤\sqrt{٢}$ ، $٥\sqrt{٢}$ ، ك نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات : الشرق ، الشمال ، الشمال الغربي ، الجنوب الغربي ، والجنوب على الترتيب.
أوجد قيمتي : ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٢ نيوتن في اتجاه الشمال. «٩ ، ٣ نيوتن»

٢٤ تؤثر قوى مقاديرها ق ، $٤\sqrt{٣}$ ، $١٢\sqrt{٣}$ ، ٣٦ ثقل جم في نقطة مادية وكانت الثلاثة الأخيرة في اتجاهات : الشمال ، ٦٠° غرب الشمال ، ٦٠° جنوب الشرق على الترتيب فإذا كانت محصلة القوى = ٨ ث.جم في اتجاه الشرق. فعين مقدار واتجاه ق «١٦ ث.جم ، ٦٠° شمال الشرق»

٢٥ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨ ، ك ، ٥ ، $٨\sqrt{٣}$ نيوتن في نقطة مادية في اتجاهات : الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، والجنوب على الترتيب.
أوجد قيمتي : ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤ نيوتن في اتجاه ٦٠° شمال الشرق. «٣ ، $٦\sqrt{٣}$ نيوتن»

٢٦ أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من : أ ، ء فيه : أ ء = حـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أ ب}$ بحيث أ م = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ق ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٣٥ ثقل جرام في $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ م}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ على الترتيب. وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٥٠ ثقل جرام. أوجد ق «ق = ١٠ ث.جم»

٢٧ في كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من ق ، ك مقدرة بالنيوتن بحيث تصبح كل مجموعة مما يأتي متزنة :



٢٨ تؤثر القوى المستوية التي مقاديرها ق ، ٣ √٢ ، ٢ √٣ ، √٣ نيوتن في نقطة مادية بحيث كانت القوة الأولى تعمل في اتجاه الشرق وقياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلة هذه القوى يساوي ٣ √٢ نيوتن. فأوجد قيمة ق ، قياس الزاوية بين خط عمل المحصلة وخط عمل القوة الأولى. «٣ نيوتن ، ٤٥°»

---

٢٩ أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٢ √٣ ، ق ، ٢ √٣ ، ك ث.كجم تعمل في الاتجاهات أب ، أحـ ، أء ، أهـ ، أو على الترتيب فإذا كان مقدار محصلة المجموعة يساوي ٢ ث.كجم في اتجاه أء أوجد قيمتي : ق ، ك «١٠ ، ٤ ث.كجم»

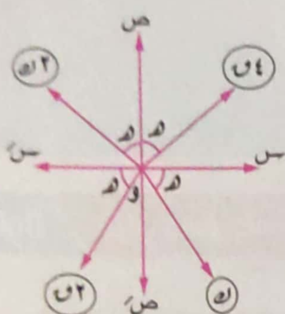
---

٣٠ الشكل المقابل يبين أربع قوى مستوية متلاقية في نقطة الأصل «و» في الاتجاهات الموضحة. حيث : جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

وأن محصلة هذه القوى مقدارها ٨ √٢ نيوتن

وتصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع و س

أوجد قيمتي : ق ، ك



«٣ ، ١٤ نيوتن»

---

٣١ إذا كانت : ق١ = ٥ س + ٣ ص ، ق٢ = أ س + ٦ ص ، ق٣ = −١٤ س + ب ص ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة ح = (١٠ √٢ ، $\frac{٣}{٤}$ π) أوجد قيمتي : أ ، ب «−١ ، ١»

اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى)



أولًا اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

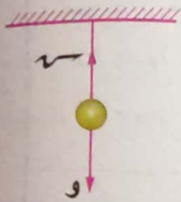
* يتزن الجسم الجاسئ تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان :

١ متساويتين فى المقدار.

٢ متضادتين فى الاتجاه.

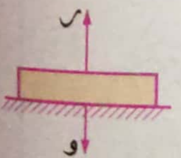
٣ خطا عملهما على استقامة واحدة.

* أمثلة على اتزان جسم تحت تأثير قوتين :



١ جسم معلق بحبل خفيف :

إذا علق جسم وزنه (و) بحبل خفيف من إحدى نقطه فإنه يتزن تحت تأثير قوتين هما : الوزن (و) ويؤثر رأسيًا إلى أسفل ، الشد (ش) فى الحبل ويؤثر رأسيًا إلى أعلى ونستنتج أن : ش = و



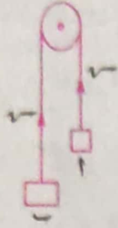
٢ جسم موضوع على نضد أفقى أملس :

إذا وضع جسم وزنه (و) على نضد أفقى أملس فإنه يتزن تحت تأثير قوتين هما : الوزن (و) ويؤثر رأسيًا إلى أسفل ، رد فعل النضد على الجسم (ر) ويؤثر رأسيًا إلى أعلى ونستنتج أن : ر = و

ملاحظات

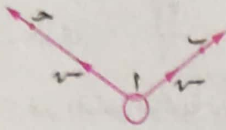
١ إذا أثرت على جسم متماسك قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وفي نفس الخط المستقيم فلا يكون لهما أي تأثير على الجسم سواء من ناحية السكون أو الحركة.

٢ في الشكل المقابل :



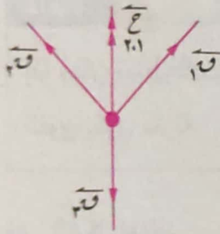
إذا مر خيط على بكرة ملساء وعلق في طرفي الخيط ا ، ب جسمان بحيث أصبح الخيط مشدودًا فإن الشدين عند طرفي الخيط يكونان متساويين.

٣ في الشكل المقابل :



إذا مر خيط في حلقة ملساء (معلقة فيه تعليقًا حرًا) فإن الشد في كل من جزأي الخيط $\overline{اب}$ ، $\overline{اجـ}$ يكونان متساويين في المقدار.

ثانيًا اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة



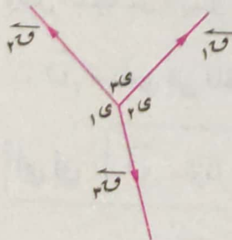
إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مثل $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ كما في الشكل وكانت $\overleftarrow{ح}_{1،2}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ فإن القوتين $\overleftarrow{ح}_{1،2}$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ تكونان متزنتين ، ومن شروط اتزان قوتين نستنتج أن $\overleftarrow{ح}_{1،2}$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ولهما نفس خط العمل.

- وعمومًا : إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة فإن محصلة أي قوتين منها تكون مساوية للقوة الثالثة في المقدار ومضادة لها في الاتجاه ولهما نفس خط العمل.

مثال ١

$\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢ ، ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢٤ نيوتن على الترتيب فإذا كانت هذه القوى متزنة فأوجد قياسات الزوايا بين خطوط عمل القوى الثلاث.

الحل



بفرض أن قياس الزاوية بين خطي عمل $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ = $ى_3$

∵ القوى الثلاث متزنة.

∴ $ح_{1،2}$ = $ق_3$ = ٢٤ ومضادة لها في الاتجاه.

∵ $ح_{1،2}^2 = ق_1^2 + ق_2^2 + 2\, ق_1\, ق_2$ جتا $ى_3$

$\therefore (٢٤)^٢ = (١٢)^٢ + (١٢\sqrt{٣})^٢ + ٢ \times ١٢ \times ١٢\sqrt{٣}$ جتا $ى_٢$

$\therefore ٥٧٦ = ١٤٤ + ٤٣٢ + ٢٨٨\sqrt{٣}$ جتا $ى_٢$

$\therefore$ جتا $ى_٢ = ٠$ $\qquad \therefore ى_٢ = ٩٠^\circ$

بالمثل بفرض أن قياس الزاوية بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = $ى_١$

، $\because$ القوى الثلاث متزنة $\qquad \therefore ح_{٢،٣} = ق_١ = ١٢$ ومضادة لها فى الاتجاه.

، $\because ح^٢_{٢،٣} = ق^٢_٢ + ق^٢_٣ + ٢ ق_٢ ق_٣$ جتا $ى_١$

$\therefore ١٤٤ = ٤٣٢ + ٥٧٦ + ٢ \times ١٢\sqrt{٣} \times ٢٤$ جتا $ى_١$

$\therefore$ جتا $ى_١ = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\qquad \therefore ى_١ = ١٥٠^\circ$

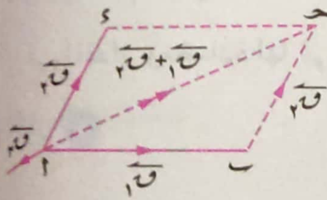
$\therefore ى_٣$ (قياس الزاوية بين خطى عمل $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$) $= ٣٦٠^\circ - (٩٠^\circ + ١٥٠^\circ) = ١٢٠^\circ$

* نعلم أن الشرط اللازم والكافى لاتزان جسم جاسئ تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هذه القوى هندسيًا بمضلع مقفل وبالتالى نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة ١

إذا أمكن تمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد فإن هذه القوى تكون متزنة.

ففى الشكل المقابل :



إذا كان : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى أ وبإكمال متوازى الأضلاع أ ب ح ء نجد أن المتجهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{ب ح}$ ، $\overleftarrow{ح أ}$ تمثل القوى الثلاث مقدارًا واتجاهاً.

، $\because \overleftarrow{أ ح} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب ح}$ $\qquad \therefore$ المتجه $\overleftarrow{أ ح}$ يمثل محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

ولكن المتجه $\overleftarrow{ح أ}$ يمثل القوة $\overleftarrow{ق_٣}$ $\qquad$ ، $\because \overleftarrow{أ ح} + \overleftarrow{ح أ} = \overleftarrow{٠}$

$\therefore \overleftarrow{ق_٣}$ تساوى فى المقدار وتضاد فى الاتجاه محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

أى أن $\overleftarrow{ق_٣}$ متزنة مع محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

$\therefore$ القوى الثلاث $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ متزنة.

ملاحظة

- لكي تتزن ثلاث قوى متلاقية في نقطة وليست على استقامة واحدة يجب أن تكون مقاديرها تصلح لأن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث ، بمعنى أنه لا بد أن يكون مقدار كبرى هذه القوى أصغر من مجموع مقداري القوتين الآخرين لأنه في أي مثلث يجب أن يكون أكبر الأضلاع طولاً أصغر من مجموع طولي الضلعين الآخرين.

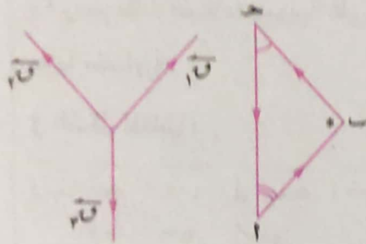
فمثلاً القوى الثلاث التي مقاديرها ٢ ، ٤ ، ٩ وحدة قوة لا يمكن أن تتزن لأن الأعداد ٢ ، ٤ ، ٩ لا تصلح لأن تكون أطوالاً لأضلاع مثلث لأن ٩ > ٢ + ٤ أما القوى التي مقاديرها ٤ ، ٧ ، ٨ يمكن أن تتزن ولا نقول متزنة حيث إن الاتزان يعتمد على مقادير القوى واتجاهها أيضًا.

- تتزن الثلاث قوى المتلاقية في نقطة إذا كان مقدار كبرى هذه القوى يساوي مجموع مقداري القوتين الآخريين في حالة أن تكون هذه القوى على استقامة واحدة.

قاعدة ٢ قاعدة مثلث القوى :

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية في نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازي خطوط عمل القوى وفي اتجاه دوري واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

إذا رمزنا لمقادير القوى بالرموز ق_1 ، ق_2 ، ق_3 وكان Δ أ ب حـ هو المثلث الذي أضلاعه توازي خطوط عمل القوى الثلاث فإن $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ تمثل القوى $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_3}$ على الترتيب مقدارًا واتجاهًا حيث أن الجسم متزن ويكون



$$\frac{\text{ق}_1}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ب حـ}} = \frac{\text{ق}_3}{\text{حـ أ}}$$

ويسمى Δ أ ب حـ بـ «مثلث القوى» ويلاحظ أنه يمكن رسم عدد غير منته من المثلثات المتشابهة والتي كل منها يعتبر مثلثًا للقوى.

مثال ٢

ثلاث قوى متلاقية في نقطة مقاديرها ق_1 ، ق_2 ، ٩٦ ث.كجم وأمكن تمثيلها بالقطع المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب حـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ أ}}$ على الترتيب في Δ أ ب حـ الذي فيه : أ ب = ٨ سم ، ب حـ = ١٠ سم ، حـ أ = ١٢ سم

أوجد قيمة كل من : ق_1 ، ق_2

الحل

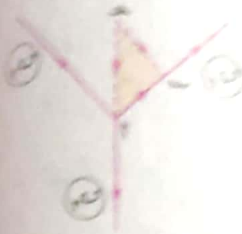
$\because$ القوى تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة في اتجاه دوري واحد.

$\therefore$ القوى متزنة وباستخدام قاعدة مثلث القوى :

$$\therefore \frac{\text{ق}_1}{\text{أ ب}} = \frac{\text{ق}_2}{\text{ب حـ}} = \frac{96}{\text{حـ أ}} \qquad \therefore \frac{\text{ق}_1}{8} = \frac{\text{ق}_2}{10} = \frac{96}{12}$$

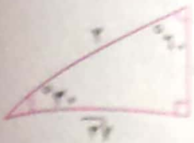
$\therefore$ ق_1 = ٦٤ ث.كجم ، ق_2 = ٨٠ ث.كجم.

ملاحظتان هامتان

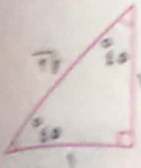


١ من الممكن رسم مثلث القوى بحيث يكون ضلعان من أضلاعه محمولين على خطى عمل قوتين والضلع الثالث يوازى خط عمل القوة الثالثة.

ففى الشكل المقابل : Δ أ ب حـ يكون مثلث قوى.



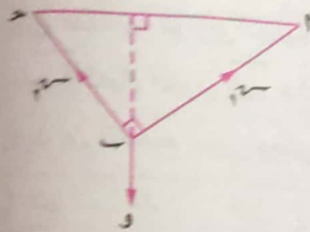
٢ * إذا كان مثلث القوى لثلاث قوى متزنة هو مثلث ثلاثينى ستينى كانت النسبة بين أطوال أضلاعه كنسبة ١ : ٢ : $\sqrt{3}$



* وإذا كان مثلث القوى قائم الزاوية ومتساوى الساقين فالنسبة بين أطوال أضلاعه كنسبة ١ : ١ : $\sqrt{2}$

معلومة إثرائية

إذا رسم مثلث أضلاعه عمودية على اتجاهات القوى المتزنة فإن النسبة بين كل قوة وطول ضلع المثلث العمودى عليها متساوية.



فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{و} \perp \overline{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{ق_1} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overleftarrow{ق_2} \perp \overline{أ ب}$

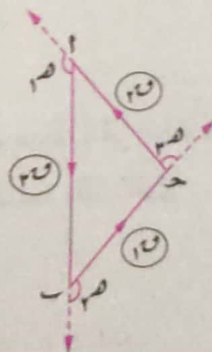
$\therefore \frac{و}{أ حـ} = \frac{ق_1}{ب حـ} = \frac{ق_2}{أ ب}$

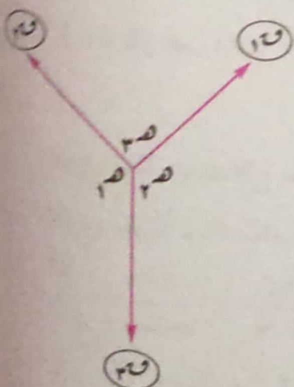
تسمى هذه القاعدة «مثلث القوى العمودى»

قاعدة ٣ قاعدة لامى:

إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

فإذا رمزنا لمقادير القوى بالرموز $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ وكانت $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $هـ_3$ هى قياسات الزوايا المقابلة لها على الترتيب كما فى الشكل المقابل.





فإن : Δ أ ب حـ هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ق_1}{ب حـ} = \frac{ق_2}{حـ أ} = \frac{ق_3}{أ ب}$ (١)

ومن قانون الجيب :

$$\therefore \frac{ب ح}{جا(١٨٠^\circ - هـ_١)} = \frac{ح أ}{جا(١٨٠^\circ - هـ_٢)} = \frac{أ ب}{جا(١٨٠^\circ - هـ_٣)}$$

أى أن $\frac{ب ح}{جا هـ_١} = \frac{ح أ}{جا هـ_٢} = \frac{أ ب}{جا هـ_٣}$ (٢)

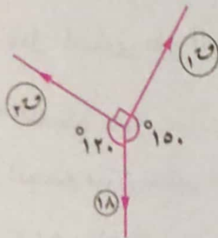
من (١) ، (٢) ينتج أن : $\frac{ق_١}{جا هـ_١} = \frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ق_٣}{جا هـ_٣}$

مثال ٣

ثلاث قوى مستوية مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، ١٨ نيوتن متلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية ٩٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠°

فأوجد قيمة كل من : $ق_١$ ، $ق_٢$

الحـــل



قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثالثة

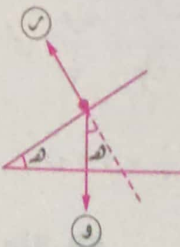
$= ٣٦٠^\circ - (٩٠^\circ + ١٢٠^\circ) = ١٥٠^\circ$

وحسب قاعدة لامى يكون : $\frac{ق_١}{جا ١٢٠^\circ} = \frac{ق_٢}{جا ١٥٠^\circ} = \frac{١٨}{جا ٩٠^\circ}$

$$\therefore \frac{ق_١}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{ق_٢}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{١}$$

$\therefore ق_١ = ١٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٩\sqrt{٣}$ نيوتن. ، $ق_٢ = ١٨ \times \frac{١}{٢} = ٩$ نيوتن.

اتزان جسم على مستوٍ مائل أملس



إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإن الجسم يكون واقعًا تحت تأثير قوتين :

١ قوة الوزن ($\overrightarrow{و}$) واتجاهها رأسى إلى أسفل.

٢ قوة رد فعل المستوى المائل الأملس ($\overrightarrow{ر}$) وهى عمودية على المستوى

وهاتان القوتان لا يمكن أن تتزنا حيث إن خطى عملهما ليسا واحدًا

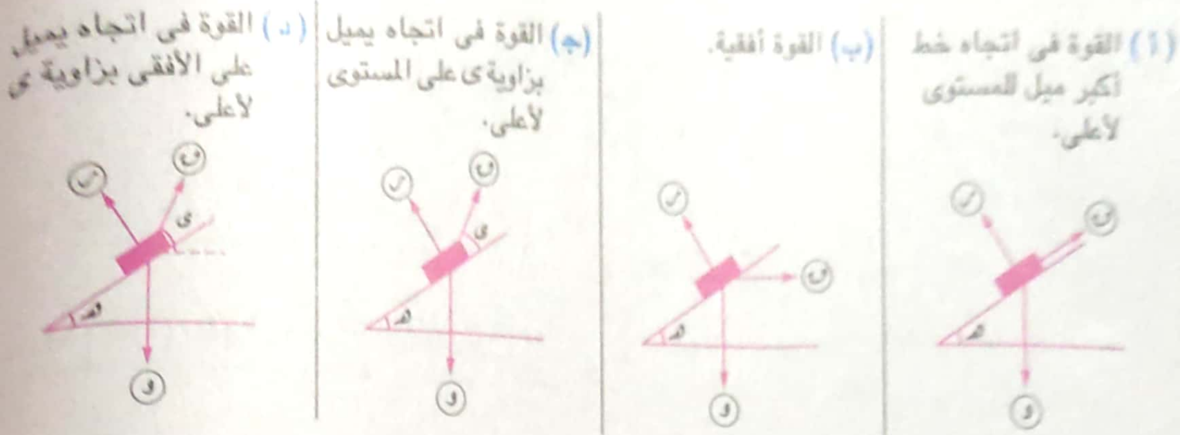
ولكي يحدث الاتزان لابد من وجود قوة ثالثة تؤثر على الجسم وتأخذ أحد الأشكال الآتية :

(أ) القوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى.

(ب) القوة أفقية.

(جـ) القوة في اتجاه يميل بزاوية ى على المستوى لأعلى.

(د) القوة في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية ى لأعلى.



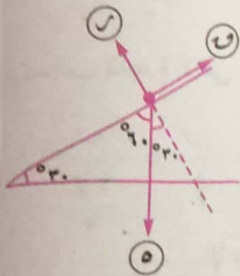
ملاحظة

رد فعل المستوى الأملس ($\overleftarrow{ر}$) يكون عموديًا على المستوى.

مثال ٤

وضع جسم وزنه ٥ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومنع الجسم من الانزلاق بالتأثير عليه بقوة قدرها ق تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى. أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ وكذا رد فعل المستوى على الجسم.

الحل



الجسم متزن بتأثير القوى التي مقاديرها ق ، ر ، ٥ ثقل كجم

كما في الشكل وقياس الزاوية بين خطي عمل القوتين الأولى والثانية = ٩٠°

وبين الثانية والثالثة = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

وبين الثالثة والأولى = ٩٠° + ٣٠° = ١٢٠°

وبتطبيق قاعدة لامي يكون : $\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ١٢٠°} = \frac{٥}{جا ٩٠°}$

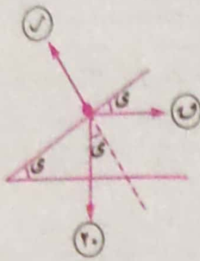
أي : $\frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٥}{١}$

∴ $ق = ٥ \times \frac{١}{٢} = ٢,٥$ ثقل كجم. ، $ر = ٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ ثقل كجم.

مثال ٥

وضع ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ى حيث $جتا ى = \frac{٤}{٥}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها (ق) أوجد مقدار ق وكذا رد فعل المستوى.

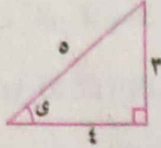
الحل



الثقل متزن بتأثير ثلاث قوى مقاديرها ق ، ر ، ٢٠ ثقل كجم

فيكون قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية = ٩٠° + ى

وبين القوتين الثانية والثالثة = ١٨٠° - ى وبين القوتين الثالثة والأولى = ٩٠°



وبتطبيق قاعدة لامى يكون :

$$\frac{ق}{جا(١٨٠° - ى)} = \frac{ر}{جا ٩٠°} = \frac{٢٠}{جا(٩٠° + ى)}$$

أى : $\frac{ق}{جا ى} = \frac{ر}{١} = \frac{٢٠}{جتا ى}$

وحيث إن جتا ى = $\frac{٤}{٥}$

∴ جا ى = $\frac{٣}{٥}$ ∴ $\frac{ق}{\frac{٣}{٥}} = ر = \frac{٢٠}{\frac{٤}{٥}}$

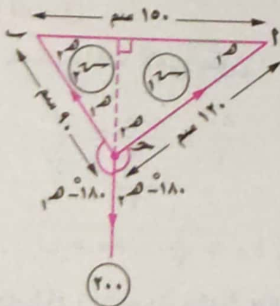
∴ ق = ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٥}{٤}$ = ١٥ ثقل كجم. ، ر = ٢٠ × $\frac{٥}{٤}$ = ٢٥ ثقل كجم.

أمثلة عامة على توازن ثلاث قوى

مثال ٦

علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٩٠ سم ، ١٢٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ١٥٠ سم أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى حالة الاتزان.

الحل



∵ $(٩٠)^٢ + (١٢٠)^٢ = (١٥٠)^٢$

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

ومن هندسة الشكل نجد أن :

جا $هـ_١$ = $\frac{٩٠}{١٥٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جا $هـ_٢$ = $\frac{١٢٠}{١٥٠} = \frac{٤}{٥}$

وباستخدام قاعدة لامى : $\frac{ش_١}{جا(١٨٠° - هـ_١)} = \frac{ش_٢}{جا(١٨٠° - هـ_٢)} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{جا هـ_١} = \frac{ش_٢}{جا هـ_٢} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$ ∴ $\frac{ش_١}{\frac{٣}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٢٠٠}{١}$

∴ $ش_١$ = ١٢٠ ث.جم ، $ش_٢$ = ١٦٠ ث.جم.

حل اخر : باستخدام قاعدة مثلث القوى :

نرسم $\overline{ء و}$ // $\overline{حـ ب}$ فيكون Δ ء و حـ هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ش_١}{حـ و} = \frac{ش_٢}{و ء} = \frac{٢٠٠}{ء حـ}$

$\therefore ش_١ = ٢٠٠ \times \frac{حـ و}{ء حـ} = ٢٠٠$ جا هـ$_١$ $= ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم

، $ش_٢ = ٢٠٠ \times \frac{و ء}{ء حـ} = ٢٠٠$ جا هـ$_٢$ $= ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم

حل ثالث : (بالتحليل) :

$\because$ القوى الثلاثة متزنة،

$\therefore$ محصلة قوتى الشد = القوة الثالثة مقدارًا وتضادها اتجاهًا

$\therefore \overline{ش_١}$ ، $\overline{ش_٢}$ هما مركبتا $\overline{ح}$ وهما مركبتان متعامدتان

$\therefore ش_١ = ح$ جا هـ$_١$ $= ٢٠٠ \times \frac{٣}{٥} = ١٢٠$ ث.جم

، $ش_٢ = ح$ جا هـ$_٢$ $= ٢٠٠ \times \frac{٤}{٥} = ١٦٠$ ث.جم

حل رابع : (باستخدام قاعدة مثلث القوى العمودى) :

$\because \Delta$ ا ب حـ مثلث القوى العمودى، $\therefore \frac{ش_١}{٩٠} = \frac{٢٠٠}{١٥٠} = \frac{ش_٢}{١٢٠}$

$\therefore ش_١ = ١٢٠$ ث.جم ، $ش_٢ = ١٦٠$ ث.جم

مثال ٧

علق ثقل مقداره ٨٠ ثقل جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط فاتزن عندما كان الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة وكذلك الشد فى الخيط عندئذ.

الحل

حسب قاعدة لامى يكون : $\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ش}{جا ١٢٠°} = \frac{٨٠}{جا ٩٠°}$

$\therefore \frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{٨٠}{١}$

$\therefore ق = ٨٠ \times \frac{١}{٢} = ٤٠$ ث.جم ، $ش = ٨٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ٤٠\sqrt{٣}$ ث.جم

حل اخر : (قاعدة مثلث القوى) :

نمد خط عمل $\overline{ق}$ ليلاقى الحائط فى حـ

فيكون Δ حـ ا ب هو مثلث القوى.

$\therefore$ حسب قاعدة مثلث القوى يكون : $\frac{ق}{ا حـ} = \frac{ش}{ا ب} = \frac{٨٠}{ب حـ}$

، $\because \Delta$ حـ ا ب ثلاثينى ستينى.

∴ حـ أ : أ ب : ب حـ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢ ∴ $\frac{ق}{١} = \frac{ش}{\sqrt{٣}} = \frac{٨٠}{٢}$

∴ ق = ٤٠ ث.جم ، ش = ٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

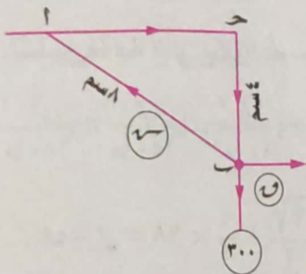
مثال ٨

خيط خفيف $\overline{أب}$ طوله ٨ سم ثبت طرفه أ فى نقطة ثابتة وعلق وزن مقداره ٣٠٠ ث. جم من طرفه الآخر ب أوجد مقدار القوة اللازمة لحفظ التوازن على بعد ٤ سم من الخط الأفقى المار فى أ وأيضًا الشد فى الخيط فى كل من الحالتين الآتيتين :

١ إذا كانت القوة المؤثرة أفقية. ٢ إذا كان اتجاه القوة متعامدًا مع $\overleftarrow{أب}$

الحـل

الحالة الأولى :



إذا كانت القوة المؤثرة أفقية :

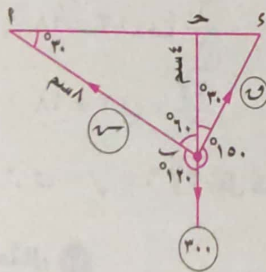
يمكن اعتبار المثلث أ ب حـ مثلث القوى.

∴ $\frac{ش}{أب} = \frac{ق}{أحـ} = \frac{٣٠٠}{بحـ}$

، ∵ أحـ = $\sqrt{(٨)^٢ - (٤)^٢}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم ∴ $\frac{ش}{٨} = \frac{ق}{٤\sqrt{٣}} = \frac{٣٠٠}{٤}$

∴ ش = ٦٠٠ ث.جم ، ق = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

الحالة الثانية :



إذا كان اتجاه القوة متعامدًا مع $\overleftarrow{أب}$

بتطبيق قاعدة لامى يكون : $\frac{ش}{جا ١٥٠°} = \frac{ق}{جا ١٢٠°} = \frac{٣٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ ش = $\frac{٣٠٠ \text{ جا } ١٥٠°}{\text{جا } ٩٠°}$ = ١٥٠ ث.جم

، ق = $\frac{٣٠٠ \text{ جا } ١٢٠°}{\text{جا } ٩٠°}$ = ١٥٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

ملاحظـة

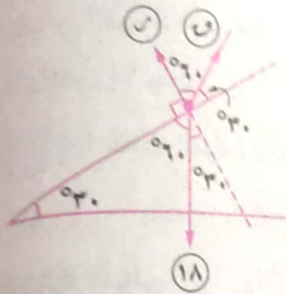
إذا مد خط عمل إحدى القوى الثلاث ليقسم الزاوية بين خطى عمل القوتين الأخريين إلى زاويتين فيمكن تطبيق قاعدة لامى كما يلى :

$$\frac{ق_١}{جا ى_١} = \frac{ق_٢}{جا ى_٢} = \frac{ق_٣}{جا (ى_١ + ى_٢)}$$

مثال 9

وضع جسم وزنه ١٨ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فأوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

الحل



الجسم متزن بتأثير القوى الثلاث التى مقاديرها ق ، ر ، ١٨ ثقل كجم

حيث قياس الزاوية بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية = ٦٠°

وبين الثانية والثالثة = ١٥٠°

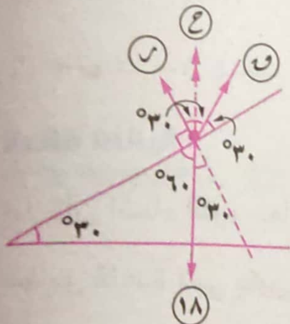
وبين الثالثة والأولى = ٣٠° + ٩٠° + ٣٠° = ١٥٠° أيضًا

وبتطبيق قاعدة لامى يكون :

$\frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ١٥٠°} = \frac{١٨}{جا ٦٠°}$ أى $\frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{\frac{١}{٢}} = \frac{١٨}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ق = ر = ١٨ × $\frac{١}{٢}$ ÷ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

حل آخر :



∵ خط عمل قوة الوزن هو خط عمل محصلة القوتين $\overrightarrow{ق}$ ، $\overrightarrow{ر}$ وينصف الزاوية بينهما

∴ ق = ر ، ∵ ع = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$

∴ ١٨ = ٢ ق جتا $\frac{٦٠°}{٢}$ ∴ ١٨ = ٢ ق جتا ٣٠°

∴ ١٨ = ٢ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ق = $\frac{١٨}{\sqrt{٣}}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

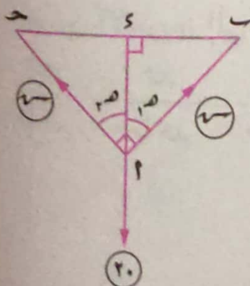
∴ ق = ر = ٦ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم.

مثال 10

خيط خفيف ربط من طرفيه فى نقطتين ب ، حـ بحيث كان $\overline{بحـ}$ أفقيًا ثم انزلقت على الخيط حلقة صغيرة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم فأصبح قياس الزاوية بين فرعى الخيط عند وضع التوازن ٩٠°

أثبت أن فرعى الخيط متساويان فى الطول ثم أوجد قيمة الشد فى كل منهما.

الحل



∵ الحلقة ملساء.

∴ مقدار الشد فى فرع الخيط $\overline{أب}$

= مقدار الشد فى فرع الخيط $\overline{أحـ}$ = ش

وباستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ش}{جا هـ_٢} = \frac{ش}{جا هـ_١} = \frac{٢٠}{جا ٩٠°}$ $\therefore$ جا هـ$_٢$ = جا هـ$_١$

$\therefore$ هـ$_١$ = هـ$_٢$ = $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٤٥° $\therefore \frac{ش}{جا ٤٥°} = \frac{٢٠}{جا ٩٠°}$ $\therefore$ ش = ١٠ $\sqrt{٢}$

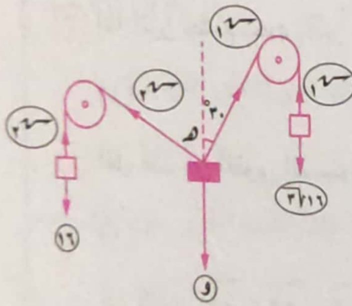
، $\because$ أ ء ⊥ $\overline{ب ح}$ ، ق (∠ هـ$_١$) = ق (∠ هـ$_٢$) = ٤٥°

$\therefore$ أ ب = أ ح $\therefore$ فرعا الخيط متساويان فى الطول.

مثال ١١

علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ويمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويحمل الطرف الآخر لهذا الخيط جسمًا وزنه ١٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن. ويميل الخيط الثانى على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويمر على بكرة ملساء أخرى مثبتة ويحمل الطرف الآخر لهذا الخيط جسمًا وزنه ١٦ نيوتن. أوجد فى وضع التوازن قيمة الوزن (و) وقيمة هـ

الحل



باستخدام قاعدة لامى :

$\therefore \frac{ش_١}{جا هـ} = \frac{ش_٢}{جا ٣٠°} = \frac{و}{جا (هـ + ٣٠°)}$

$\therefore \frac{١٦\sqrt{٣}}{جا هـ} = \frac{١٦}{جا ٣٠°} = \frac{و}{جا (هـ + ٣٠°)}$

$\therefore$ جا هـ = $\frac{١٦\sqrt{٣} \times جا ٣٠°}{١٦} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\therefore$ ق (∠ هـ) = ٦٠°

$\therefore \frac{١٦}{جا ٣٠°} = \frac{و}{جا (٦٠° + ٣٠°)}$ $\therefore$ و = ٣٢ نيوتن.

على اتزان جسم تحت تأثير قوتين / ثلاث قوى متلاقية فى نقطة (قاعدة مثلث القوى - قاعدة لامى)



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

(٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ق}_1 = \overleftarrow{ق}_2$ (ب) $ق_1 = ق_2$

(جـ) $\overleftarrow{ق}_1 + \overleftarrow{ق}_2 \neq \overleftarrow{0}$ (د) $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ليسا على استقامة واحدة.

(٣) إذا اتزن جسم تحت تأثير عدة قوى مستوية فإن أقل عدد من القوى تحدث الاتزان يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٤) أقل عدد من القوى المستوية غير المتساوية فى المقدار يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٥) إذا كانت : $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ ، $\overleftarrow{ق}_3$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق}_1$ ، $\overleftarrow{ق}_2$ يساوى ....

(أ) $ق_1$ (ب) $ق_1 + ق_2$ (جـ) $ق_3$ (د) صفر

(٦) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) $60°$ (ب) $90°$ (جـ) $120°$ (د) $150°$

(٧) إذا كانت $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) $٧\sqrt{٢}$

(٨) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها $60°$ فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{١٩}$ (ب) $\sqrt{٣٤}$ (جـ) ٧ (د) ١٥

٩ أى من مجموعات القوى الآتية يمكن أن تكون متزنة ؟

① ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن. ② ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ١٦ نيوتن.

③ ٨ نيوتن ، ٨ نيوتن ، ٢٠ نيوتن.

(أ) ① فقط. (ب) ② فقط. (جـ) ① ، ② (د) ② ، ③

١٠ أى من مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ١٠ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

١١ ثلاث قوى ليست على استقامة واحدة مستوية ومتلاقية فى نقطة متزنة فإذا كان مقدارى قوتين منهم هما ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٣

١٢ ثلاث قوى مستوية ومتزنة تؤثر فى نقطة مادية قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٦٠° ، بين الثانية والثالثة ١٥٠° فإن النسبة بين مقادير القوى هى ....

(أ) ١ : ١ : $\sqrt{٣}$ (ب) ١ : ٢ : $\sqrt{٣}$ (جـ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$: ١ (د) $\sqrt{٣}$: $\sqrt{٣}$: ١

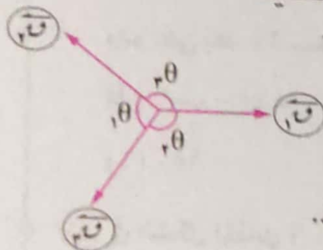
١٣ القوة التى تتزن مع القوتين المتعامدتين ق ، ق نيوتن قياس زاوية ميلها على إحدى القوتين = ...°

(أ) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٣٥ (د) ١٥٠

١٤ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فإذا كانت القوى متزنة فإن جيب تمام الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة = ...

(أ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٧}$ (جـ) $\frac{١٥}{١٧}$ (د) $\frac{١}{٢}$

١٥ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى بالشكل المقابل فأى الجمل الآتية صحيحة ؟



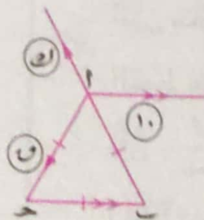
① $ق_١ + ق_٢ + ق_٣ =$ صفر ② $\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{صفر}$

③ $\frac{ق_١}{جا θ_١} = \frac{ق_٢}{جا θ_٢} = \frac{ق_٣}{جا θ_٣}$

(أ) ① ، ② فقط. (ب) ② ، ③ فقط.

(جـ) ③ فقط. (د) ① ، ② ، ③

١٦ فى الشكل المقابل :



إذا كانت المجموعة متزنة فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٢

(جـ) ٢٠ (د) ١٣

(١٧) أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل المقابل حيث $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

(١٨) فى الشكل المقابل :

ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن

، ق (∠ب أ حـ) = ٩٠° ، ق (∠ب أ ء) = ١٣٥°

فإن : (ق ، ك) = ...

(أ) (٤ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢ $\sqrt{٢}$)

(جـ) (٢ $\sqrt{٢}$ ، ٤) (د) (٢ ، ٢)

(١٩) إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد

فإن $ق_١$: $ق_٢$: $ق_٣$ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

(٢٠) فى الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩٠ ث.جم معلق فى نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٢٤ سم من الحائط

فإن : ش − ق = ... ث.جم.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٣٠

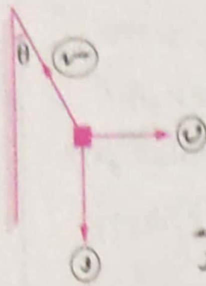
(٢١) فى الشكل المقابل :

مصباح وزنه ٢٨٠ ث.جم معلق فى نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

(٢٢) في الشكل المقابل :

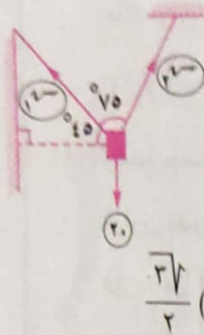


علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها (ق) نيوتن فاتزن عندما كان الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ أي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و ظا θ　　(ب) $\overline{و} + \overline{ق} + \overline{ش} = \overline{صفر}$

(جـ) $ش^2 = ق^2 + و^2$　　(د) ش = ق + و

(٢٣) في الشكل المقابل :

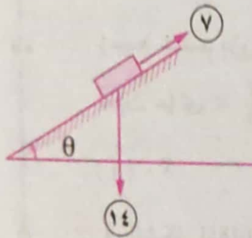


جسم وزنه ٢٠ ث.كجم متزن

فإن : $\frac{ش_1}{ش_2}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$　　(ب) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$　　(جـ) $\frac{٢}{٣}$　　(د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٢٤) في الشكل المقابل :



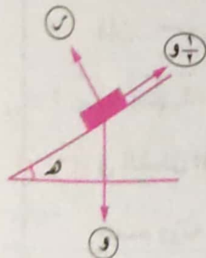
الجسم متزن على مستوى مائل أملس

فإن : ق (د θ) = ...

(أ) ٦٠°　　(ب) ٤٥°

(جـ) ٣٠°　　(د) ٧٥°

(٢٥) في الشكل المقابل :



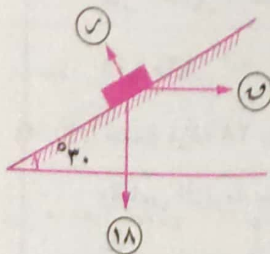
إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى

المبينة بالشكل فإن : ق (د هـ) = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°　　(د) ١٥°

(٢٦) في الشكل المقابل :

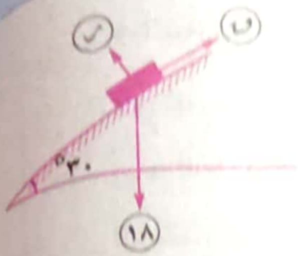


جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية مقدارها ق نيوتن.

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$　　(ب) ١٢ $\sqrt{٣}$　　(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$　　(د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

(٢٧) في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة مقدارها ق نيوتن في اتجاه المستوى لأعلى فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $٦\sqrt{٣}$　　(ب) $٩\sqrt{٣}$　　(جـ) $١٨\sqrt{٣}$　　(د) $٩ + ٩\sqrt{٣}$

(٢٨) وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة الأفقية = ... ث.كجم.

(أ) $\sqrt{٣}$　　(ب) $٢\sqrt{٣}$　　(جـ) $٤\sqrt{٣}$　　(د) ٦

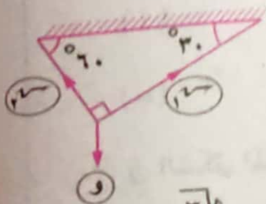
(٢٩) وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ في حالة توازن بقوة مقدارها ٤٩ نيوتن وتصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها θ فإن : جتا θ = ...

(أ) $\frac{٣}{٤٩}$　　(ب) $\frac{٣}{٤}$　　(جـ) $\frac{٣}{٥}$　　(د) $\frac{٤}{٥}$

(٣٠) وضع جسم يزن ٢٠ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ى حيث جا ى = $\frac{٣}{٥}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة أفقية ق فإن : ق = ... ث.كجم.

(أ) ٣٠　　(ب) ١٥　　(جـ) ١٠　　(د) $٥\sqrt{٣}$

(٣١) في الشكل المقابل :



ثقل مقداره (و) معلق بخيطين يميلان على الأفقي بالزاويتين الموضحتين فإن : ش١ = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ و　　(ب) $\frac{١}{٢}$ و　　(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ و　　(د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و

(٣٢) في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد

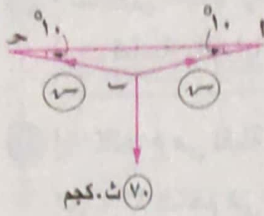
فإن : ش١ − ش٢ = ... ث.جم.

(أ) ١٢٠　　(ب) ٩٠　　(جـ) ٦٠　　(د) ٣٠

(٣٣) جسم وزنه ٢٨ ث.كجم معلق بواسطة خيطين مثبت طرفاهما الآخران ، فإذا كان الخيطان متعامدين وقياس الزاوية بين أحدهما وخط عمل وزن الجسم ١٢٠° فإن مقدار الشد في هذا الخيط = ... ث.كجم.

(أ) ١٤　　(ب) ٢٨　　(جـ) $١٤\sqrt{٣}$　　(د) $٢٨\sqrt{٣}$

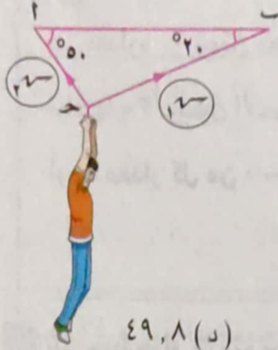
(٣٤) فى الشكل المقابل :



يسير رجل وزنه ٧٠ ث.كجم على حبل فإذا انخفض طرفا الحبل عن الأفقى بزاوية قياسها ١٠° عندما وصل الرجل إلى منتصف الحبل فإن قيمة الشد فى الحبل (ش) = ... ث.كجم.

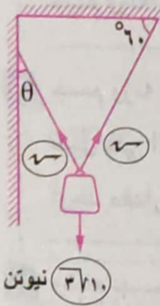
(أ) $\frac{٧٠ \text{ جا } ٢٠°}{\text{جا } ١٠٠°}$ (ب) $\frac{٧٠ \text{ جا } ١٠٠°}{\text{جا } ١٦٠°}$ (جـ) $\frac{٧٠ \text{ جتا } ١٠٠°}{\text{جتا } ١٦٠°}$ (د) $\frac{\text{جا } ١٠٠°}{٧٠ \text{ جا } ١٦٠°}$

(٣٥) فى الشكل المقابل :



تعلق رجل وزنه (و) ث.كجم رأسيًا من نقطة حـ ومثبت بواسطة حبلين $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ كما بالشكل وكان ش٢ = ٦٠ ث.كجم فإن : (و) = ... ث.كجم.

(أ) ٨٧,٧ (ب) ٧٠,٦ (جـ) ٦٠ (د) ٤٩,٨



(٣٦) علق جسم وزنه ١٠ √٣ نيوتن بواسطة خيطين كما بالشكل المقابل فإن قيمة θ التى تجعل الشد فى الخيطين متساوٍ هى ....

(أ) ١٥° (ب) ٣٠°

(جـ) ٤٥° (د) ٦٠°

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، ٧٥ نيوتن وأمكن تمثيلها بالقطع $\overline{أب}$ ، $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{حـ أ}$ على الترتيب من Δ أ ب حـ الذى فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم ، حـ أ = ٥ سم أوجد قيمة كل من : $ق_1$ ، $ق_2$ «٤٥ ، ٦٠ نيوتن»

٢ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° فأوجد مقدار كل من : ق ، ك «٣٠ ، ٣٠ √٣ نيوتن»

٣ وضع جسم وزنه ١٢ ثقل.كجم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازن الجسم بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى. «٤ √٣ ، ٨ √٣ ث.كجم»

٤ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى. «٧٢ ، ٣٦ √٣ نيوتن»

٥ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_1$ = ٨ ث.جم ، ق$_2$ = ٤ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ق$_3$ = ٤ ث.جم
أوجد قياسات الزوايا الثلاثة بين خطوط عمل القوى الثلاثة. علمًا بأن المجموعة متزنة. «٩٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°»

---

٦ إذا كانت م هى نقطة تقاطع قطرى المربع أ ب حـ ء ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، وكانت ق$_1$ ، ق$_2$ ، ٤٢ ث.جم هى مقادير ثلاث قوى متزنة تؤثر فى $\overleftarrow{\text{م هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{م و}}$ ، $\overleftarrow{\text{م ء}}$
احسب قيمة كل من : ق$_1$ ، ق$_2$ «٢١ $\sqrt{٢}$ ، ٢١ $\sqrt{٢}$ ث.جم»

---

٧ فى الشكل المقابل :
ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الآخر على الأفقى بزاوية قياسها ٤٠°
أوجد مقدار كل من : ش$_1$ ، ش$_2$ فى حالة الاتزان.

«٨,١٥ ، ٩,٢١٦ نيوتن»

---

٨ ثبت خيط طوله ٤٠ سم من نهايتيه فى نقطتين على مستقيم أفقى واحد البعد بينهما ٣٢ سم وعلق فى منتصف الخيط جسم وزنه ١٨٠ ث.كجم. أوجد مقدار الشد فى كل من جزأى الخيط. «١٥٠ ، ١٥٠ ث.كجم»

---

٩ جسم وزنه ١٥ ثقل كجم موضوع على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢}$ ، أثرت عليه قوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فحفظته فى حالة توازن.
أوجد مقدار القوة ورد الفعل العمودى على المستوى. «٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ث.كجم»

---

١٠ وضع جسم وزنه (و) ثقل كجم على مستوٍ أملس يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{١}{٢}$ وحفظ فى حالة توازن بقوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.
أوجد مقدار القوة وكذلك رد فعل المستوى بدلالة (و). «ق = ر = و»

---

١١ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان. «١٦٠ ، ١٢٠ ث.جم»

---

١٢ علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر وطول الآخر ١,٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين فى وضع الاتزان. «٦ ، ٢,٥ نيوتن»

---

١٣ علق ثقل قدره ٥٠ ثقل جرام بواسطة خيطين متعامدين فإذا كان الشد فى الخيطين هما ٢٥ $\sqrt{٣}$ ، ٢٥ ثقل جرام.
فأوجد قياس الزاوية التى يميل بها كل من الخيطين على الرأسى فى وضع الاتزان. «٣٠° ، ٦٠°»

---

١٤ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم من طرف خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى سقف حجرة ثم جذب الثقل بقوة أفقية حتى أصبح الخيط مائلًا على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°
عين مقدار كل من القوة الأفقية والشد فى الخيط. «$\frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم»

١٥ ثقل قدره ٦٠ ثقل جم مربوط فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى، أثرت قوة أفقية مقدارها ق على الثقل فى اتجاه عمودى على الحائط فاتزن الثقل عندما كان الخيط يميل على الحائط بزاوية قياسها هـ حيث ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أوجد مقدار ق والشد فى الخيط. «٤٥ ، ٧٥ ث.جم»

---

١٦ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط. «٨ ، ٨$\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

١٧ أُزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ث.جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط.

أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط فى وضع الاتزان. «٣٠٠ ، ٣٠٠$\sqrt{٣}$ ث.جم»

---

١٨ خيط خفيف طوله ١٧٠ سم ثبت طرفه أ فى سقف حجرة وعلق من الطرف الآخر ب مصباح وزنه ٣٤ ث.جم.

أوجد مقدار الشد والقوة اللازمة لجعل المصباح متزنًا وهو على بعد ٨٠ سم أسفل سقف الحجرة فى كل من الحالتين الآتيتين :

① إذا كانت القوة أفقية. «٧٢,٢٥ ، ٦٣,٧٥ ث.جم»

② إذا كانت القوة عمودية على $\overline{أب}$ «١٦ ، ٣٠ ث.جم»

---

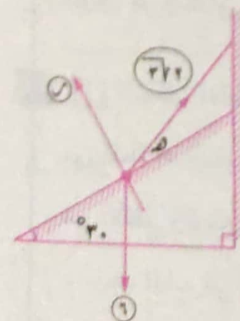
١٩ وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ وحفظ توازنه بواسطة قوة مقدارها ٢$\sqrt{٣}$ نيوتن وتميل على خط أكبر ميل للمستوى بزاوية لها نفس القياس هـ لأعلى. أوجد قيمة هـ ورد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢$\sqrt{٣}$ نيوتن»

---

٢٠ جسم فى حالة توازن على مستوى مائل أملس تحت تأثير قوة تعمل فى اتجاه المستوى إلى أعلى ومقدارها يساوى نصف مقدار وزن الجسم. أوجد قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى ورد فعل المستوى. «٣٠° ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ و»

---

٢١ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٦ ث.كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٢$\sqrt{٣}$ ث.كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والطرف الآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم. «٣٠° ، ٢$\sqrt{٣}$ ث.كجم»

٢٢ وضع جسم وزنه ٣٠٠ ثقل جرام على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد فعل المستوى. «$100\sqrt{3}$ ، $100\sqrt{3}$ ث.جم»

---

٢٣ وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث.جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم. «٦٠٠ ، ١٠٠٠ ث.جم»

---

٢٤ خيط أملس طوله ٣٠ سم ، ربط من طرفيه فى نقطتين أ ، ب بحيث كان $\overline{أب}$ أفقيًا وطوله = ١٨ سم فإذا انزلقت حلقة ملساء وزنها ١٥٠ ثقل جم على الخيط.

أثبت أنه فى وضع التوازن يكون طولا فرعى الخيط متساويين ثم أوجد الشد فى كل منهما. «٩٣,٧٥ ث.جم»

---

٢٥ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم. وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى. أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط إذا أثرت على الجسم قوة أفقية فاتزن :

(١) عندما يكون الجسم على بعد ٥٠ سم من الحائط. «١٠ ، ٢٦ نيوتن»

(٢) عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°. «$8\sqrt{3}$ ، $16\sqrt{3}$ نيوتن»

---

٢٦ علق وزن مقداره ٧٢ ثقل جرام فى أحد طرفى خيط وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة أ على حائط رأسى. ربط خيط ثان عند نقطة ب من الخيط الأول تبعد عن أ بمقدار ٢٥ سم وشد فى اتجاه أفقى حتى صارت النقطة ب على بعد ٧ سم من الحائط.

أوجد قوة الشد فى الخيط الأفقى وفى كل من جزأى الخيط الأول. «٢١ ، ٧٥ ، ٧٢ ث.جم»

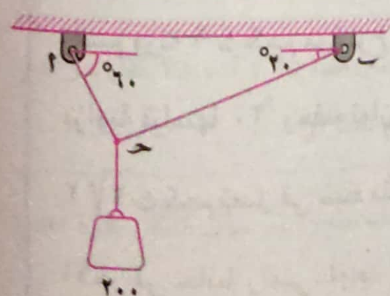
---

٢٧ علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث.جم.

فأوجد هـ ومقدار الشد فى الخيط الثانى. «٦٠° ، $100\sqrt{3}$ ث.جم»

---

٢٨ الشكل المقابل يبين ثقل مقداره ٢٠٠ نيوتن معلق رأسيًا من نقطة حـ ومثبت بواسطة حبلين $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$ يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٢٠° ، ٦٠° فإذا كانت المجموعة متزنة ، أوجد الشد فى كل من الحبلين لأقرب نيوتن.



«١٠٢ ، ١٩١ نيوتن»

٢٩ الربط بالملاحة البحرية :

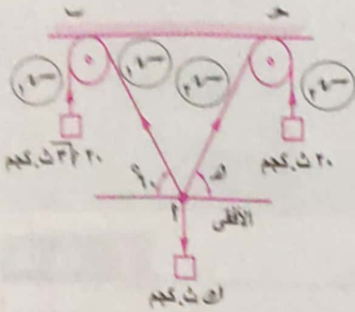


يجرى إنقاذ بحار باستخدام كرسى القبطان وذلك بتعليقه فى بكرة يمر عليها حبلان $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ كما فى الشكل المجاور فإذا كان قياسا زاويتى α ، β مع الأفقى ٢٥° ، ١٥° على الترتيب وكان الشد فى الخيط $\overline{أب}$ يساوى ٨٠ نيوتن. فأوجد وزنى البحار والكرسى معًا ، وكذلك الشد فى الخيط $\overline{أحـ}$ فى وضع الاتزان.

«٥٣٫٠ ، ٧٥ نيوتن»

---

٣٠ فى الشكل المقابل :



ثقل مقداره ك معلق فى طرف خيط وينتهى طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوين عند ب ، حـ ويحملان ثقلين مقداراهما ٢٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠ ث.كجم

أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ فى وضع الاتزان.

«٤٠ ث.كجم ، ٣٠°»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ جسم وزنه ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة أ بواسطة خيط ، ربط خيط فى نقطة ب من الخيط وشد أفقيًا بخيط ثان $\overline{بحـ}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ثقل جرام.

أوجد ميل $\overline{أب}$ على الرأسى والشد فى كل من الخيطين $\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ «٣٦° ٥٢َ ، ٣٠٠ ، ٥٠٠ ث.جم»

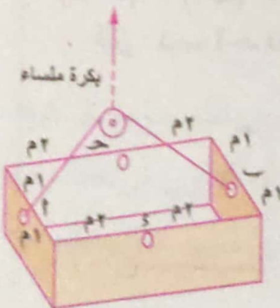
---

٢ $\overline{أب}$ خيط خفيف مثبت طرفاه فى نقطتين من مستقيم أفقى ، علق فى نقطتين حـ ، ء من الخيط ثقلان مقداراهما ك ، ٢٠ ثقل كجم على الترتيب فإذا اتزنت المجموعة فى وضع كان فيه $\overline{حـء}$ أفقيًا وكان جزءا الخيط $\overline{أحـ}$ ، $\overline{بء}$ يميلان على الرأسى بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب.

فأوجد الشد فى كل من أجزاء الخيط الثلاثة وقيمة ك «٤٠ $\sqrt{3}$ ، ٢٠ $\sqrt{3}$ ، ٤٠ ث.كجم ، ك = ٦٠ ث.كجم»

---

٣ علق صندوق وزنه ٢٠ نيوتن بين طرفى حبل يمر على بكرة ملساء كما هو موضح بالشكل المقابل ، فإذا أمكن تثبيت الصندوق بالحبل بطريقتين أحدهما من أ ، ب والأخر من حـ ، ء فأى الطريقتين يمكن أن ينتج عنها أقل شد فى الحبل بحيث تتزن المجموعة ؟

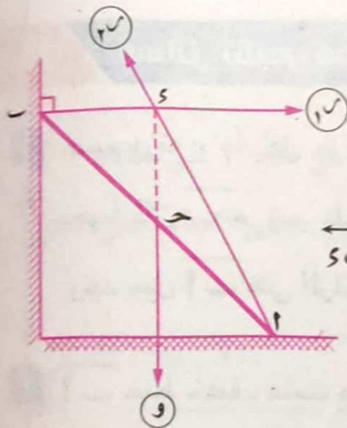




قاعدة ٤

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

فمثلًا فى الشكل المقابل :



إذا اتزن قضيب منتظم وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن :

١ وزن القضيب يؤثر فى منتصفه واتجاهه رأسيًا لأسفل (مركز ثقله).

٢ رد فعل الحائط الرأسى الأملس (ر_1) يكون عموديًا على الحائط ويعمل فى $\overleftarrow{\text{ب ء}}$

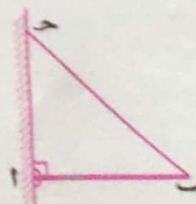
٣ رد فعل الأرض الأفقية الخشنة (ر_2) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ الذى يمر بالنقطة ء (نقطة تلاقى خطى عمل $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ر}_1}$)

ملاحظات

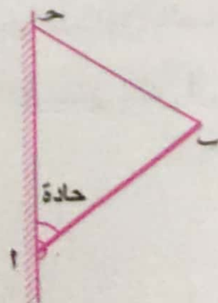
١ وزن الكرة المتجانسة يؤثر فى مركزها الهندسى (مركز ثقل الكرة).

٢ إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قضيبًا يتصل طرفه أ بمفصل فى حائط وربط الطرف ب بواسطة خيط ثبت فى النقطة حـ التى تقع أعلى أ تمامًا وكان :

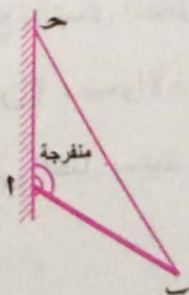
$(\text{ب حـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2$
فإن : ∠ ب أ حـ قائمة.



$(\text{ب حـ})^2 < (\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2$
فإن : ∠ ب أ حـ حادة.



$(\text{ب حـ})^2 > (\text{أ ب})^2 + (\text{أ حـ})^2$
فإن : ∠ ب أ حـ منفرجة.



٣ إذا كان: Δ أ ب حـ ثلاثيني ستيني

∴ أ ب = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ حـ

، ب حـ = $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$ أ حـ

٤ إذا كان: Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب ، $\overline{\text{ب ء}}$ متوسطاً.

∴ ب ء = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ حـ

مثال ١

كرة معدنية وزنها ٢ ثقل كجم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ربطت من نقطة ب على سطحها بخيط طوله ٣٠ سم ومربوط طرفه الآخر أ من نقطة في حائط رأسي أملس فاتزنت الكرة وهي مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد في الخيط ومقدار رد فعل الحائط.

الحل

الكرة متزنة بتأثير القوى الثلاث :

١ وزن الكرة ومقداره ٢ ثقل كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل من مركز الكرة (م).

٢ رد فعل الحائط ومقداره ر ويؤثر عند نقطة ارتكاز الكرة على الحائط وهي نقطة حـ وفي اتجاه عمودي على الحائط فهو يمر بمركز الكرة (م).

٣ الشد في الخيط ومقداره (ش) ويعمل في الخيط في اتجاه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

∵ خطي عمل قوتي الوزن ورد فعل الحائط يتقاطعان في (م)

∴ قوة الشد في الخيط يجب أن يمر خط عملها بالنقطة (م)

أي أن $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمر بالنقطة (م) ويكون Δ م أ حـ هو مثلث القوى حيث

م أ = م ب + ب أ = ٦٠ سم ، حـ م = ٣٠ سم

∴ Δ أ م حـ ثلاثيني ستيني.

∴ أ حـ = ٣٠ $\sqrt{\text{٣}}$ سم

∴ $\frac{\text{ش}}{\text{٦٠}} = \frac{\text{ر}}{\text{٣٠}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣٠}\sqrt{\text{٣}}}$

∴ ش = $\frac{\text{٤}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$ ثقل كجم ، ر = $\frac{\text{٢}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٣}}$ ثقل كجم.

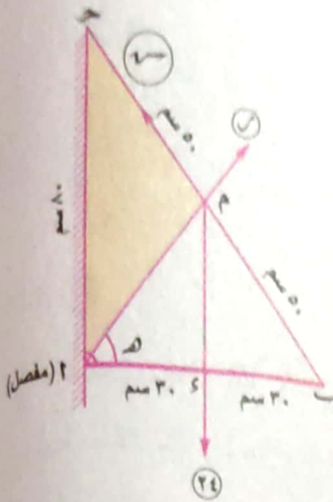
- حاول أن تحل هذا المثال باستخدام قاعدة لامي.

مثال ٢

$\overline{\text{أ ب}}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٢٤ ثقل كجم يؤثر في نقطة (ء) منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، والقضيب متصل طرفه (أ) بمفصل في حائط رأسي وطرفه ب مربوط في إحدى نهايتي خيط خفيف مثبت نهايته الأخرى في نقطة (حـ) على الحائط تقع فوق أ تمامًا وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فإذا اتزن القضيب في وضع أفقي. فأوجد مقدار الشد في الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند أ

الحل

من Δ أ ب حـ : ب حـ = $\sqrt{(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢}$ = ١٠٠ سم



القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١ وزنه ومقداره ٢٤ ث.كجم رأسي إلى أسفل ويؤثر عند (ء) منتصف $\overline{أب}$

٢ الشد في الخيط ومقداره (ش) ويعمل في اتجاه $\overleftarrow{ب حـ}$

٣ رد فعل المفصل عند أ ومقداره (ر).

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والشد يتلاقيان فى نقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{مء}$ // $\overline{أحـ}$ ∴ م منتصف $\overline{ب حـ}$

∴ $\overline{أم}$ متوسط فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى أ ∴ أ م = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥٠ سم

، ∵ Δ أ م حـ هو مثلث القوى : ∴ $\frac{ش}{م حـ} = \frac{ر}{م أ} = \frac{٢٤}{أ حـ}$ أى $\frac{ش}{٥٠} = \frac{ر}{٥٠} = \frac{٢٤}{٨٠}$

∴ ر = ش = ٢٤ × $\frac{٥٠}{٨٠}$ = ١٥ ث.كجم

، من Δ أ م ء : ظا هـ = $\frac{٤٠}{٣٠} = \frac{٤}{٣}$ ∴ هـ ≃ ٨َ ٥٣°

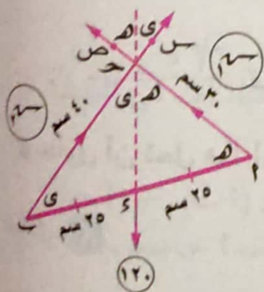
∴ رد فعل المفصل عند أ يميل على القضيب بزاوية قياسها ٨َ ٥٣°

مثال ٣

قضيب منتظم طوله ٥٠ سم ووزنه ١٢٠ ث.جم علق من طرفيه تعليقًا خالصاً بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة فإذا كان طولا الخيطين ٣٠ سم ، ٤٠ سم على الترتيب.

فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

الحل



القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى مقاديرها :

$ش_١$ ، $ش_٢$ ، ١٢٠ ث.جم حيث $\overleftarrow{أحـ}$ خط عمل $\overleftarrow{ش_١}$ ، $\overleftarrow{ب حـ}$ خط عمل $\overleftarrow{ش_٢}$ وهما متقاطعان فى حـ

∴ قوة الوزن لابد وأن يمر خط عملها بنقطة حـ أيضًا.

، ∵ $(أب)^٢$ = ٢٥٠٠ ، $(أحـ)^٢ + (حـ ب)^٢$ = ٩٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٥٠٠

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠°

، ∵ ء منتصف الوتر $\overline{أب}$ ∴ ء حـ = ء أ = ء ب

∵ ق (∠ ؟ ا حـ ؟) = ق (∠ ؟ ا حـ) ، ق (∠ ؟ حـ ب) = ق (∠ ؟ ب حـ)

وبتطبيق قاعدة لامي يكون: $\frac{\text{ش}_1}{\text{جا}(\text{ق})} = \frac{\text{ش}_2}{\text{جا}(\text{ق})} = \frac{120}{\text{جا } 90^\circ}$

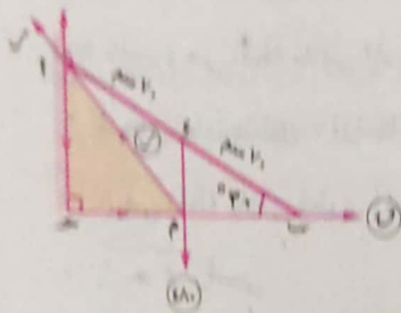
∴ $\frac{\text{ش}_1}{\frac{3}{5}} = \frac{\text{ش}_2}{\frac{4}{5}} = 120$

∴ ش₁ = ١٢٠ × $\frac{3}{5}$ = ٧٢ ثقل جم ، ش₂ = ١٢٠ × $\frac{4}{5}$ = ٩٦ ثقل جم.

مثال ٤

$\overline{\text{اب}}$ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ٤٨٠ ث.جم يتصل طرفه ا بمفصل مثبت في حائط رأسي. أثرت في طرفه الآخر ب القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ في الاتجاه الأفقي فاتزن القضيب في وضع يكون فيه مائلًا على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار القوة $\overrightarrow{\text{ق}}$ ومقدار واتجاه رد فعل المفصل عند ا

الحل



القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى:

١ وزنه ومقداره ٤٨٠ ث.جم رأسيًا إلى أسفل ويؤثر عند (؟) منتصف $\overline{\text{اب}}$

٢ القوة الأفقية $\overrightarrow{\text{ق}}$ عند ب

٣ رد فعل المفصل عند ا ومقداره (ر)

، ∵ خطي عمل قوتي الوزن والقوة الأفقية يتلاقيان في النقطة م

∴ خط عمل قوة رد فعل المفصل يمر بالنقطة م أيضًا (أي في اتجاه $\overrightarrow{\text{ام}}$)

∴ △ حـ م ا هو مثلث القوى. ∴ $\frac{\text{ق}}{\text{حـ م}} = \frac{\text{ر}}{\text{ا م}} = \frac{480}{\text{حـ ا}}$

، ∵ ق (∠ ا ب حـ) = ٣٠° ∴ ا حـ = $\frac{1}{2}$ ا ب = ٧٠ سم

، ب حـ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ا ب = ٧٠ $\sqrt{3}$ سم

، ∵ ؟ منتصف $\overline{\text{اب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{؟م}}$ // $\overline{\text{احـ}}$ ∴ م منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ م حـ = ٣٥ $\sqrt{3}$ سم ∴ ا م = $\sqrt{(70)^2 + (35\sqrt{3})^2}$ = ٣٥ $\sqrt{7}$ سم

∴ $\frac{\text{ق}}{35\sqrt{3}} = \frac{\text{ر}}{35\sqrt{7}} = \frac{480}{70}$ ∴ ق = ٢٤٠ $\sqrt{3}$ ث.جم ، ر = ٢٤٠ $\sqrt{7}$ ث.جم.

، ∵ △ ا م حـ قائم الزاوية في حـ ∴ طا (∠ ا م حـ) = $\frac{\text{ا حـ}}{\text{م حـ}} = \frac{70}{35\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

∴ ق (∠ ا م حـ) ≃ ٦ ٤٩° ∴ رد فعل المفصل يصنع زاوية قياسها ٦ ٤٩° مع الأفقي.

مثال ٥

قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقي زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° أوجد قياس الزاوية التي يصنعها القضيب مع الأفقي في وضع التوازن وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوى ٢٤ نيوتن عين مقدار رد فعل كل من المستويين.

الحل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

١ الوزن ٢٤ نيوتن رأسيًا إلى أسفل ويؤثر عند (م) منتصف $\overline{أ ب}$

٢ رد فعل المستوى الأول $ر_١$

٣ رد فعل المستوى الثاني $ر_٢$

، ∵ خطى عمل قوتي رد الفعل يتلاقيان في النقطة حـ

∴ خط عمل قوة الوزن يمر بالنقطة حـ أيضًا.

فإذا كانت ء هي نقطة تلاقي المستويين فإن ∠ أ ، ∠ ء ، ∠ ب قوائم.

∴ أ حـ ب ء مستطيل ، إذا كانت م هي منتصف $\overline{أ ب}$

∴ م هي نقطة تلاقي قطري المستطيل ∴ $\overline{حـ ء}$ قطر المستطيل يمر بالنقطة م

، ∵ $\overline{حـ ء}$ رأسي. ∴ ق(∠ حـ ء س) = ٩٠°

∴ ق(∠ م ء أ) = ٣٠°

، ∵ م ء = م أ ∴ ق(∠ ء أ م) = ٣٠°

، ∵ ق(∠ ص أ ء) = ٦٠° ∴ ق(∠ ص أ م) = ٣٠°

∴ القضيب يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الأفقي.

ومن △ أ ء حـ : ∴ ق(∠ أ حـ ء) = ٦٠°

وبتطبيق قاعدة لامي يكون : ∴ $\frac{ر_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_٢}{جا ١٢٠°} = \frac{٢٤}{جا ٩٠°}$

∴ $ر_١$ = ١٢ نيوتن ، $ر_٢ = ١٢\sqrt{٣}$ نيوتن.

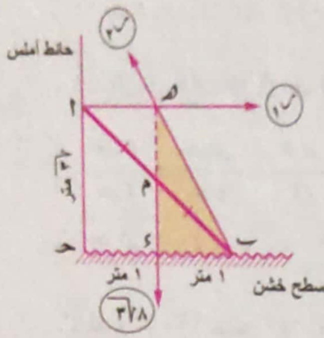
مثال ٦

$\overline{أ ب}$ سلم منتظم وزنه $٨\sqrt{٣}$ ثقل كجم ، يرتكز بطرفه العلوى أ على حائط رأسي أملس وبطرفه السفلى ب على أرض أفقية خشنة بحيث كان الطرف العلوى للسلم يبعد عن سطح الأرض بمقدار $\sqrt{٣}$ مترًا والطرف السفلى يبعد عن الحائط مسافة ٢ متر.

أوجد مقدار الضغط على كل من الحائط والأرض في وضع الاتزان.

الحـــل

السلم متزن بتأثير ثلاث قوى :



١ وزن السلم ومقداره $8\sqrt{3}$ ثقل كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل من منتصف السلم (م).

٢ رد فعل الحائط الأملس ومقداره ($ر_١$) وهو عمودى على الحائط عند أ

٣ رد فعل الأرض الخشنة ومقداره ($ر_٢$)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن ورد فعل الحائط يتقاطعان فى نقطة (هـ) مثلاً.

∴ خط عمل قوة رد فعل الأرض لابد وأن يمر بالنقطة هـ أيضًا ويكون Δ ء ب هـ هو مثلث القوى حيث :

ء هـ = أ حـ = $\sqrt{3}$ مترًا ، ب ء = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ١ مترًا.

، ب هـ = $\sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}$ = ٢ متر.

ويتطبيق قاعدة مثلث القوى يكون :

$$\frac{ر_١}{ب ء} = \frac{ر_٢}{ب هـ} = \frac{8\sqrt{3}}{ء هـ}$$

$$\therefore \frac{ر_١}{1} = \frac{ر_٢}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

∴ $ر_١$ = ٨ ثقل كجم ، $ر_٢$ = ١٦ ثقل كجم.

∴ الضغط على الحائط = ٨ ثقل كجم ، الضغط على الأرض = ١٦ ثقل كجم.

ملاحظـــة

ضغط طرفى السلم على كل من الأرض والحائط يساوى مقدارًا ردى فعل الأرض والحائط على طرفى السلم.

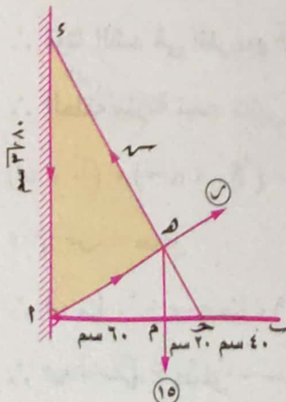
مثال ٧

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ١٥ ث.كجم ، يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى، حفظ القضيب فى وضع أفقى بربطه من إحدى نقطه حـ حيث أ حـ = ٨٠ سم بأحد طرفى خيط ، ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ء على الحائط الرأسى فوق أ وعلى بعد $80\sqrt{3}$ سم منها.

احسب مقدار كل من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

الحـــل

القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :



١ وزنه ١٥ ث.كجم ويؤثر رأسيًا إلى أسفل عند (م) منتصف $\overline{أب}$

٢ قوة الشد فى الخيط ش

٣ رد فعل المفصل (ر)

، ∵ خطى عمل قوتى الوزن والشد يتلاقيان فى نقطة هـ

∴ خط عمل رد فعل المفصل يمر بالنقطة هـ أيضًا

∴ Δ أ هـ ء هو مثلث القوى.

، ∵ حـ ى = $\sqrt{(٨٠)^٢ + (٨٠\sqrt{٣})^٢}$ = ١٦٠ سم

، ∵ Δ حـ م هـ ~ Δ حـ ا ى

∴ $\frac{حـ م}{حـ ا} = \frac{حـ هـ}{حـ ى} = \frac{م هـ}{ا ى}$ ∴ $\frac{٢٠}{٨٠} = \frac{حـ هـ}{١٦٠} = \frac{م هـ}{٨٠\sqrt{٣}}$

∴ حـ هـ = ٤٠ سم ، م هـ = $٢٠\sqrt{٣}$ سم

∴ هـ ى = ١٢٠ سم ، ا هـ = $\sqrt{(٦٠)^٢ + (٢٠\sqrt{٣})^٢}$ = $٤٠\sqrt{٣}$ سم

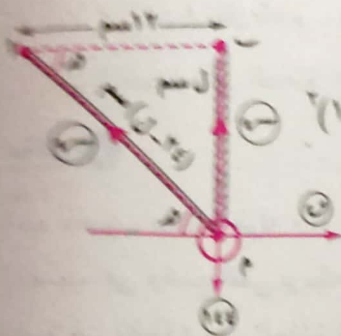
وبتطبيق قاعدة مثلث القوى : ∴ $\frac{ر}{٤٠\sqrt{٣}} = \frac{ش}{١٢٠} = \frac{١٥}{٨٠\sqrt{٣}}$

∴ ر = ٧,٥ ث كجم ، ش = $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ ث كجم

مثال ٨

خيط طوله ٢٤ سم مثبت من نهايتيه في مسمارين ا ، ب في خط أفقي واحد البعد بينهما ١٢ سم. انضمت حلقة صغيرة ملساء وزنها ١٤٤ داين في الخيط ثم جذبت بقوة أفقية $\overline{ق}$ حتى اتزنت رأسيًا أسفل ب أوجد مقدار الشد في كل من فرعي الخيط ومقدار القوة $\overline{ق}$

الحل



يفرض أن ب م = ل سم ∴ ا م = (٢٤ - ل) سم

، ∵ ق (∠ ا ب م) = ٩٠° ∴ $(٢٤ - ل)^٢ = ل^٢ + (١٢)^٢$

∴ ٥٧٦ - ٤٨ ل + $ل^٢ = ل^٢$ + ١٤٤ ∴ ل = ٩ سم

∴ م ب = ٩ سم ، ا م = ١٥ سم

، ويفرض أن ق (∠ م ا ب) = هـ

∴ جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

، ∵ الحلقة ملساء

∴ قوتا الشد في الفرعين $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ا}$ متساويتان في المقدار

∴ الحلقة متزنة تحت تأثير أربع قوى هي :

(ق ، ٠°) ، (ش ، ٩٠°) ، (ش ، ١٨٠° - هـ) ، (١٤٤ ، ٢٧٠°)

لاحظ أن

الحلقة متزنة تحت تأثير أربع قوى وبالتالي تحل باستخدام طريقة التحليل السابق دراستها في الدرس الثالث س = ٠ ، ص = ٠

، ∵ س = صفر

∴ ق جتا ٠° + ش جتا ٩٠° + ش جتا (١٨٠° - هـ) + ١٤٤ جتا ٢٧٠° = صفر

∴ ق + ش × صفر - ش جتا هـ + ١٤٤ × صفر = صفر

$\therefore$ ق − $\frac{٤}{٥}$ ش = ٠ (١)

، $\because$ ص = صفر

$\therefore$ ق جا ٠° + ش جا ٩٠° + ش جا (١٨٠° − هـ) + ١٤٤ جا ٢٧٠° = صفر

$\therefore$ ق × صفر + ش × ١ + ش جا هـ + ١٤٤ × −١ = صفر

$\therefore$ ش + $\frac{٣}{٥}$ ش − ١٤٤ = ٠ $\therefore$ ش $\left(١ + \frac{٣}{٥}\right)$ = ١٤٤

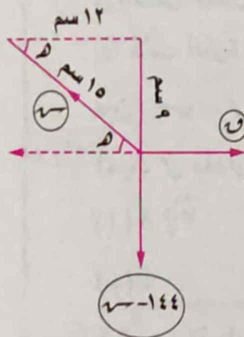
$\therefore$ ش = ٩٠ داين.

ومن (١) : $\therefore$ ق = $\frac{٤}{٥}$ × ٩٠ = ٧٢ داين.

حل آخر :

$\because$ الوزن والشد الرأسى على استقامة واحدة

$\therefore$ يمكن تحصيلهما فى القوة (١٤٤ − ش) ونستخدم قاعدة لامى.



$\therefore$ $\frac{ق}{جا (٩٠° + هـ)}$ = $\frac{ش}{جا ٩٠°}$ = $\frac{١٤٤ − ش}{جا (١٨٠° − هـ)}$

$\therefore$ $\frac{ق}{جتا هـ}$ = $\frac{ش}{١}$ = $\frac{١٤٤ − ش}{جا هـ}$

$\therefore$ $\frac{ق}{\frac{٤}{٥}}$ = ش = $\frac{١٤٤ − ش}{\frac{٣}{٥}}$

$\therefore$ $\frac{٣}{٥}$ ش = ١٤٤ − ش

$\therefore$ $\frac{٨}{٥}$ ش = ١٤٤ $\therefore$ ش = ٩٠ داين.

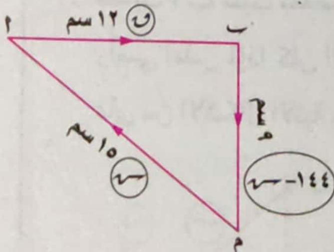
، ق = ٩٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ٧٢ داين.

حل ثالث :

$\because$ الوزن والشد الرأسى على استقامة واحدة.

$\therefore$ يمكن تحصيلهما فى القوة (١٤٤ − ش)

ويصبح Δ أ ب م هو مثلث القوى.



$\therefore$ $\frac{١٤٤ − ش}{٩}$ = $\frac{ش}{١٥}$ = $\frac{ق}{١٢}$

$\therefore$ $\frac{١٤٤ − ش}{٣}$ = $\frac{ش}{٥}$

$\therefore$ ٣ ش = ٧٢٠ − ٥ ش $\therefore$ ٨ ش = ٧٢٠

$\therefore$ ش = ٩٠ داين. $\therefore$ $\frac{٩٠}{١٥}$ = $\frac{ق}{١٢}$ $\therefore$ ق = ٧٢ داين.

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) كرة مصمتة وزنها ١٥ ث.جم طول نصف قطرها ١٠ سم متزنة بتأثير خيط طوله ١٠ سم متصل بنقطة على سطحها وطرفه الآخر متصل بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن : (ر ، ش) = ...

(أ) $(٤\sqrt{٣} ، ٨\sqrt{٣})$ (ب) $(٥\sqrt{٣} ، ١٠\sqrt{٣})$ (جـ) (٥ ، ١٠) (د) $(٥\sqrt{٣} ، ٨\sqrt{٣})$

(٢) فى الشكل المقابل :

إذا كانت الكرة فى وضع اتزان والحائط أملس

فإن : ش - ر = ... نيوتن.

(حيث ر مقدار رد فعل الحائط على الكرة)

(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$

(جـ) ٤ (د) ٨

(٣) كرة مصمتة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم طول نصف قطرها ٥ سم متزنة بربطها بخيط طوله ٥ سم مربوط بنقطة على سطحها وطرفه الآخر بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن رد فعل المستوى الرأسى ر = ... ث.جم.

(أ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ (ب) ٢٠ (جـ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}}$ (د) صفر

(٤) فى الشكل المقابل :

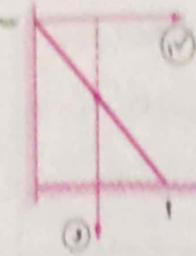
قضيب $\overline{أب}$ مثبت بمفصل عند أ من حائط رأسى أملس فإذا كان القضيب متزن

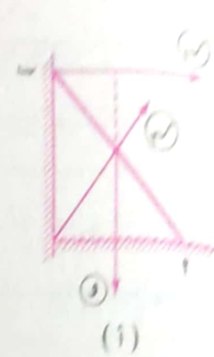
فأى من الأشكال الآتية يوضح اتجاه رد فعل المفصل ؟

(أ) (ب) (جـ) (د)

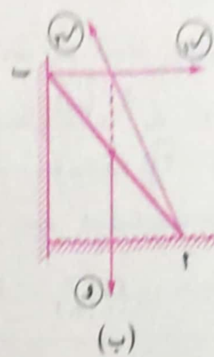
في الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه و يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس فأى من الأشكال الآتية يوضح الاتجاه الصحيح لرد فعل الأرض ؟

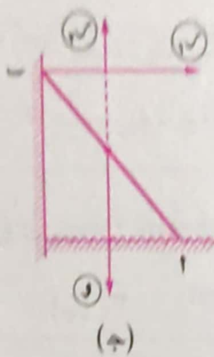




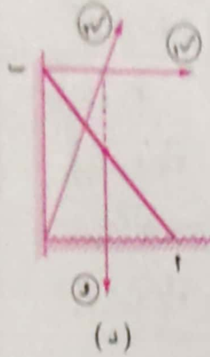
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

⑥ في الشكل المقابل :

اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....

(أ) في اتجاه $\overleftarrow{أب}$

(ب) في اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$

(جـ) ينصف $\overline{بحـ}$

(د) عمودى على $\overline{بحـ}$

حائط رأسى — خيط خفيف — مفصل — قضيب منتظم

⑦ في الشكل المقابل :

ر₁ : ر₂ : و = ...

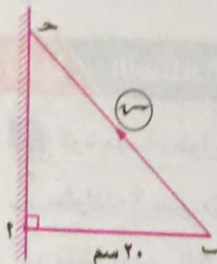
(أ) ٥ : ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٣ : ٥ (د) ٥ : ٤ : ٣

٤٠ سم — ٣٠ سم

⑧ في الشكل المقابل :

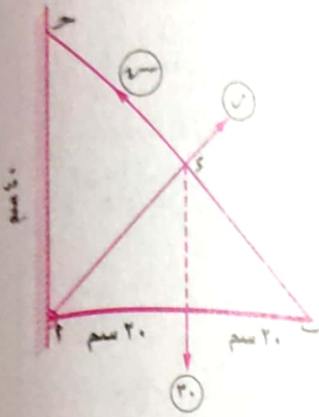
$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن ، متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ ، والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ √٢ سم ، ومثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ ، اتزن القضيب فى وضع أفقى ، فإن رد فعل المفصل = ... نيوتن.



(أ) ١٠ √٢ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ √٢

(٩) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب وعند حـ حيث حـ تقع رأسيًا فوق أ ، أحـ = ٤٠ سم



أولًا : رد فعل المفصل ر = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٤٠\sqrt{٢}$ (د) $١٥\sqrt{٢}$

ثانيًا : الشد فى الخيط $\overline{بحـ}$ = ... نيوتن.

(أ) $١٥\sqrt{٢}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) $٤٠\sqrt{٢}$

(١٠) ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن قابلة للحركة حول مفصل عند أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية مقدارها ١٠ نيوتن تؤثر فى طرفها الآخر فإن قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن = ...

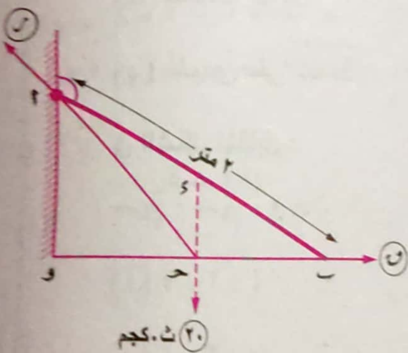
(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٣٠° (د) ٩٠°

(١١) قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° فإن مقدار رد فعل كل من المستويين .... نيوتن.

(أ) ١٢ ، ١٥ (ب) ١٢ ، $١٢\sqrt{٣}$ (جـ) $١٢\sqrt{٣}$ ، ١٠ (د) ١٥ ، ١٣

(١٢) فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ متر ووزنه ٢٠ ث.كجم متصل بمفصل على حائط رأسى عند أ أثرت قوة أفقية عند الطرف ب فإذا حفظ القضيب فى وضع يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°



فإن قوة رد فعل المفصل على القضيب = ... ث.كجم.

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ (ب) $١٠\sqrt{٥}$ (جـ) $١٠\sqrt{٧}$ (د) $٢٠\sqrt{٢}$

ثانيًا الأسئلة المقالية

(١) كرة ملساء طول نصف قطرها ٣٠ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جرام تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة بخيط طوله ٢٠ سم مثبت أحد طرفيه على سطح الكرة ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة تماس الكرة بالحائط.

أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل الحائط فى وضع الاتزان. «٢٥٠ ، ١٥٠ ثقل جم»

٢ كرة ملساء وزنها $10\sqrt{3}$ ثقل جم تستند على حائط رأسى أملس ومعلقة من إحدى نقط سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر فى نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق نقطة التماس وكان الخيط يصنع مع الرأسى زاوية قياسها 30° أوجد الشد فى الخيط ورد فعل الحائط فى وضع الاتزان. «٢٠ ، ١٠ ثقل جم»

٣ كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس ومعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها وطرفه الآخر مربوط فى الحائط فى نقطة أعلى نقطة تماس الكرة تمامًا. فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على الحائط والشد فى الخيط فى وضع الاتزان. «$5\sqrt{3}$ ، $10\sqrt{3}$ نيوتن»

٤ كرة معدنية وزنها ١٥ ثقل كجم موضوعة بحيث تمس مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها 30° أوجد رد فعل كل من المستويين. «$15\sqrt{3}$ ، ٣٠ ثقل كجم»

٥ علق قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ٣٠ ثقل كجم من طرفيه أ ، ب بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فى نقطة حـ فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحـ = ٥٠ سم فأوجد فى وضع التوازن الشد فى كل من الحبلين. «١٥ ، $15\sqrt{3}$ ثقل كجم»

٦ علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقًا مطلقًا فى خيطين مربوطين فى نقطة واحدة وكان طول أحدهما ٥٠ سم وطول الآخر ١٢٠ سم. ما هو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزنًا ؟ وما هو مقدار الشد فى كل من الخيطين ؟ «٢٤ ، ١٠ نيوتن»

٧ 📖 $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب ، وبنقطة حـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٦٠ سم. أوجد كلاً من الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ «$20\sqrt{2}$ ، $20\sqrt{2}$ نيوتن»

٨ $\overline{أب}$ ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٢٤ ثقل كجم والطرف أ مثبت فى مفصل مثبت فى حائط رأسى والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله $80\sqrt{3}$ سم مثبت طرفه الآخر فى نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد من أ يساوى ٨٠ سم فإذا اتزنت الساق فأوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل. «$12\sqrt{3}$ ، ١٢ ثقل كجم»

٩ 📖 كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة. أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ٦٠ نيوتن فى وضع الاتزان. «$20\sqrt{3}$ ، $20\sqrt{3}$ نيوتن»

١٠ كرة مركزها (م) وطول نصف قطرها ١٢ سم ووزنها (و) نيوتن تستند عند نقطة ب على حائط رأسى أملس ومربوطة من نقطة حـ على سطحها بخيط مثبت طرفه الآخر فى نقطة أ من الحائط تقع رأسيًا أعلى نقطة ب فإذا كان الشد فى الخيط مقداره ٥٠ نيوتن فأوجد طول الخيط ووزن الكرة عندما يكون رد فعل الحائط على الكرة يساوى ٢٥ نيوتن. «١٢ سم ، ٢٥ $\sqrt{3}$ نيوتن»

١١ قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن علق من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى مسمار فى السقف فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحدهما ٤٨ سم فما مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقًا مطلقًا وفى حالة توازن ؟ «٧,٢ ، ٩,٦ نيوتن»

١٢ $\overline{أب}$ سلم منتظم وزنه ٣٦ ثقل كجم يرتكز بأحد طرفيه (أ) على حائط رأسى أملس وبطرفه الآخر (ب) على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم فى وضع التوازن عندما يكون طرفه (أ) على بُعد ٣ أمتار من الأرض وطرفه (ب) على بُعد ٢,٥ متر من الحائط.أوجد رد فعل كل من الأرض والحائط على السلم. «١٥ ، ٣٩ ثقل كجم»

١٣ $\overline{أب}$ قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ثقل كجم يؤثر عند نقطة ء من القضيب حيث أء = ٢٠ سم ثبت القضيب فى مفصل عند أ والمفصل مثبت فى حائط رأسى وربط الطرف ب للقضيب بخيط خفيف مثبت نهايته فى نقطة حـ على الحائط تقع رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ٨٠ سم من أ فاتزن القضيب بحيث كان عموديًا على الحائط. أوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل. «$6\frac{2}{3}$ ، $\frac{4\sqrt{73}}{3}$ ثقل كجم»

١٤ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢ ل سم ووزنه ٨ ثقل كجم يؤثر فى منتصفه ويتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى وطرفه ب مربوط فى إحدى نهايتى خيط خفيف والنهاية الأخرى للخيط مثبتة فى نقطة حـ على الحائط وتقع رأسيًا أعلى أ فإذا كان أب = أحـ = ب حـ فى وضع الاتزان.

فأوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل عند أ «٤ ، ٤ $\sqrt{3}$ ثقل كجم»

١٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى والطرف ب مربوط بخيط طوله ٨٠ سم مثبت نهايته فى نقطة على الحائط رأسيًا فوق أ وعلى بُعد ١٠٠ سم منها فاتزن القضيب. أوجد الشد فى الخيط ، رد فعل المفصل وكذلك قياس زاوية ميل رد فعل المفصل على القضيب. «$\frac{2}{5}$و ، $\frac{\sqrt{13}}{5}$ و ثقل كجم ، ٤١ َ ٣٣°»

١٦ قضيب منتظم $\overline{أب}$ طوله ٩٠ سم ووزنه (و) ثقل كجم. ثبت طرفه (أ) فى حائط رأسى بواسطة مفصل وحفظ القضيب فى حالة توازن وهو فى وضع أفقى بواسطة خيط طوله ٥٠ سم ربط أحد طرفيه بنقطة (حـ) على القضيب تبعد عن أ بمقدار ٣٠ سم وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة (ء) على الحائط تقع رأسيًا فوق أ احسب الشد فى الخيط ورد فعل المفصل على القضيب. «$\frac{15}{8}$و ، $\frac{\sqrt{97}}{8}$ و ثقل كجم»

١٧ قضيب منتظم $\overline{أب}$ يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى. أثرت فى الطرف ب قوة أفقية فاتزن القضيب عندما كان يميل على الحائط بزاوية قياسها ٤٥° فإذا كان وزن القضيب ٤ ث.كجم ويؤثر فى منتصفه أوجد مقدار القوة ورد فعل المفصل على القضيب.

«٢ ، ٢ $\sqrt{٥}$ ث.كجم»

١٨ ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية تؤثر فى طرفها الآخر وتساوى نصف ثقل الساق. أوجد قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن وكذلك رد الفعل عند الطرف الأول.

«٤٥° ، $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ وزن الساق»

١٩ وضع قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن على مستويين أملسين متقابلين ويميلان على الأفقى بزاويتين قياساهما ٣٠° ، ٦٠° بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستوى رأسى واحد. أوجد مقدار الضغط على كل من المستويين وكذا قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن.

«٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢ نيوتن ، ٣٠°»

٢٠ كرة ملساء من الحديد وزنها (و) ثقل كجم مستقرة بين حائط رأسى أملس ، مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإذا اتزنت الكرة فأوجد الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل.

«$\frac{٤}{٣}$و ، $\frac{٥}{٣}$و ثقل كجم»

٢١ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على مستوى رأسى أملس وبالطرف الآخر على مستوى مائل أملس يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° أوجد فى وضع التوازن مقدار كل من ردى فعل المستويين وكذلك قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى.

«$\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{٤٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم ، ٤٩ َ ٩°»

٢٢ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٨ نيوتن يؤثر فى منتصفه وضع على مستويين أملسين مائلين على الأفقى ومتقابلين ومتعامدين بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستو رأسى واحد عمودى على خط تقاطع المستويين. فإذا كان مقدار الضغط على المستوى عند الطرف ب يساوى ٤ نيوتن. فأوجد فى وضع التوازن مقدار الضغط على المستوى الآخر وقياسى زاويتى ميل كل من المستويين على الأفقى.

«٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٣٠° ، ٦٠°»

٢٣ كرة ملساء جوفاء طول نصف قطرها (نق) ووزنها ١٢ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم موضوعة على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° حفظت الكرة من الانزلاق على المستوى بواسطة ربطها بخيط من نقطة على سطحها وطول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة وثبتت نهاية الخيط فى نقطة على المستوى المائل. أثبت أنه فى وضع التوازن يكون هذا الخيط أفقيًا ثم أوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل السطح المائل على الكرة.

«١٢ ، ٢٤ ثقل كجم»

٢٤ قضيب منتظم $\overline{أ ب}$ يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسى حول مفصل فى أ ، ربط طرفه الآخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند حـ أعلى أ تمامًا ويحمل ثقلًا يساوى نصف ثقل القضيب.

أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن إذا علم أن أ حـ = أ ب «٣٠°»

٢٥ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ١٢ نيوتن يستند بطرفه أ على حائط رأسى أملس ومحمول بواسطة خيط خفيف مربوط أحد طرفيه فى نقطة حـ من نقط القضيب حيث ب حـ = ١٠ سم ومربوط طرفه الآخر فى نقطة ء تقع على الحائط رأسيًا فوق أ إذا كان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠° فى وضع التوازن فأوجد مقدار الشد فى الخيط ، رد فعل الحائط. «$٨\sqrt{٣}$ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن»

٢٦ قضيب منتظم $\overline{أ ب}$ طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ثقل كجم يتصل طرفه (أ) بحائط رأسى بواسطة مفصل ، حفظ القضيب فى وضع أفقى ، بربطه من إحدى نقطه (حـ) حيث أ حـ = ٤ أمتار بأحد طرفى خيط ثم ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة (ء) على الحائط الرأسى فوق (أ) وعلى بُعد ٤ أمتار منها.

احسب مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل فى وضع الاتزان. «$٦\sqrt{٢}$ ، $٢\sqrt{١٠}$ ثقل كجم»

مسائل تحل باستخدام التحليل

٢٧ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٣}{٥}$ وحفظ الجسم فى حالة الاتزان بواسطة قوة تميل على خط أكبر ميل بزاوية قياسها ى حيث جا ى = $\frac{١٢}{١٣}$

أوجد ق ورد فعل المستوى. «٦٥ ، ٥٥ نيوتن»

٢٨ وضع جسم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن على المستوى بواسطة قوتين إحداهما فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى ومقدارها ٥٠ نيوتن والثانية تميل على خط أكبر ميل إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° ومقدارها $٢٠\sqrt{٣}$ نيوتن. أوجد كلًا من وزن الجسم ورد فعل المستوى.

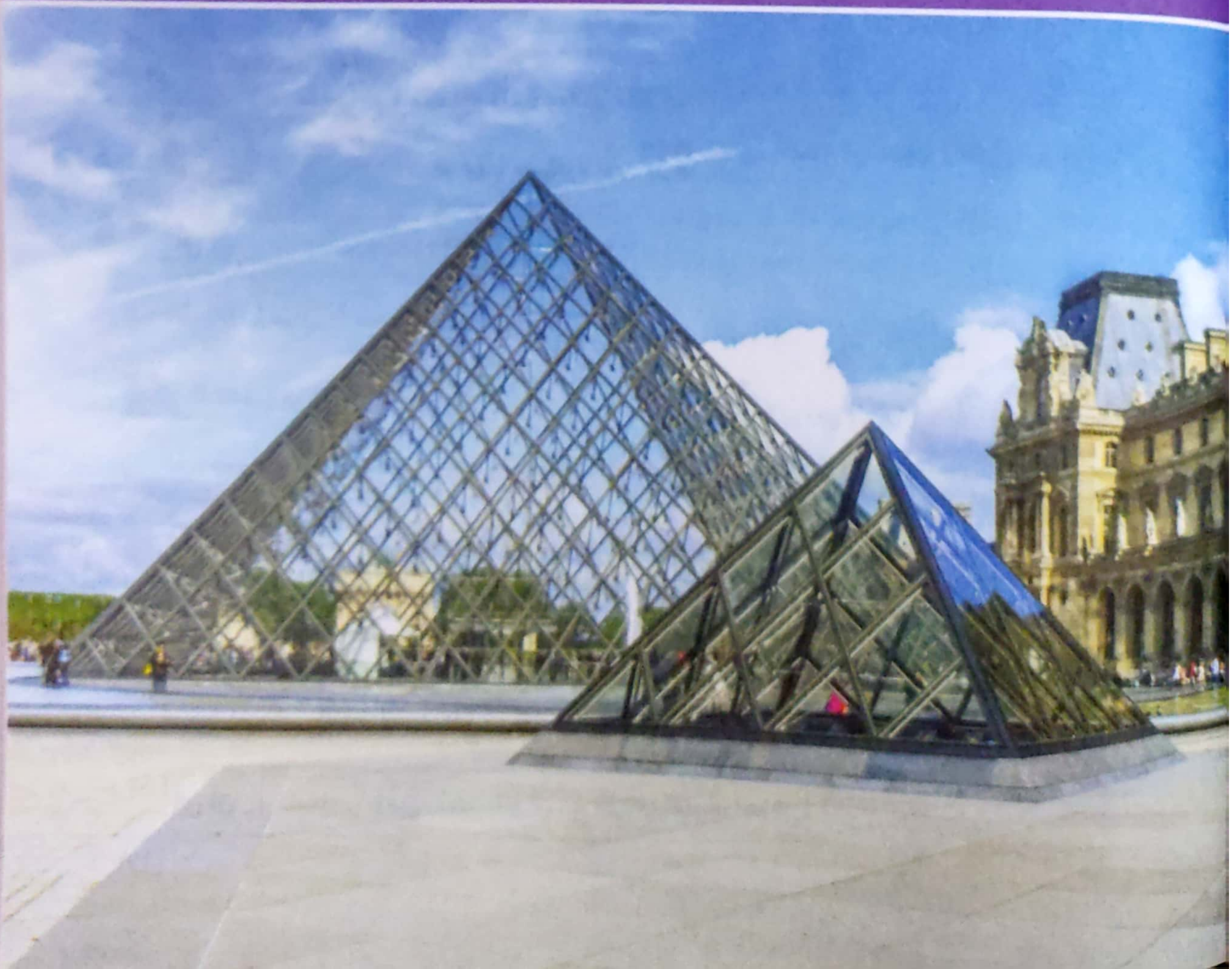
«١٦٠ ، $٧٠\sqrt{٣}$ نيوتن»

٢٩ حلقة ملساء يمر خلالها خيط خفيف طوله ٤٠ سم. مثبت طرفاه فى نقطتين أ ، ب على خط أفقى واحد البعد بينهما ٢٠ سم. أثرت على الحلقة قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ فاتزنت الحلقة رأسيًا أسفل ب وكان الخيط مشدودًا.

أوجد قيمة ق ومقدار قوة الشد فى الخيط علمًا بأن وزن الحلقة ٤٠٠ ثقل جم «٢٠٠ ، ٢٥٠ ث جم»

الوحدة الثانية

الهندسة والقياس



الدرس 1

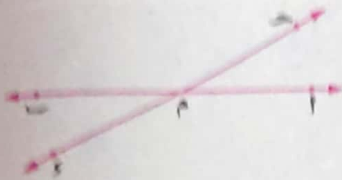
المستقيمات والمستويات فى الفراغ

مفاهيم ومسلمات هندسية

١ الخط المستقيم

هو مجموعة غير منتهية من النقط ويتحدد تحديدًا تامًا إذا علم أى نقطتين مختلفتين عليه.

فمثلًا : فى الشكل المقابل :



النقطتان أ ، ب يمر بهما مستقيم واحد وواحد فقط هو $\overleftrightarrow{أب}$ بينما النقطتان حـ ، ء يمر بهما مستقيم آخر $\overleftrightarrow{حـء}$

أى أن | المستقيم يتعين بنقطتين مختلفتين عليه.

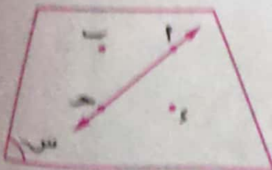
ملاحظة : $\overline{أب} \subset \overrightarrow{أب} \subset \overleftrightarrow{أب}$

٢ المستوى

هو مجموعة غير منتهية من النقط تمثل سطحًا لا حدود له بحيث إن المستقيم المار بأى نقطتين فيه يقع بأكمله على ذلك السطح.

ويرمز للمستوى بأحد الحروف الكبيرة مثل س أو ص أو ...

كما يمكن أن نرمز له بثلاث نقط على الأقل تقع فى المستوى بشرط أن تكون النقط ليست على استقامة واحدة مثل :: أ ب حـ



أى أن | المستوى يتعين بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

ملاحظتان

1 الأشكال الهندسية مثل المثلث والمربع والدائرة و ... هي مجموعات غير منتهية من النقط ومثل هذه الأشكال تسمى أشكالاً هندسية مستوية لأن كلًا منها مجموعة جزئية من مستواها.

2 حيث إن المستوى ممتد من جميع جهاته بلا حدود لذلك سنكتفي عند تمثيله بتمثيل جزء منه بشكل هندسي مستوى مثل المربع أو الدائرة أو متوازي الأضلاع .. وهكذا.

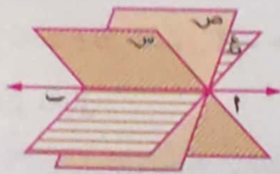
٣ الفــراغ (الفضاء)



هو مجموعة غير منتهية من النقط وهو الذي يحتوي جميع المستقيمات والمستويات والمجسمات محل الدراسة.

فالمجسمات مثل الكرة والأسطوانة والمكعب ، ... هي مجموعات غير منتهية من النقط ولكنها ليست محتواة في مستوى واحد ولكن محتواة في الفراغ الكبير المحيط بنا وسطوح هذه المجسمات تتكون من عدة أجزاء مستوية كما في المكعب أو غير مستوية كما في الكرة.

ملاحظات



1 أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات.

2 أي نقطة في الفراغ يمر بها عدد لا نهائي من المستويات.

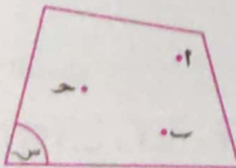
3 أي نقطتين في الفراغ يمر بها مستقيم واحد فقط.

4 أي نقطتين في الفراغ يمر بهما عدد لا نهائي من المستويات.

تعيين المستوى في الفراغ

يتحدد المستوى تحديدًا تامًا في الفراغ بإحدى الحالات الآتية :

١ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة



ففي الشكل المقابل :

النقط أ ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة

لذلك يتعين المستوى س أو أ ب حـ

ومن ذلك يمكن استنتاج أن :

أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة في الفراغ يمر بها مستوى واحد فقط.

٢ مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه

فى الشكل المقابل :

$أ \notin \overleftrightarrow{ب حـ}$ ولذلك النقطة أ

والمستقيم $\overleftrightarrow{ب حـ}$ يعينان المستوى س أو أ ب حـ

٣ مستقيمان متقاطعان

فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$

لذلك $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يعينان المستوى ع

٤ مستقيمان متوازيان غير منطبقين

فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{أ ب} // \overleftrightarrow{حـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء} = \emptyset$

لذلك $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ يعينان المستوى ل

مثال ١

فى الشكل المقابل :

إذا كانت م $\notin$ المستوى أ ب حـ ء

فاذكر ما يأتى :

١ أربع مستقيمات تمر بالنقطة أ

٢ ثلاث مستويات تمر بالنقطة أ

٣ المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٤ مستويين كل منهما يمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٥ أربع مستويات تمر بالنقطة م

٦ عدد المستويات التى تحدد سطح المجسم فى الشكل.

الحل

١ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ حـ}$ ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ م}$

٢ أ ب حـ ء ، أ ب م ، أ ء م

٣ $\overleftrightarrow{أ ب}$

٤ أ ب حـ ء ، أ ب م

٥ م أ ب ، م ب حـ ، م حـ ء ، م ء أ

٦ خمسة مستويات.

الأوضاع النسبية للمستقيمات والمستويات فى الفراغ

١ الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين فى الفراغ

المستقيمان المتقاطعان	المستقيمان المتوازيان	المستقيمان المتخالفان
هما مستقيمان يقعان فى نفس المستوى ويشتركان فى نقطة واحدة.	هما مستقيمان يقعان فى نفس المستوى ولا يشتركان فى أى نقطة.	هما مستقيمان لا يمكن أن يحتويهما مستوى واحد.
• $ل_١$ ، $ل_٢$ متقاطعان • $ل_١ \cap ل_٢ = \{أ\}$ • يجمعهما مستوٍ واحد.	• $ل_١ // ل_٢$ • $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ • يجمعهما مستوٍ واحد.	• $ل_١$ ، $ل_٢$ متخالفان • $ل_١ \cap ل_٢ = \emptyset$ • لا يجمعهما مستوٍ واحد.

لاحظ أن

المستقيمان المتخالفان غير متوازيين وغير متقاطعين لأنه لا يجمعهما مستوى واحد.

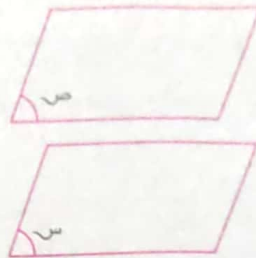
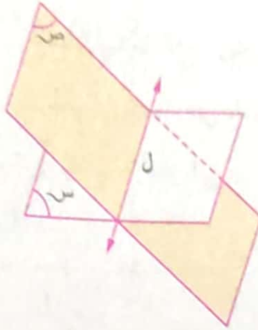
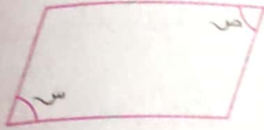
٢ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو فى الفراغ

المستقيم يوازى المستوى	المستقيم قاطع للمستوى	المستقيم محتوى فى المستوى
المستقيم ل // المستوى س أى : $ل \cap س = \emptyset$	المستقيم ل يقطع المستوى س فى نقطة واحدة أى : $ل \cap س = \{أ\}$	المستقيم ل يقع بأكمله فى المستوى س ($ل \subset س$) أى : $ل \cap س = ل$

لاحظ أنه

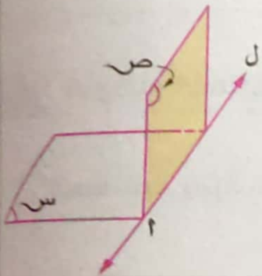
إذا اشترك مستقيم ومستوى فى أكثر من نقطة واحدة فإن المستقيم يقع بتمامه داخل المستوى.

٣ الأوضاع النسبية لمستويين فى الفراغ

المستويان المتوازيان	المستويان المتقاطعان	المستويان المنطبقان
		
المستوى س // المستوى ص **أى :** س ∩ ص = ∅	المستويان س ، ص متقاطعان فى خط مستقيم ل **أى :** س ∩ ص = ل	المستويان س ، ص يشتركان فى جميع النقط (منطبقان) **أى :** س ∩ ص = س = ص

ملاحظات

١ إذا اشترك مستويان مختلفان فى نقطة فإنهما يشتركان فى مستقيم يمر بهذه النقطة.

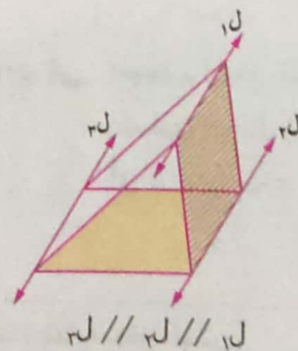


فى الشكل المقابل : المستويان س ، ص يشتركان فى نقطة أ

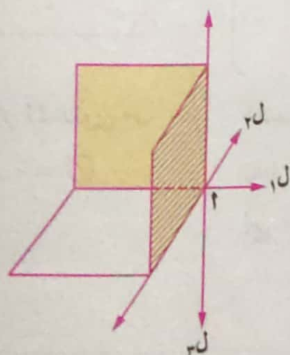
∴ المستويان س ، ص يشتركان فى المستقيم ل

أى أن : س ∩ ص = ل حيث أ ∈ ل

٢ إذا تقاطعت ثلاثة مستويات مثنى مثنى فإن مستقيمات تقاطعها إما أن تكون متوازية أو متقاطعة جميعًا فى نقطة واحدة.



$ل_1$ // $ل_2$ // $ل_3$



$ل_1$ ∩ $ل_2$ ∩ $ل_3$ = {أ}

٣ المستقيمان الموازيان لثالث في الفراغ متوازيان

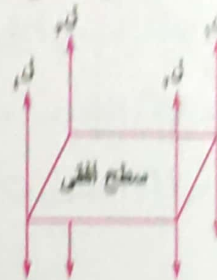
أي أن : لأي ثلاثة مستقيمات $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ في الفراغ

إذا كان : $ل_١$ // $ل_٣$ ، $ل_٢$ // $ل_٣$

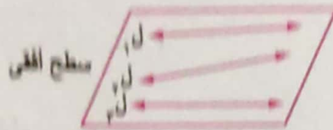
فإن : $ل_١$ // $ل_٢$



٤ المستقيمات الرأسية في الفراغ كلها متوازية ولكن ليس بالضرورة أن تكون المستقيمات الأفقية كلها متوازية.

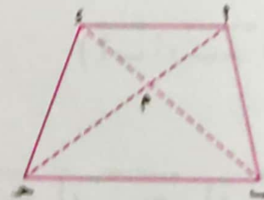


المستقيمات الرأسية $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، $ل_٤$ كلها متوازية.



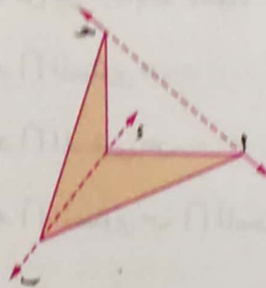
المستقيمات الأفقية $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، ... ليس بالضرورة متوازية.

٥ إذا تقاطع المستقيمان الحاملان لقطري الشكل الرباعي في نقطة فإن أضلاعه تقع جميعًا في مستوى واحد.



الشكل الرباعي أ ب حـ ء أضلاعه تقع في مستوى واحد

لأن : $\overleftrightarrow{أحـ} \cap \overleftrightarrow{ب ء} = \{م\}$



الشكل الرباعي أ ب حـ ء أضلاعه لا تقع جميعًا في مستوى واحد

لأن : $\overleftrightarrow{أحـ} \cap \overleftrightarrow{ب ء} = \emptyset$

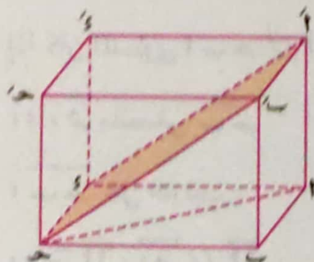
($\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ متخالفان)

مثال ٢

في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ متوازي مستطيلات

أكمل ما يأتي :



١ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ // المستوى ....

٢ $\overleftrightarrow{أ بَ}$ ، .... مستقيمان متخالفان.

٣ المستوى أ ب بَ أَ // المستوى ....

٤ المستوى أ ب ب َ أ َ ∩ المستوى أ َ ب َ جـ َ ء َ = ...

٥ المستوى أ ب جـ ∩ المستوى أ َ ب َ جـ َ ء َ = ...

٦ المستوى أ أ َ ء َ ء ∩ المستوى أ ب ب َ أ َ ∩ المستوى أ ب جـ ء = ...

الحل

١ أ أ َ ء َ ء أو أ َ ب َ جـ َ ء َ | ٢ ء ء َ أو أ أ َ (استنتج إجابات أخرى). | ٣ ء جـ جـ َ ء َ

٤ $\overleftrightarrow{\text{أ َ ب َ}}$ | ٥ $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ | ٦ {أ}

مثال ٣

في الشكل المقابل :

المستوى س ∩ المستوى ص = المستقيم ل

، أ ∈ س ، جـ ∈ ص ، ب ∈ ل

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ المستوى أ ب جـ ∩ المستوى س = ...

($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، {ب})

٢ المستوى أ ب جـ ∩ المستوى ص = ...

($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، {ب})

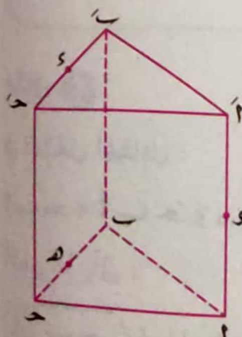
٣ المستوى أ ب جـ ∩ المستوى س ∩ المستوى ص = ...

($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ أ}}$ ، {ب})

الحل

١ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ٢ $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ٣ {ب}

مثال ٤



في الشكل المقابل :

إذا كان المستوى أ ب جـ // المستوى أ َ ب َ جـ َ

، ء ، هـ منتصفي $\overline{\text{ب َ جـ َ}}$

، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب

، و ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ أ َ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ أ َ}}$

١ اذكر أربعة مستويات تمر بالنقطة أ

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أ .... المستوى ءوهـ (∋ ، أ ∌ ، أ ⊃ ، أ ⊅)

(٢) $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ .... المستوى ءوهـ (∋ ، أ ∌ ، أ ⊃ ، أ ⊅)

(٣) $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{بَحَ}}$ مستقيمان .... (متوازيان أ، متخالفان أ، متقاطعان أ، متعامدان)

(٤) المستوى ءوهـ ∩ المستوى أَبَحَ = ... ($\overleftrightarrow{\text{أَء}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{وهـ}}$)

(٥) المستوى ءوهـ ∩ المستوى أبَأَ = ... ($\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{أَء}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$)

(٦) المستوى أهـأَ ∩ المستوى بَبحَ = ... ($\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{أهـ}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{أَء}}$ ، أ $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$)

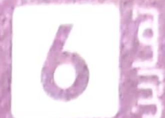
الحل

١ المستويات هي : أأَبَ ، أأَحَح ، أأَهـ ، أبح

٢ (١) ∋ (٢) ⊃

(٣) متخالفان. (٤) $\overleftrightarrow{\text{أَء}}$

(٥) $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ (٦) $\overleftrightarrow{\text{ءهـ}}$



على المستقيمات والمستويات فى الفراغ



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) عدد المستقيمات التى تمر بنقطة معلومة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٢) عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٣) عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٤) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٥) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٦) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيم ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين وغير منطبقين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٧) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

(٨) عدد المستويات التى تمر بمستقيمين متوازيين مختلفين = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٩) المستقيمان المتخالفان هما المستقيمان اللذان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

(١٠) يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

(١١) [ ] إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، $أ \in$ س فإن : ل $\cap$ س = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

(١٢) [ ] إذا كان المستقيم ل $\subset$ المستوى س ، $أ \in$ س فإن : ل $\cap$ س = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

(١٣) إذا كان المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ متخالفين فإن : $ل_1 \cap ل_2$ = ...

(أ) $\emptyset$ (ب) $ل_1$

(جـ) $ل_2$ (د) المستوى الذي يجمع $ل_1$ ، $ل_2$

(١٤) المستويان غير المتوازيين يتقاطعان في ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) مستوى. (د) شعاع.

(١٥) إذا كان : س ، ص مستويين بحيث س $\cap$ ص = $\emptyset$ فإن : س .... ص

(أ) $\perp$ (ب) // (جـ) = (د) $\subset$

(١٦) ينطبق المستويان إذا اشتركا في ....

(أ) نقطة واحدة. (ب) نقطتين.

(جـ) ثلاث نقاط على استقامة واحدة. (د) ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

(١٧) إذا اشترك المستقيم والمستوى في نقطتين فإن المستقيم ....

(أ) يوازي المستوى. (ب) يقطع المستوى في نقطة وحيدة.

(جـ) يقع بأكمله داخل المستوى. (د) يقطع المستوى في نقطتين فقط.

(١٨) إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن : ....

(أ) أب = ب حـ = أ حـ (ب) أب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أب + ب حـ > أ حـ (د) أب + ب حـ < أ حـ

(١٩) المستقيمات الرأسية المختلفة في الفراغ تكون ....

(أ) متوازية. (ب) متخالفة.

(جـ) يجمعها مستوٍ واحد. (د) متقاطعة.

(٢٠) الأوضاع النسبية لزوج من المستقيمات في المستوى الواحد هي كل ما يلي ما عدا ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان. (جـ) متخالفان. (د) منطبقان.

(٢١) إذا كانت : س ، ص ، ع مستويات في الفراغ بحيث : س $\cap$ ص $\cap$ ع = {أ}

، س $\cap$ ص = المستقيم ل. أي الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $أ \in$ ل (ب) ل $\cap$ ع = {أ} (جـ) ل // ع (د) $أ \in$ ع

(٢٢) إذا كانت م نقطة لا تنتمي للمستوى الذي يضم النقط أ ، ب ، حـ فإن : $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ....

(أ) يقع بأكمله داخل المستوى. (ب) يقطع المستوى في نقطة.

(جـ) يقطع المستوى في نقطتين. (د) يوازي المستوى.

(٢٣) إذا كان : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ $\subset$ المستوى س ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // المستوى س فإن : $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

(٢٤) س ، ص مستويان متوازيان وكان المستقيم ل$_{1}$ $\subset$ س ، المستقيم ل$_{2}$ $\subset$ ص فأي مما يأتي لا يمكن حدوثه ؟

(أ) ل$_{1}$ // ل$_{2}$ (ب) ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ متخالفان.

(جـ) ل$_{1}$ // ص ، ل$_{2}$ // س (د) ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ متقاطعين.

(٢٥) أقل عدد من المستويات التي يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٢٦) أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ متوازي مستطيلات كم مستقيم يحمل حرفًا من أحرف الشكل يكون مخالفًا للمستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ؟

(أ) لا يوجد. (ب) واحد. (جـ) اثنان. (د) أربعة.

(٢٧) أي الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أي نقطتين في الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة في الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.

(٢٨) أي الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أي مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان في نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

(٢٩) أي الجمل الآتية غير صحيحة ؟ حيث ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ مستقيمان ، س ، ص مستويان.

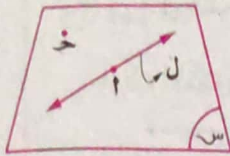
(أ) إذا كان : ل$_{1}$ $\cap$ ل$_{2}$ = $\varnothing$ فإن : ل$_{1}$ // ل$_{2}$ أو ل$_{1}$ ، ل$_{2}$ متخالفان.

(ب) إذا كان : ل$_{1}$ $\cap$ س = $\varnothing$ فإن : ل$_{1}$ // س

(جـ) إذا كان : ل$_{2}$ $\cap$ س = ل$_{2}$ فإن : ل$_{2}$ $\subset$ س

(د) إذا كان : ل$_{2}$ $\subset$ ص فإن : ل$_{2}$ $\cap$ ص = $\varnothing$

(٣٠) باستخدام الشكل المقابل :

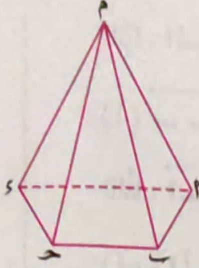


أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) ل ⊂ س　　　(ب) أ ∈ ل ، أ ∉ س

(جـ) حـ ∈ س ، حـ ∉ ل　　　(د) $\overline{\text{أحـ}}$ ∩ ل = {أ}

(٣١) فى الشكل المقابل :



المستوى أ ب د ∩ المستوى م حـ د = ...

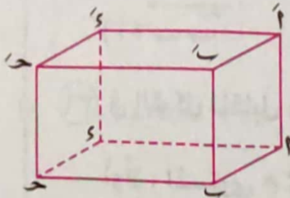
(أ) $\overleftrightarrow{\text{أم}}$

(ب) $\overleftrightarrow{\text{حـ د}}$

(جـ) {د}

(د) $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$

(٣٢) فى الشكل المقابل :

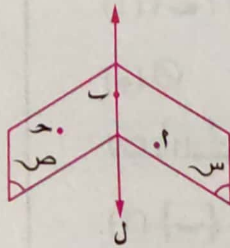


المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ حـ حـَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$　　　(ب) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ حـَ}}$　　　(د) $\overleftrightarrow{\text{أَحـَ}}$

(٣٣) فى الشكل المقابل :



المستوى س ∩ المستوى ص = ...

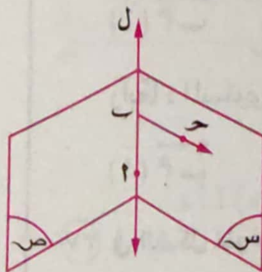
(أ) {ب}

(ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) المستقيم ل

(د) ∅

(٣٤) فى الشكل المقابل :



أولًا : ل .... س

(أ) ∈　　　(ب) ∉

(جـ) ⊂　　　(د) ⊄

ثانيًا : أ .... س

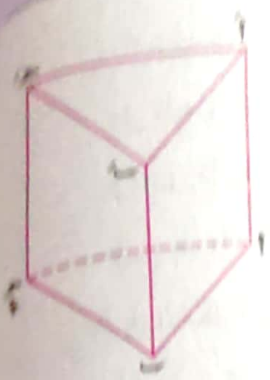
(أ) ∈　　　(ب) ∉　　　(جـ) ⊂　　　(د) ⊄

ثالثًا : حـ .... ص

(أ) ∈　　　(ب) ∉　　　(جـ) ⊂　　　(د) ⊄

رابعًا : $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ .... ص

(أ) ∈　　　(ب) ∉　　　(جـ) ⊂　　　(د) ⊄



(٣٥) في الشكل المقابل :

أولًا : المستوى أ ب ب' أ' $\cap$ المستوى ب ج ج' ب' = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ (ب) $\varnothing$

(ج) $\{\text{ب}'\}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$

ثانيًا : المستوى أ ب ج $\cap$ المستوى أ' ب' ج' = ...

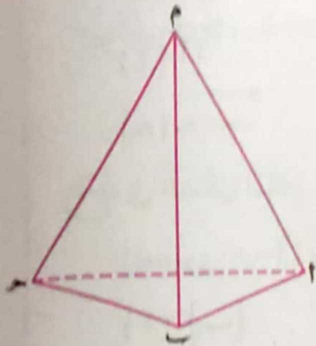
(أ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ (ب) $\varnothing$ (ج) $\overleftrightarrow{\text{أ أ}'}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أ}'\text{ ب}'}$

ثالثًا : $\overleftrightarrow{\text{أ ج}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ}'\text{ ج}'}$ = ...

(أ) $\{\text{أ}\}$ (ب) $\{\text{ج}\}$ (ج) $\overleftrightarrow{\text{أ أ}'} \cap \overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$

رابعًا : $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ $\cap$ المستوى أ ب ج = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{ب ب}'}$ (ب) $\{\text{ب}'\}$ (ج) $\{\text{ب}\}$ (د) $\varnothing$



(٣٦) في الشكل المقابل :

أولًا : المستوى م أ ب $\cap$ المستوى م ب ج = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

(ج) $\varnothing$ (د) $\{\text{م}\}$

ثانيًا : المستوى م ب ج $\cap$ المستوى أ ب ج = ...

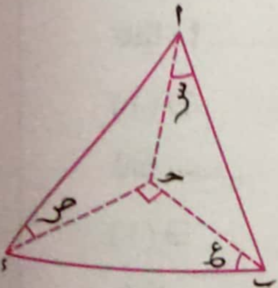
(أ) $\{\text{ب}\}$ (ب) $\varnothing$ (ج) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$

ثالثًا : $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ $\cap$ المستوى أ ب ج = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ (ب) $\varnothing$ (ج) $\{\text{ب}\}$ (د) $\{\text{م}\}$

رابعًا : المستوى م أ ب $\cap$ المستوى م ب ج $\cap$ المستوى م أ ج = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{م ج}}$ (ج) الجسم م أ ب ج (د) $\{\text{م}\}$



(٣٧) في الشكل الموضح أ $\notin$ المستوى ب ج د :

أولًا : س $\cap$ ص = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ (ب) $\varnothing$

(ج) $\{\text{أ}\}$ (د) $\{\text{ج}\}$

ثانيًا : س $\cap$ ع = ...

(أ) $\varnothing$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ (ج) $\overleftrightarrow{\text{أ ج}}$ (د) $\{\text{ج}\}$

ثالثًا : ص ∩ ع = ...

(أ) {حـ}　　(ب) $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$　　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$　　(د) ∅

رابعًا : $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ س = ...

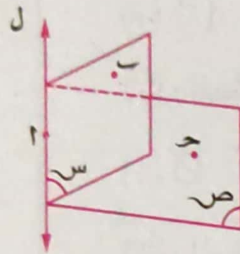
(أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$　　(ب) ∅　　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$　　(د) {ب}

خامسًا : بفرض أن : ق(∠ ب حـ ء) = ٩٠° ، ب حـ = ٣ سم ، حـ ء = ٤ سم

فإن : ب ء = ... سم

(أ) ٦　　(ب) ٥　　(جـ) ٤　　(د) ٧

(٣٨) في الشكل المقابل :



س ، ص مستويان متقاطعان في المستقيم ل ، أ ∈ ل

، ب ∈ س ، ب ∉ ص ، حـ ∈ ص ، حـ ∉ س

أولًا : المستوى س ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$　　(ب) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$　　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$　　(د) المستقيم ل

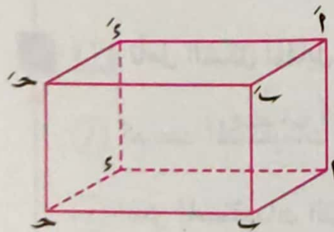
ثانيًا : المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$　　(ب) {أ}　　(جـ) $\overleftrightarrow{\text{بحـ}}$　　(د) $\overleftrightarrow{\text{أحـ}}$

ثالثًا : المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ∅　　(ب) المستقيم ل　　(جـ) {أ}　　(د) {ب}

(٣٩) في الشكل المقابل :



أولًا : المستوى أ ب حـ ء // المستوى ....

(أ) أ ب حـَ　　(ب) أَ بَ ءَ

(جـ) أ ب بَ　　(د) أَ بَ حـَ

ثانيًا : المستوى ب حـ حـَ بَ // المستوى ....

(أ) أ ب حـ　　(ب) أَ بَ حـَ　　(جـ) أ ب ء　　(د) أ أَ ءَ ء

ثالثًا : المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى أ ب حـ ء = ...

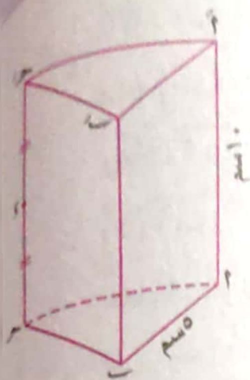
(أ) {ب}　　(ب) {أ ، ب}　　(جـ) $\overline{\text{أب}}$　　(د) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

رابعًا : المستوى أ ب بَ أَ ∩ المستوى ء حـ حـَ ءَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{بَ حـَ}}$　　(ب) $\overleftrightarrow{\text{أء}}$　　(جـ) ∅　　(د) {حـ}

خامسًا : المستوى ء حـ حـَ ءَ ∩ المستوى أ ب حـ ء ∩ المستوى أ ء ءَ أَ = ...

(أ) ∅　　(ب) $\overleftrightarrow{\text{أب}}$　　(جـ) {حـ}　　(د) {ء}



(٤٠) في الشكل المقابل :

أ ب حـ أَ ، ب بَ حـَ حـ

، أ حـ حـَ أَ ثلاثة مستطيلات متقاطعة مثنى مثنى ومتطابقة

، ء منتصف $\overline{حـ حـَ}$ فإذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ أَ = ١٠ سم

أولًا : المستوى أ ء أَ ∩ المستوى ب ء بَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{حـ حـَ}$ (ب) $\overleftrightarrow{ب بَ}$

(جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{أ حـ}$

ثانيًا : المستوى أ ء ب ∩ المستوى أ ب حـ = ...

(أ) ∅ (ب) $\overleftrightarrow{أ ب}$ (جـ) {ب} (د) $\overleftrightarrow{أ حـ}$

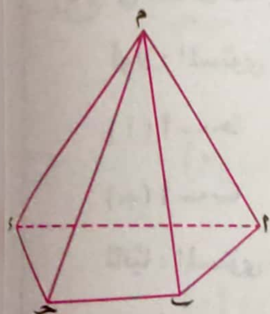
ثالثًا : المستوى أ ء ب ∩ المستوى ب حـ حـَ بَ = ...

(أ) {ب} (ب) $\overleftrightarrow{ب حـ}$ (جـ) $\overleftrightarrow{ب ء}$ (د) ∅

رابعًا : ق (∠ ب ء بَ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

ثانيًا الأسئلة المقالية



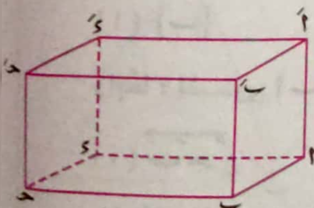
١ تأمل الشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

(١) كم عدد المستقيمات التى تحمل أحرف بالشكل ؟

(٢) اذكر المستقيمات التى تحمل أحرف وتمر بنقطة أ

(٣) كم عدد المستويات التى تحمل أوجه بالشكل ؟

(٤) اذكر ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ



٢ تأمل الشكل المقابل ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية :

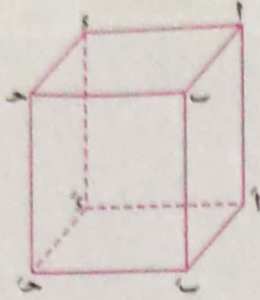
(١) اكتب ثلاثة مستقيمات تمر بالنقطة أ

(٢) اكتب المستقيمات التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

(٣) اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطة أ

(٤) اكتب ثلاثة مستويات تمر بالنقطتين أ ، ب معًا.

٣ فى الشكل الموضح الذى يمثل حجرة الدراسة أوجد :



(١) المستقيمات التى تحمل أحرف وكل منها يتقاطع مع $\overleftrightarrow{أب}$

(٢) المستقيمات التى تحمل أحرف وتوازى $\overleftrightarrow{أب}$

(٣) المستقيمات التى تحمل أحرف وكل منها يكون متخالفًا مع $\overleftrightarrow{أب}$

---

٤ اذكر عدد المستويات التى تمر بكل من :

(١) نقطة واحدة معلومة.

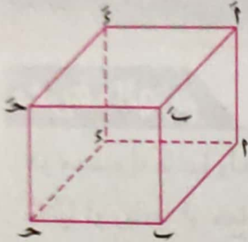
(٢) نقطتين مختلفتين.

(٣) ثلاث نقط على استقامة واحدة.

(٤) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

---

٥ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء أَ بَ حـَ ءَ مكعب طول حرفه ٦ سم

(١) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستقيمات الآتية :

(١) $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءءَ}$

(٢) $\overleftrightarrow{أَبَ}$ ، $\overleftrightarrow{ءحـ}$

(٣) $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أءَ}$

(٤) $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أَحـَ}$

(٥) $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{ءَحـَ}$

(٦) $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أأَ}$

(٢) عين الأوضاع النسبية لكل زوج من المستويات الآتية :

(١) أ ب بَ أَ ، ء حـ حـَ ءَ

(٢) أَ بَ ب أ ، أَ بَ حـ ء

(٣) أ ب حـ ، ءَ بَ ء

(٣) إذا علمت أن : $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{أءَ}$ فأوجد طول $\overline{بَ ء}$

---

٦ إذا كانت س ترمز لمستوى ، ل ترمز لمستقيم ، أ ترمز لنقطة

فارسم الأشكال التى تمثل الحالات الآتية (كل على حدة) :

(١) أ ∈ ل

(٢) ل ⊂ س

(٣) ل ∩ س = {أ}

(٤) ل // س

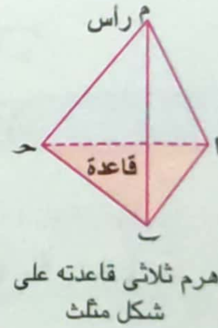
(٥) أ ∈ س ، أ ∉ ل ، ل ⊂ س

الهرم

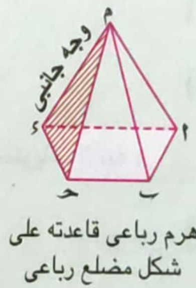


تعريف الهرم

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى الهرم ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا أو .... وفقًا لعدد أضلاع قاعدته.



هرم ثلاثى قاعدته على شكل مثلث

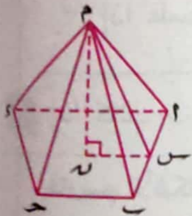


هرم رباعى قاعدته على شكل مضلع رباعى



هرم خماسى قاعدته على شكل مضلع خماسى

بالاستعانة بالشكل المقابل يمكن توضيح بعض المفاهيم الخاصة بالهرم :



- م أ ب حـ ء هرم رباعى أوجهه الجانبية سطوح المثلثات م أ ب ، م ب حـ ، م حـ ء ، م أ ء وقاعدته سطح المضلع أ ب حـ ء
- **الأوجه الجانبية للهرم :** هى دائمًا سطوح مثلثات بينما القاعدة قد تكون سطح مثلث أو مضلع رباعى أو خماسى أو ...
- **رأس الهرم :** هى النقطة المشتركة بين جميع أوجهه الجانبية وتمثلها نقطة م بالشكل.
- **الحرف الجانبى للهرم :** هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأى رأس من رؤوس قاعدته.
  (مثل $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ بالشكل)
- **ارتفاع الهرم :** هو بُعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته أى أنه طول العمود الساقط من رأسه على مستوى قاعدته. (م ن هو ارتفاع الهرم بالشكل)

- **الارتفاع الجانبى للهرم** : هو بُعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته أى أنه طول العمود الساقط من رأس الهرم على ضلع من أضلاع قاعدة الهرم.

(م س هو ارتفاع جانبى للهرم م أ ب حـ ء حيث : $\overline{مس} \perp \overline{أب}$)

ملاحظات

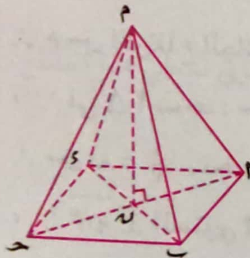
- المستقيم العمودى على مستوى يكون عموديًا على أى مستقيم فى هذا المستوى ومنها فإن المستقيم العمودى على قاعدة الهرم يكون عموديًا على أى مستقيم فيها.
- المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية فى الطول وزواياه متساوية فى القياس.
- المركز الهندسى لمضلع منتظم هو مركز الدائرة الداخلة أو الخارجة له.
- المركز الهندسى لمتوازى الأضلاع وحالاته الخاصة هو نقطة تقاطع القطرين.
- المركز الهندسى للمثلث هو نقطة تقاطع متوسطاته.

حالات خاصة من الهرم

١ الهرم القائم

يكون الهرم قائمًا إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

فمثلًا : فى الهرم م أ ب حـ ء الموضح بالشكل :



إذا كانت ن هى المركز الهندسى للقاعدة أ ب حـ ء

وكان : $\overline{من} \perp$ مستوى القاعدة أ ب حـ ء

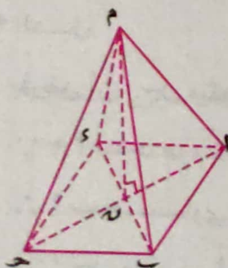
فإن : الهرم م أ ب حـ ء يسمى هرمًا قائمًا.

٢ الهرم المنتظم

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه هو موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

أى أنه هرم قائم قاعدته مضلع منتظم.

فمثلًا : فى الهرم م أ ب حـ ء الموضح بالشكل :



إذا كانت ن هى المركز الهندسى لقاعدته المنتظمة أ ب حـ ء «على شكل مربع».

وكان : $\overline{من} \perp$ مستوى القاعدة.

فإن : الهرم م أ ب حـ ء يسمى هرمًا منتظمًا.

* خواص الهرم المنتظم :

[١] أحرفه الجانبية متساوية الطول. [٢] ارتفاعاته الجانبية متساوية الطول.

[٣] أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متطابقة متساوية الساقين.

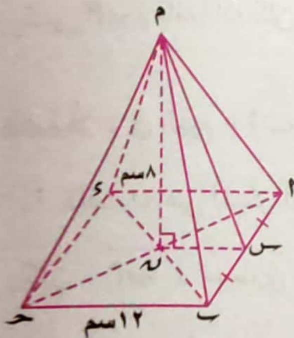
ملاحظـات

- كل هرم منتظم هو هرم قائم ولكن ليس كل هرم قائم يكون هرمًا منتظمًا.
- ليس بالضرورة أن تكون الأحرف الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- ليس بالضرورة أن تكون الارتفاعات الجانبية للهرم القائم متساوية الطول.
- يسمى الهرم الثلاثى المنتظم هرمًا ثلاثيًا منتظم الوجوه إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع ويكون أى منها قاعدة له.

مثال ١

م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم أوجد ارتفاعه الجانبى.

الحـل



بفرض أن : س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم

∴ م أ = م ب ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$

∴ م س الارتفاع الجانبى للهرم.

، ∵ فى $\triangle$ أ ب حـ : س منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أحـ}$

∴ س ن = $\frac{1}{2}$ ب حـ ∴ س ن = ٦ سم

، ∵ $\overline{من} \perp$ المستوى أ ب حـ ء ∴ $\overline{من} \perp \overline{سن}$

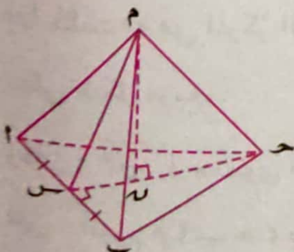
∴ $\triangle$ م س ن قائم الزاوية فى ن ∴ $(س م)^2 = (س ن)^2 + (م ن)^2$

∴ $(س م)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠$ ∴ س م = ١٠ سم

مثال ٢

م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته $\triangle$ أ ب حـ طول ضلع قاعدته ٦ سم ، وارتفاعه ٤ سم أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبى.

الحـل



بفرض أن : س منتصف $\overline{أب}$

∵ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم

∴ أ ب حـ متساوى الأضلاع

، ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{حـس} \perp \overline{أب}$

∴ Δ ب س حـ قائم الزاوية فى س

∴ $(\text{س حـ})^2 = (\text{ب حـ})^2 - (\text{ب س})^2 = 36 - 9 = 27$

∴ س حـ = $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ سم ، ∵ ن مركز المثلث أ ب حـ

∴ ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ ∴ ن س : ن حـ = ١ : ٢

∴ ن س = $\sqrt{3}$ سم ، ن حـ = $2\sqrt{3}$ سم

، ∵ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ المستوى أ ب حـ ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{س حـ}}$

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن ∴ $(\text{م حـ})^2 = (\text{م ن})^2 + (\text{ن حـ})^2 = 16 + 12 = 28$

∴ م حـ = $\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ سم ∴ طول حرف الهرم = $2\sqrt{7}$ سم

، ∵ Δ م ن س قائم الزاوية فى ن

∴ $(\text{م س})^2 = (\text{م ن})^2 + (\text{ن س})^2 = 16 + 3 = 19$

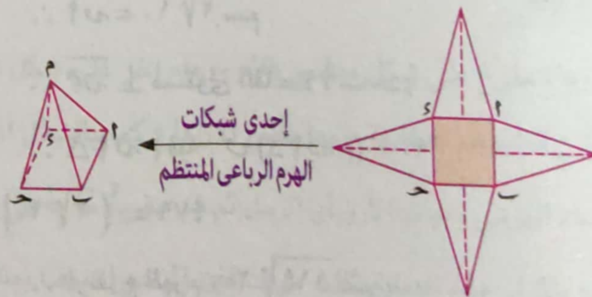
∴ م س = $\sqrt{19}$ سم ، ∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ (م س) الارتفاع الجانبى للهرم = $\sqrt{19}$ سم

شبكة الهرم

تستخدم شبكة المجسمات فى تصنيع المجسم وذلك بتخطيط شكل المجسم على سطح مستوى ثم طى هذا السطح لتكوين المجسم المطلوب.

فمثلًا :



ونلاحظ من شبكة الهرم الرباعى المنتظم أن

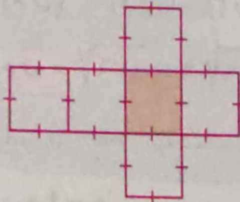
١ عدد الأوجه = ٥ أوجه منهم أربعة جانبية ووجه واحد للقاعدة.

٢ عدد الأحرف = ٨ منهم ٤ أحرف جانبية.

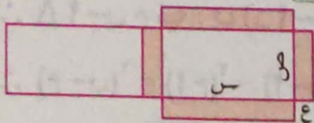
٣ عدد الرؤوس = ٥ منهم رأس واحدة م تسمى رأس الهرم.

! تذكر أن

١ إحدى شبكات المكعب



٢ إحدى شبكات متوازى المستطيلات

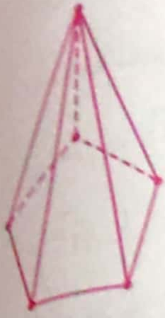


معلومة إثرائية

علاقة أويلر : لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون :

(عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢)

فمثلاً في الهرم الخماسي :



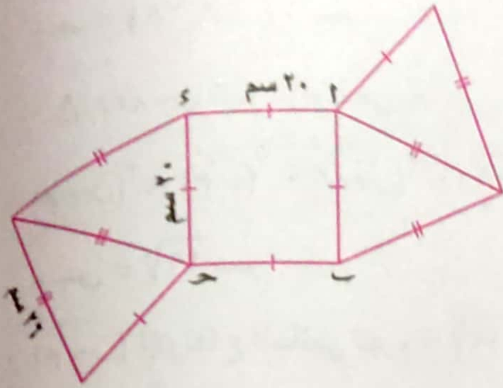
عدد الأوجه = ٦ أوجه ، عدد الرؤوس = ٦ رؤوس ، عدد الأحرف = ١٠ أحرف

أى أن عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢ ، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢

∴ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢

مثال ③

الشبكة في الشكل المقابل تمثل شبكة لهرم رباعي منتظم.



أوجد : ① ارتفاع الهرم.

② الارتفاع الجانبي للهرم.

الحل

الشبكة تمثل هرمًا رباعيًا منتظمًا قاعدته المربع أ ب حـ ء

، ورأسه م وارتفاعه م ن حيث ن نقطة تقاطع قطرى القاعدة

∵ أ ب حـ ء مربع

∴ طول قطره = طول ضلعه × $\sqrt{٢}$

∴ أ حـ = ٢٠ × $\sqrt{٢}$ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم   ∴ أ ن = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

، ∵ م أ ب حـ ء هرم رباعي قائم   ∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ مستوى القاعدة أ ب حـ ء

∴ $\overline{\text{م ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ن}}$ ∴ Δ أ ن م فيه : ق (∠ أ ن م) = ٩٠°

∴ $(\text{م ن})^2 = (\text{أ م})^2 - (\text{أ ن})^2 = (٢٦)^2 - (١٠\sqrt{٢})^2 = ٤٧٦$

∴ م ن = $\sqrt{٤٧٦}$ = ٢ $\sqrt{١١٩}$ سم   ∴ ارتفاع الهرم = ٢ $\sqrt{١١٩}$ سم

ويفرض أن : س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ∴ أ س = ١٠ سم

، ∵ م أ = م ب   ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

∴ Δ أ س م فيه : ق (∠ أ س م) = ٩٠°

∴ $(\text{م س})^2 = (\text{أ م})^2 - (\text{أ س})^2 = (٢٦)^2 - (١٠)^2 = ٥٧٦$

∴ م س = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم   ∴ الارتفاع الجانبي للهرم = ٢٤ سم

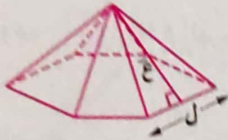
(المساحة الجانبية للهرم المنتظم - المساحة الكلية للهرم - حجم الهرم)

- المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات الأوجه الجانبية.
- المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى.
- المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.
- حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع.

استنتاج المساحة الجانبية للهرم المنتظم

إذا كان هرم منتظم طول ضلع قاعدته المنتظمة ل وعدد أضلاع القاعدة ن ، ارتفاعه الجانبى عَ فإن من شبكة هذا الهرم فإن له ن من الأوجه الجانبية المتطابقة والمتساوية الساقين

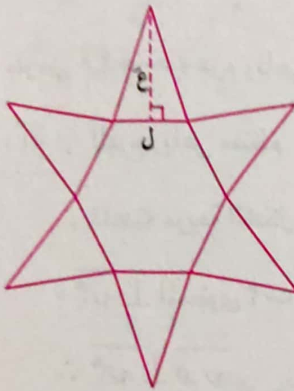
وتكون مساحة كل منها $\frac{1}{2}$ × ل × عَ



∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = مساحة الوجه الواحد × ن

= $\frac{1}{2}$ × ل × عَ × ن

، ∵ محيط القاعدة = ن × ل



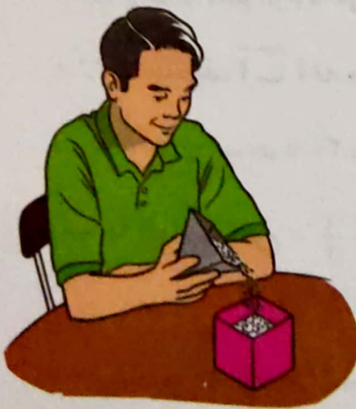
∴ المساحة الجانبية للهرم المنتظم

= $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

استنتاج حجم الهرم

تجربة عملية

- أحضر وعاء مفرغ على شكل منشور قائم ووعاء آخر على شكل هرم قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.
- املأ الوعاء الهرمى بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به فى المنشور.
- لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن المنشور سوف يمتلئ تمامًا بحبات الأرز أو الرمل.



وهذا يعنى أن : حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ حجم المنشور المتحد معه فى القاعدة والارتفاع

، ∵ حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

فإن حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ملاحظات

١ في الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه يكون ضعف مربع طول حرفه = ٣ أمثال مربع ارتفاعه

أي أن $٢ ل^٢ = ٣ ع^٢$ حيث ل = طول الحرف ، ع = الارتفاع

٢ المساحة الكلية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه = $ل^٢ \sqrt{٣}$ حيث ل طول الحرف.

٣ حجم الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} ل^٣$ حيث ل طول حرفه.

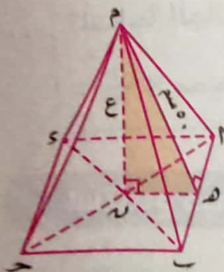
مثال ٤

هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته $٦٠\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه الجانبي ٥٠ سم

أوجد : ١ ارتفاع الهرم. ٢ المساحة الجانبية والكلية للهرم. ٣ حجم الهرم.

الحـــل

بفرض م أ ب حـ ء هرم رباعي منتظم تقاطع قطرا قاعدته في ن ، هـ منتصف $\overline{أب}$



١ ∵ الهرم رباعي منتظم

∴ قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلع القاعدة = $\frac{٦٠\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٦٠ سم

، $\overline{من}$ ⊥ المستوى أ ب حـ ء

∴ $\overline{من} \perp \overline{هـن}$

∴ Δ م هـ ن قائم الزاوية في ن

، ∵ هـ منتصف $\overline{أب}$ ، ن منتصف $\overline{أحـ}$

∴ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٣٠ سم ∴ ع = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٣٠)^٢}$ = ٤٠ سم

٢ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٦٠ × ٤) × ٥٠ = ٦٠٠٠ $سم^٢$

، ∵ مساحة القاعدة = ٦٠ × ٦٠ = ٣٦٠٠ $سم^٢$

∴ المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

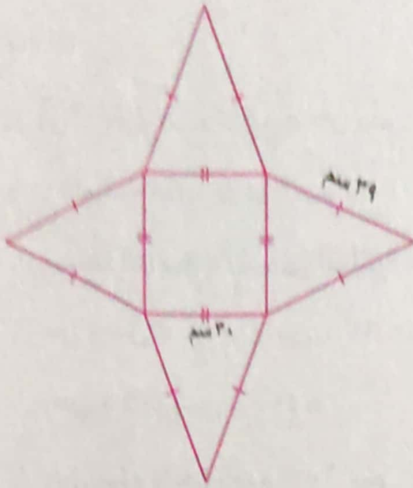
= ٦٠٠٠ + ٣٦٠٠ = ٩٦٠٠ $سم^٢$

٣ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠٠ × ٤٠ = ٤٨٠٠٠ $سم^٣$

مثال ٥

باستخدام الشبكة التي أمامك صف المجسم

ثم أوجد مساحته الكلية وحجمه.



الحل

الشبكة لهرم رباعي منتظم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها = ٣٠ سم

وطول حرفه الجانبي = ٣٩ سم وبفرض الهرم م أ ب حـ ء

، ن نقطة تقاطع قطري قاعدته ، هـ منتصف $\overline{أب}$

، ∵ الوجه الجانبي م أ ب مثلث متساوي الساقين

∴ $\overline{مهـ}$ ارتفاع جانبي ، أ هـ = ١٥ سم

∴ في △ أ هـ م القائم الزاوية في هـ :

م هـ = $\sqrt{(أم)^٢ - (أهـ)^٢} = \sqrt{(٣٩)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٣٦ سم

، ∵ $\overline{من}$ ⊥ المستوى أ ب حـ ء ∴ $\overline{من}$ ⊥ $\overline{هـن}$

، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ١٥ سم ∴ في △ م هـ ن القائم الزاوية في ن :

م ن = $\sqrt{(م هـ)^٢ - (هـ ن)^٢} = \sqrt{(٣٦)^٢ - (١٥)^٢} = ٣\sqrt{١١٩}$ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٣٠ × ٤) × ٣٦ = ٢١٦٠ سم^٢

، مساحة القاعدة = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ سم^٢

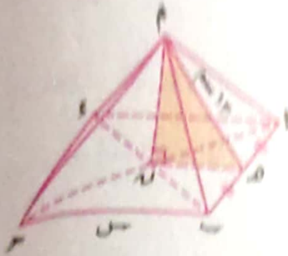
∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = ٢١٦٠ + ٩٠٠ = ٣٠٦٠ سم^٢

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ٩٠٠ × $٣\sqrt{١١٩}$ = $٩٠٠\sqrt{١١٩}$ سم^٣

مثال ٦

م أ ب حـ ء هرم رباعي منتظم مساحته الكلية = ٣٦٠ سم^٢ وارتفاعه الجانبي = ١٣ سم

أوجد طول ضلع قاعدته ثم أوجد حجمه.



الحـل

نفرض أن طول ضلع المربع = س سم

، ∵ المساحة الكلية = ٣٦٠ سم^{٢}

∴ مساحة القاعدة + المساحة الجانبية = ٣٦٠

∴ س × س + $\frac{١}{٢}$ × ٤ س × ١٢ = ٣٦٠ ∴ س^{٢} + ٢٦ س − ٣٦٠ = ٠

∴ (س + ٣٦) (س − ١٠) = ٠ ∴ س = − ٣٦ (مرفوض) أ، س = ١٠

∴ طول ضلع قاعدة الهرم = ١٠ سم

، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥ سم

، ∵ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن ∴ م ن = $\sqrt{(١٢)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢ سم

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × (١٠)^{٢} × ١٢ = ٤٠٠ سم^{٣}

مثال ٧

هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^{٣} وطول ضلع قاعدته = ٦ سم أوجد مساحته الكلية.

الحـل

بفرض م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم ، ن نقطة تقاطع قطرى قاعدته ، هـ منتصف $\overline{أب}$

∵ حجم الهرم = ٤٨ سم^{٣}

∴ $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨

∴ $\frac{١}{٣}$ × ٦ × ٦ × ع = ٤٨ ∴ ع = ٤ سم

∴ ارتفاع الهرم = م ن = ٤ سم ، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٣ سم

، ∵ Δ م هـ ن قائم الزاوية فى ن ∴ م هـ = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢}}$ = ٥ سم

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٦) × ٥ + ٦ × ٦ = ٩٦ سم^{٢}

مثال ٨

م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه ، طول أى حرف من أحرفه يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : ١ الارتفاع الجانبى. ٢ ارتفاع الهرم.

٣ المساحة الكلية للهرم. ٤ حجم الهرم.

الحـــل



∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه.

∴ كل وجه من أوجهه يكون مثلث متساوى الأضلاع.

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = م ء = أ ء = $٨\sqrt{٣}$ جا ٦٠° = ١٢ سم

، ∵ هـ هى نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ أ هـ = $\frac{٢}{٣}$ أ ء = $\frac{٢}{٣}$ × ١٢ = ٨ سم

، ∵ $\overline{مهـ}$ ⊥ المستوى أ ب حـ

∴ $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أء}$

∴ Δ م أ هـ قائم الزاوية فى هـ

∴ م هـ = $\sqrt{(٨\sqrt{٣})^{٢} - (٨)^{٢}}$ = $٨\sqrt{٢}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = $٨\sqrt{٢}$ سم

، ∵ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٣ × $٨\sqrt{٣}$) × ١٢ = $١٤٤\sqrt{٣}$ سم^{٢}

، مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × $٨\sqrt{٣}$ × $٨\sqrt{٣}$ جا ٦٠° = $٤٨\sqrt{٣}$ سم^{٢}

∴ المساحة الكلية = $١٤٤\sqrt{٣}$ + $٤٨\sqrt{٣}$ = $١٩٢\sqrt{٣}$ سم^{٢}

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × $٤٨\sqrt{٣}$ × $٨\sqrt{٢}$ = $١٢٨\sqrt{٦}$ سم^{٣}

لاحظ أن

∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه

∴ ٢ ل^{٢} = ٣ ع^{٢} ∴ ٢ × $(٨\sqrt{٣})^{٢}$ = ٣ ع^{٢}

∴ ع = $٨\sqrt{٢}$ ∴ ارتفاع الهرم = $٨\sqrt{٢}$ سم

مثال ٩

هرم سداسى منتظم فيه مجموع مساحات الأوجه الجانبية سبعة أمثال مساحة القاعدة

أثبت أن حجم الهرم = ٨ نق^{٣} حيث نق طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل القاعدة.

الحـــل



نفرض أن طول ضلع الشكل السداسى = ل سم

، ارتفاع الهرم = ع ، الارتفاع الجانبى = عَ

، ∵ مجموع مساحات الأوجه الجانبية = ٧ × مساحة القاعدة

∴ $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى = ٧ × مساحة القاعدة

$\therefore \frac{1}{3} \times$ ٦ ل $\times$ عَ $= 7 \times \frac{1}{2} \times$ ل $\times$ نق $\times$ ٦ $\qquad \therefore$ ٣ ل عَ $=$ ٢١ ل نق

$\therefore$ عَ $=$ ٧ نق

، $\because \overline{مـ ن} \perp$ المستوى أ ب حـ ء هـ و $\qquad \therefore \overline{مـ ن} \perp \overline{ن ص}$

$\therefore \Delta$ م ن ص قائم الزاوية في ن

$\therefore$ ع $= \sqrt{عَ^2 - نق^2} = \sqrt{(7\ نق)^2 - نق^2} = 4\sqrt{3}$ نق

، $\because$ حجم الهرم $= \frac{1}{3} \times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times$ ل $\times$ نق $\times$ ٦ $\times 4\sqrt{3}$ نق $= 4\sqrt{3}$ ل نق^2

، $\because$ نق $=$ ل حا ٦٠° $\qquad \therefore$ ل $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ نق

$\therefore$ حجم الهرم $= 4\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$ نق $\times$ نق$^2 =$ ٨ نق^3

مثال ١٠

م أ ب حـ هرم ثلاثي رأسه م على بعد $4\sqrt{5}$ سم من قاعدته أ ب حـ حيث أ ب $=$ ٧ سم ، ب حـ $=$ ٨ سم ، أ حـ $=$ ٩ سم أوجد حجم الهرم.

الحل

$\because$ محيط Δ أ ب حـ

$= 7 + 8 + 9$

$=$ ٢٤ سم

$\therefore$ نصف المحيط $=$ ١٢ سم

$\therefore$ مساحة المثلث أ ب حـ $= \sqrt{12\ (12 - 7)\ (12 - 8)\ (12 - 9)} = 12\sqrt{5}$ سم^2

$\therefore$ حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع

$= \frac{1}{3} \times 12\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} =$ ٨٠ سم^3

> **تذكر أن**
> مساحة Δ أ ب حـ $= \sqrt{ح\ (ح - أ ب)\ (ح - ب حـ)\ (ح - أ حـ)}$
> حيث ح نصف محيط المثلث أ ب حـ



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس الهرم وأحد رؤوس قاعدته تسمى ....

(أ) ارتفاع الهرم. (ب) ارتفاعه الجانبى. (جـ) حرفه الجانبى. (د) ضلع قاعدته.

(٢) إذا كان : م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم فإن الهرم يجب أن يكون ....

(I) منتظم الأوجه. (II) قاعدته مربعة. (III) قائم.

(أ) I ، II (ب) II ، III (جـ) I (د) I ، II ، III

(٣) أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة. (ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا = ٣ مستويات.

(٤) أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) الهرم القائم يمكن أن تكون قاعدته سطح معين.

(ب) الهرم الثلاثى له ثلاثة أوجه. (جـ) الهرم الخماسى له ستة أوجه.

(د) الهرم الرباعى جميع أوجهه الجانبية سطوح مثلثات.

(٥) فى الهرم المنتظم أى الأطوال الآتية مرتبة من الأصغر إلى الأكبر ؟

(أ) طول الحرف الجانبى ، ارتفاع الهرم ، الارتفاع الجانبى.

(ب) ارتفاع الهرم ، الارتفاع الجانبى ، طول الحرف الجانبى.

(جـ) الارتفاع الجانبى ، ارتفاع الهرم ، طول الحرف الجانبى.

(د) طول الحرف الجانبى ، الارتفاع الجانبى ، ارتفاع الهرم.

(٦) الشكل الذى يصلح أن يكون قاعدة لهرم رباعى منتظم هو ....

(أ) متوازى الأضلاع. (ب) المعين. (جـ) المستطيل. (د) المربع.

(٧) إذا كان : م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم فإن جميع أحرفه الجانبية ....

(أ) متوازية. (ب) متطابقة.

(جـ) عمودية على القاعدة. (د) متعامدة مثنى مثنى.

⑧ إذا كان : م أ ب حـ هرم ثلاثي قائم ، ن مسقط النقطة م على المستوى أ ب حـ ، ء منتصف $\overline{ب حـ}$

فإن كل المثلثات الآتية تكون قائمة ما عدا ....

(أ) Δ م ن حـ (ب) Δ م ن ء (جـ) Δ م ب حـ (د) Δ م ن أ

⑨ إذا كان : م أ ب حـ هرم منتظم الأوجه ، ن مسقط النقطة م على المستوى أ ب حـ ، ء منتصف $\overline{أ ب}$

فأى مما يأتى يكون مثلث متساوى الأضلاع ؟

(أ) Δ م ن ء (ب) Δ م ب ء (جـ) Δ أ حـ ء (د) Δ م ب حـ

⑩ عدد جميع أوجه الهرم الخماسى المنتظم هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ١٠

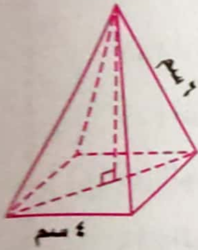
⑪ إذا علمت أن هرم له عدد أوجه «م»، عدد رؤوس «ن» فإن عدد أحرفه = ...

(أ) م ن (ب) م + ن - ١ (جـ) م + ن - ٢ (د) م + ن + ٢

⑫ فى الهرم السداسى يكون عدد الأوجه + عدد جميع رؤوسه - عدد أحرفه = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

⑬ فى الشكل المقابل :



هرم رباعى منتظم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) $٧\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٧}$

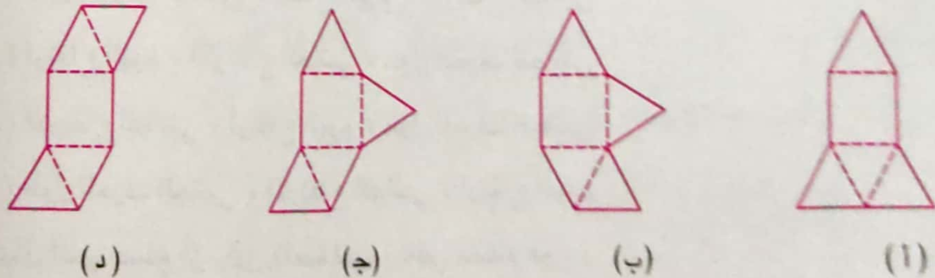
(جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) $٢\sqrt{٥}$

⑭ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم ، وطول حرفه الجانبى ٨ سم

فإن ارتفاعه = ... سم.

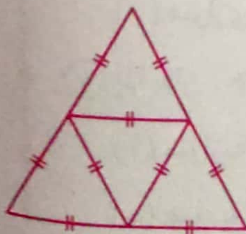
(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٤٦}$ (جـ) $\sqrt{٨٥}$ (د) ٤٨

⑮ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



(أ) (ب) (جـ) (د)

⑯ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعى. (ب) هرم رباعى منتظم.

(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه. (د) غير ذلك.

(١٧) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه : ارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٣}$: ٣

(١٨) النسبة بين طول حرف الهرم المنتظم الوجوه : ارتفاعه الجانبى = ...

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ $\sqrt{٣}$: ٣ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٦}$: ٣

(١٩) إذا قطعنا هرمًا رباعيًا منتظمًا بمستوى يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

(أ) مثلثًا. (ب) مربعًا. (جـ) مستطيلًا. (د) دائرة.

(٢٠) هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٠٠

(٢١) 📖 هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم ، وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

(٢٢) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم
فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}.

(أ) ٣٢٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٩٦٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ١٦٠

(٢٣) هرم منتظم حجمه ١٢ سم^{٣} ومساحة قاعدته ٤ سم^{٢} فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢

(٢٤) هرم رباعى منتظم حجمه ٦٤ سم^{٣} وارتفاعه = ٦ سم فإن محيط القاعدة = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦ (د) ١٦ $\sqrt{٢}$

(٢٥) هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨٠ سم^{٣} وطول ضلع قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

(٢٦) إذا كان حجم هرم سداسى منتظم يساوى ٨ $\sqrt{٣}$ سم^{٣} وارتفاعه يساوى ٤ سم
فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) ٦ $\sqrt{٣}$

(٢٧) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه الجانبى ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^{٢}

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

(٢٨) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم^{٢} وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٣٦٠

(٢٩) المساحة الكلية لهرم رباعى قائم قاعدته مضلع منتظم طول قطره = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه = ٥ $\sqrt{٣}$ سم تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٣٠٠

(٣٠) هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^٢ ، ارتفاعه الجانبي = ٥ سم
فإن محيط قاعدته = ... سم.
(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ٢٤ (د) ٣٦

(٣١) هرم ثلاثي منتظم الوجوه ، وطول حرفه ١٠ سم فتكون مساحته الكلية يساوي .... سم^٢
(أ) ٤٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٥ $\sqrt{٣}$

(٣٢) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ١٨ سم
فإن مساحته الكلية = ... سم^٢
(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$

(٣٣) إذا كانت مساحة هرم منتظم الوجوه الكلية = ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢ فإن مجموع أطوال أحرفه = ... سم.
(أ) ٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٨ (د) ٣٦

(٣٤) هرم ثلاثي منتظم الوجوه مساحته الكلية = ٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢ فإن طول حرفه = ... سم.
(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) $\sqrt{٣}$

(٣٥) هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ ل سم وارتفاعه ل سم فإن مساحته الجانبية .... سم^٢
(أ) ٢٧ $\sqrt{٣}$ ل^٢ (ب) ١٨ ل^٢ (جـ) ٩ $\sqrt{٣}$ ل^٢ (د) ٣٦ ل^٢

(٣٦) هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم يكون حجمه = ... سم^٣
(أ) ٢٧ $\sqrt{٢}$ (ب) ٣٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٥٤ $\sqrt{٢}$ (د) ١٨ $\sqrt{٢}$

(٣٧) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الأوجه يساوي ١٨ سم فإن حجمه = ... سم^٣
(أ) ٩ $\sqrt{٢}$ (ب) $\frac{٩\sqrt{٢}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٥}$ (د) ٩ $\sqrt{٣}$

(٣٨) إذا كان الارتفاع الجانبي لهرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ٥ $\sqrt{٣}$ سم
فإن مجموع مساحات أوجهه = ... سم^٢
(أ) $\frac{٥٠\sqrt{٣}}{٣}$ (ب) ٢٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٥٠ $\sqrt{٣}$

(٣٩) هرم رباعي قائم قاعدته على شكل معين طول ضلعه يساوي طول أحد قطري المعين يساوي ٦ سم
فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = ... سم^٣
(أ) ٧٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٤٤ (د) ٧٢

(٤٠) أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ مكعب طول حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم بَ أ ب حـ = ... سم^٣
(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٨ $\sqrt{٣}$

(٤١) هرم رباعي منتظم مساحته الكلية = ٧٠ سم^٢ ومساحته الجانبية = ٤٥ سم^٢
فإن ارتفاع الهرم = ... سم.
(أ) ٢,٥ (ب) ٥ (جـ) $\sqrt{١٤}$ (د) ٤,٥

(٤٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، ومساحة أحد أوجهه الجانبية ٦٠ سم²

فإن مساحته الكلية يساوى .... سم²

(أ) ٦٠٠ (ب) ٣٤٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٤٠

(٤٣) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

(٤٤) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ارتفاعه الجانبى فإن النسبة بين مساحته الجانبية : مساحته الكلية = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١ : ٢ (د) ٣ : ٥

(٤٥) هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته المربعة فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم³

(أ) ٣٦ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٣٦\sqrt{١٥}$ (د) $٢١٦\sqrt{١٥}$

(٤٦) إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف. (ب) لا يتغير.

(جـ) يتضاعف أربع مرات. (د) يتضاعف ستة مرات.

(٤٧) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³

فإن مساحته الجانبية = ... سم²

(أ) ٢٧٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ٤٥٠ (د) ٥٤٠

(٤٨) هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية وكل منهم طوله يساوى أ سم

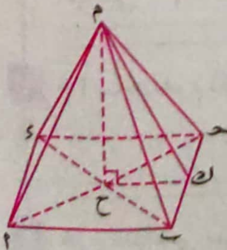
فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٣ أ² (ب) ٤ أ² (جـ) $\sqrt{٣}$ أ² (د) $٤\sqrt{٣}$ أ²

(٤٩) إذا كان الهرم م أ ب جـ ثلاثى رأسه م على بعد ١٥ سم من قاعدته أ ب جـ وأطوال أضلاع قاعدته ٥ ، ٦ ، ٧ سم فإن حجمه = ... سم³

(أ) $١٥\sqrt{٣}$ (ب) $١٠\sqrt{٦}$ (جـ) $٣٠\sqrt{٦}$ (د) ٩٠

(٥٠) فى الشكل المقابل :



م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم³ وارتفاعه ٤ سم

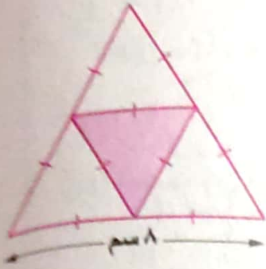
، ل جـ = ل ب ، $\overline{أجـ} \cap \overline{بد} = \{ح\}$

، ق (∠ م ح ل) = ق (∠ ح ل ب) = ق (∠ م ل ب) = ٩٠°

فإن المساحة الجانبية للهرم = ... سم²

(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٦٠

(٥٦) باستخدام الشبكة التى أمامك فإن المساحة الجانبية للمجسم الناتج = ... سم^{2}.



(أ) $8\sqrt{3}$　　(ب) $12\sqrt{3}$

(جـ) $16\sqrt{3}$　　(د) ٢٤

ثانيًا الأسئلة المقالية

١ فى الهرم الخماسى المنتظم :

(١) ما عدد أوجهه الجانبية ؟　　(٢) ما عدد الأوجه ؟

(٣) ما عدد أحرفه الجانبية ؟　　(٤) ما عدد أحرفه ؟

(٥) للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى ؟

هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة ؟

---

٢ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته يساوى ١٠ سم ، وارتفاعه ١٢ سم.

أوجد ارتفاعه الجانبى. «١٣ سم»

---

٣ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.

أوجد طول ضلع قاعدة الهرم. «٣٠ سم»

---

٤ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم قاعدته المربع أ ب حـ ء فإذا كان ارتفاعه يساوى $4\sqrt{3}$ سم وطول حرفه الجانبى م أ = $4\sqrt{5}$ سم احسب طول ضلع قاعدته. «٨ سم»

---

٥ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته Δ أ ب حـ المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ١٢ سم فإذا كان ارتفاع الهرم يساوى ٦ سم فأوجد طول حرفه الجانبى. «$2\sqrt{21}$ سم»

---

٦ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم قاعدته أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣ سم فإذا كان طول حرفه الجانبى = $\sqrt{7}$ سم فأوجد ارتفاع الهرم. «٢ سم»

---

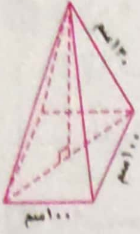
٧ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم احسب ارتفاعه وارتفاعه الجانبى. «$4\sqrt{6}$ سم ، $6\sqrt{3}$ سم»

---

٨ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم وقاعدته مسدس منتظم محيطه $24\sqrt{3}$ سم

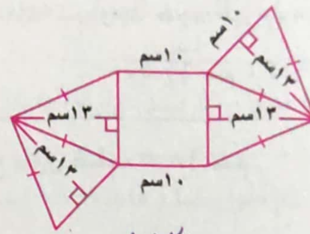
احسب طول حرفه وارتفاعه الجانبى. «$4\sqrt{7}$ سم ، ١٠ سم»

٩ يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاة أوجد كلًا من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان.

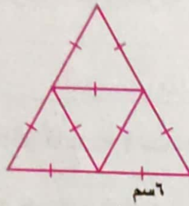


«١٢٠ سم ، $١٠\sqrt{١١٩}$ سم»

١٠ كل من الشكلين التاليين يمثل شبكة مجسم. صف المجسم واحسب ارتفاعه :



شكل(١)



شكل(٢)

«١٢ سم ، $٢\sqrt{٦}$ سم»

١١ هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) هو هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا ، وارتفاعه الجانبى ١٨٦ مترًا أوجد ارتفاع الهرم. «١٤٥,٤ متر»

١٢ م أ ب حـ هرم ثلاثى قائم طول حرفه م أ = ٢٥ سم وقاعدته أ ب حـ على شكل مثلث قائم الزاوية فى أ بحيث : ب أ = ١٦,٨ سم ، حـ أ = ١٢,٦ سم أوجد ارتفاع الهرم. «٢٤ سم»

١٣ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته المعين أ ب حـ ء فيه : أ حـ = ١٦ سم ، ب ء = ١٢ سم ، ن نقطة تقاطع قطريه فإذا كان ارتفاع الهرم م ن = ١٠ سم فأوجد أطوال أحرفه الجانبية. «$٢\sqrt{٣٤}$ سم ، $٢\sqrt{٤١}$ سم»

١٤ هرم ثلاثى منتظم ارتفاعه ١٢ سم وطول ضلع قاعدته ١٨ سم أوجد حجم الهرم. «$٣٢٤\sqrt{٣}$ سم^{٣}»

١٥ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم قاعدته أ ب حـ ء حيث : أ ب = ١٠ سم وارتفاع الهرم = ١٢ سم أوجد :

(١) طول أى ارتفاع جانبى. (٢) حجم الهرم.

(٣) المساحة الكلية للهرم. «١٣ سم ، ٤٠٠ سم^{٣} ، ٣٦٠ سم^{٢}»

١٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد :

(١) المساحة الجانبية. (٢) حجم الهرم. «٨٠٠ سم^{٢} ، $\frac{٤٠٠٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم^{٣}»

١٧ هرم رباعى منتظم طول قطر قاعدته $٢٤\sqrt{٢}$ سم وارتفاعه الجانبى = ٢٠ سم أوجد مساحته الكلية وحجمه. «١٥٣٦ سم^{٢} ، ٣٠٧٢ سم^{٣}»

١٨ م أ ب حـ ء هرم رباعي قائم قاعدته أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ٨ $\sqrt{2}$ سم وطول حرفه الجانبي يساوي ٤ $\sqrt{6}$ سم أوجد :

(١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

«١٢٨ $\sqrt{2}$ سم^٢ ، $\frac{512}{3}$ $\sqrt{2}$ سم^٣»

١٩ م أ ب حـ ء هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته = ٢٠ سم وطول حرفه الجانبي = ٢٦ سم أوجد :

(١) الارتفاع الجانبي للهرم. (٢) ارتفاع الهرم. (٣) المساحة الجانبية للهرم.

(٤) حجم الهرم.

«٢٤ سم ، ٢ $\sqrt{119}$ سم ، ٩٦٠ سم^٢ ، $\frac{800}{3}$ $\sqrt{119}$ سم^٣»

٢٠ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه = ١٢ سم أوجد ارتفاعه ثم أوجد حجم الهرم ومساحته الكلية.

«٤ $\sqrt{6}$ سم ، ١٤٤ $\sqrt{2}$ سم^٣ ، ١٤٤ $\sqrt{3}$ سم^٢»

٢١ م أ ب حـ ء هرم قائم قاعدته أ ب حـ ء على شكل مربع طول ضلعه = ١٨ سم

، م أ = م ب = م حـ = م ء = ١٥ سم أوجد :

(١) المساحة الكلية للهرم. (٢) حجم الهرم.

«٧٥٦ سم^٢ ، ٣٢٤ $\sqrt{7}$ سم^٣»

٢٢ احسب لأقرب رقم عشري واحد حجم هرم خماسي منتظم ، طول ضلع قاعدته = ١٦ سم وارتفاعه ١٢ سم

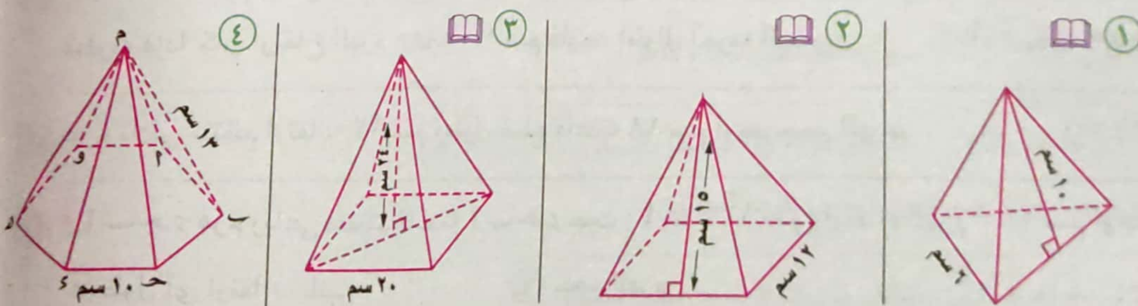
«١٧٦١,٨ سم^٣»

٢٣ هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبي ١٠ $\sqrt{3}$ سم أوجد :

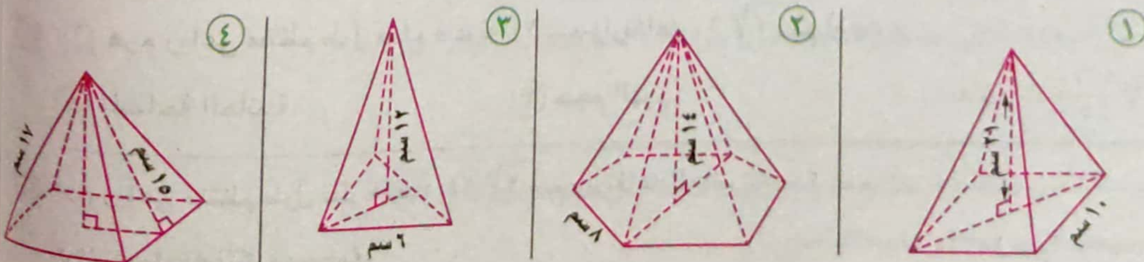
(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية.

«٣٦٠ $\sqrt{3}$ سم^٢ ، ٥٧٦ $\sqrt{3}$ سم^٢»

٢٤ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاة :



٢٥ أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة :



٢٦ هرم رباعى ارتفاعه ١٢ سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ٤ ، ٨ سم

أثبت أن حجمه يساوى حجم مكعب طول حرفه ٤ سم

٢٧ م أ ب حـ هرم ثلاثى رأسه م على بعد ١٥ سم من قاعدته أ ب حـ وأطوال أضلاع

قاعدته المثلثة هى : ٥ ، ٦ ، ٧ سم أوجد حجمه. «$٣٠\sqrt{٦}$ سم^٣»

٢٨ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم^٢ وارتفاعه الجانبى ٢٠ سم أوجد حجمه. «٣٥٠٠ سم^٣»

٢٩ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٩ سم^٢ وطول حرفه الجانبى ٥ سم أوجد حجمه. «١٣,٦ سم^٣»

٣٠ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم احسب مساحته الجانبية. «٢٦٠ سم^٢»

٣١ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^٣

فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية. «١٥ سم ، ٥٤٠ سم^٢»

٣٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = ١٢ سم ومساحته الكلية = ٣٨٤ سم^٢ أوجد حجم الهرم. «٣٨٤ سم^٣»

٣٣ هرم قائم قاعدته على شكل مربع طول قطره = $١٠\sqrt{٢}$ سم فإذا كانت مساحته الجانبية = ٢٦٠ سم^٢

أوجد حجم الهرم. «٤٠٠ سم^٣»

٣٤ م أ ب حـ هرم ثلاثى منتظم طول ضلع قاعدته ٣ سم وطول حرفه الجانبى = $\sqrt{٧}$ سم

أوجد حجمه ومساحته الجانبية. «$\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ سم^٣ ، $\frac{٩}{٤}\sqrt{١٩}$ سم^٢»

٣٥ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم ومحيط قاعدته $٢٤\sqrt{٣}$ سم احسب مساحته الجانبية والكلية.

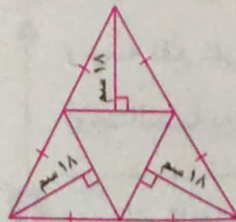
«$١٢٠\sqrt{٣}$ سم^٢ ، $١٩٢\sqrt{٣}$ سم^٢»

٣٦ أوجد حجم هرم قائم ارتفاعه الجانبى ١٠ سم وقاعدته على شكل مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة

طول نصف قطرها ١٢ سم. «$٢٨٨\sqrt{٣}$ سم^٣»

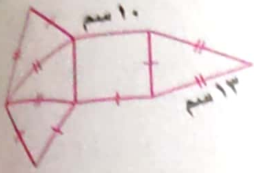
٣٧ باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم

وأوجد مساحته الكلية.



«$٤٣٢\sqrt{٣}$ سم^٢»

٣٨ الربط بالصناعة : تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.



(١) أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوة.

(٢) احسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا. «٣٤٠ م^٢ ، ٥١٠ جنيه»

---

٣٩ م أ ب حـ ء هرم رباعى قائم قاعدته المربع أ ب حـ ء وكان طول أى حرف جانبى يساوى ٦ $\sqrt{٥}$ سم وكان ارتفاع الهرم = ٦ $\sqrt{٣}$ سم أوجد :

(١) المساحة الكلية للهرم. (٢) حجم الهرم. «٤٣٢ سم^٢ ، ٢٨٨ $\sqrt{٣}$ سم^٣»

---

٤٠ الربط بالسياحة : صنع نموذج للهرم الأكبر (هرم رباعى منتظم) من سبيكة معدنية كثافتها ٣,٢ جم/سم^٣ إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥ وارتفاعه ٧ سم ، فاحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد. «٩٨٧,٥ جم»

---

٤١ اهتمت فرنسا بالآثار المصرية القديمة فنقلت بعضها إلى باريس لتعرض فى متاحفها كما أنشأت هرمًا جوانبه من الزجاج الشفاف مشابهًا للهرم الأكبر (هرم رباعى منتظم) ليكون مدخلاً رئيسيًا لمتحف اللوفر بباريس. إذا علمت أن ارتفاعه ٢١,٦ متر وطول ضلع قاعدته ٣٥ مترًا ، فأوجد مساحة الزجاج المستخدم فى بنائه لأقرب متر مربع. «١٩٤٦ م^٢»

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ هرم سداسى منتظم طول ضلع القاعدة = ٢ ل ، وارتفاع الهرم = ٣ ل

أثبت أن : المساحة الجانبية للهرم تساوى ضعف مساحة قاعدته.

---

٢ م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم إذا كان طول الحرف الجانبى للهرم = طول قطر القاعدة = ل

أثبت أن : المساحة الكلية للهرم = $\frac{ل^٢}{٢}$ (١ + $\sqrt{٧}$)

---

٣ أسطوانة دائرية قائمة جوفاء وضع بداخلها هرم ثلاثى قائم م أ ب حـ قاعدته أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع رءوسه تقع على محيط القاعدة السفلى للأسطوانة ، م رأس الهرم هى مركز القاعدة العليا للأسطوانة. أوجد النسبة بين حجمى الهرم والأسطوانة. «$\frac{\sqrt{٣}}{٤ \pi}$»

---

٤ هرم قائم قاعدته مربع وجميع أحرفه الثمانية متساوية ومساحته الكلية = ($\sqrt{٣}$ + ١) أ

أوجد طول حرفه بدلالة أ «$\sqrt{أ}$»

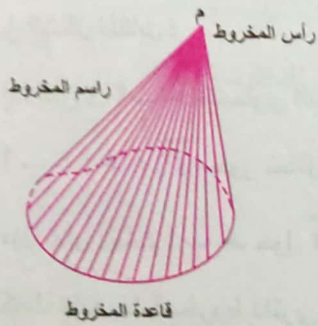
الدرس 3

المخـــروط



تعريف المخروط

هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبى من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته والتى يعرف كل منها براسم المخروط.



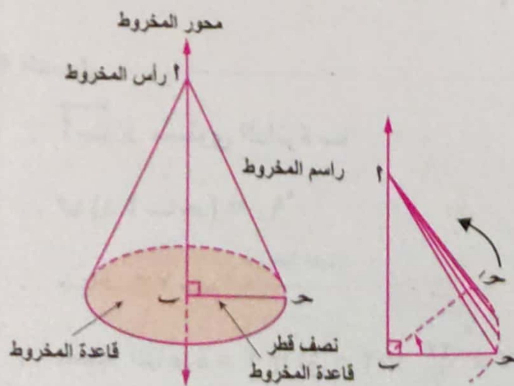
المخروط الدائرى القائم

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور.

أو هو الفراغ الذى ينشأ من طى قطاع دائرى بحيث ينطبق نصفا قطريه كلٍ على الآخر.

فى الشكل المقابل :

إذا دار المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أب}$ كمحور فإن المجسم الناشئ من هذا الدوران يسمى مخروط دائرى قائم وتسمى النقطة أ رأس المخروط ، $\overline{أحـ}$ راسم المخروط ، $\overleftrightarrow{أب}$ محور المخروط ، سطح الدائرة ب قاعدة المخروط.



* **خواص المخروط الدائرى القائم :**

(١) محور المخروط الدائرى القائم يكون عموديًا على مستوى القاعدة.

أى أن $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ مستوى الدائرة ب

(٢) ارتفاع المخروط الدائرى القائم هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المخروط ومركز قاعدته وهو دائمًا أقل من طول راسم المخروط.

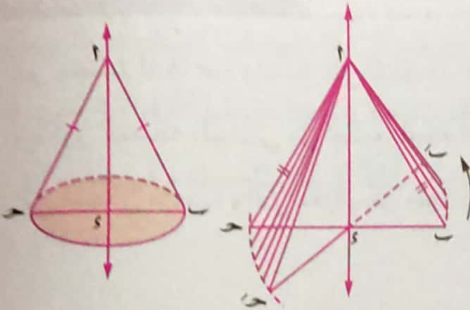
فإذا فرضنا أن :

طول $\overline{أب}$ = ع وحدة طول ، وطول $\overline{أحـ}$ = ل وحدة طول

فإن : ارتفاع المخروط (ع) = $\sqrt{ل^2 - نق^2}$ ويكون ع < ل دائمًا

ملاحظـة

من الممكن أن ينشأ المخروط الدائرى القائم من دوران مثلث متساوى الساقين حول محور تماثله نصف دورة كامل.



فى الشكل المقابل :

إذا كان Δ أ ب حـ متساوى الساقين فيه :

أب = أحـ ، $\overleftrightarrow{أء}$ محور تماثل Δ أ ب حـ

فإذا دار المثلث أ ب حـ حول $\overleftrightarrow{أء}$ نصف دورة كاملة فإنه ينشأ مخروط دائرى قائم قاعدته سطح الدائرة ء وراسمه $\overline{أب}$ أو $\overline{أحـ}$ وارتفاعه طول $\overline{أء}$ ورأسه نقطة أ

مثال ١

مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم وارتفاعه ٢٤ سم

أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

الحـل

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ مستوى الدائرة ب ∴ $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overline{ب حـ}$

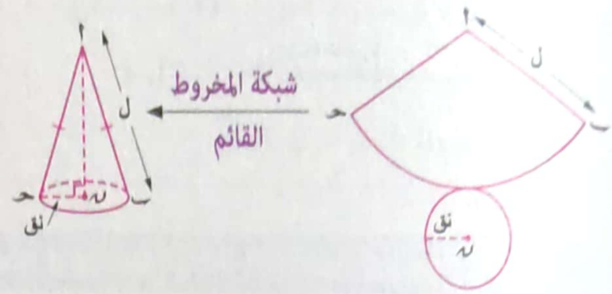
∴ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ∴ $(ب حـ)^2 = (أحـ)^2 - (أب)^2 = (٢٥)^2 - (٢٤)^2 = ٤٩$

∴ ب حـ = ٧ سم ∴ نق (طول نصف قطر القاعدة) = ٧ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

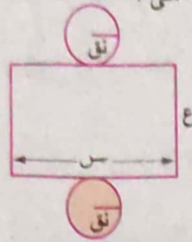
، مساحة سطح القاعدة = π $نق^2$ = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ١٥٤ $سم^2$

شبكة المخروط القائم



تذكر أن!

إحدى شبكات الأسطوانة الدائرية القائمة هى :



ونلاحظ من شبكة المخروط أن

١ أب = أجـ = ل حيث ل طول راسم المخروط.

٢ القطاع الدائرى أ ب جـ يمثل السطح الجانبى للمخروط. وطول ⌒ب جـ = محيط الدائرة ن = ٢ π نق

٣ سطح الدائرة ن يمثل قاعدة المخروط.

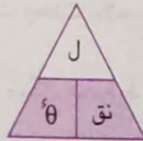
تذكر أن!

القطاع الدائرى هو جزء من سطح دائرة محدود بنصفى قطرين وقوس من الدائرة.

- مساحة القطاع = $\frac{1}{٢}$ ل نق حيث : ل طول قوس القطاع.
- مساحة القطاع = $\frac{1}{٢}$ θ^ء نق^٢ حيث : θ^ء قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائرى.
- مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × π نق^٢ = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × مساحة الدائرة

حيث س° القياس الستينى لزاوية القطاع.

- محيط القطاع = ٢ نق + ل وحدة طول.



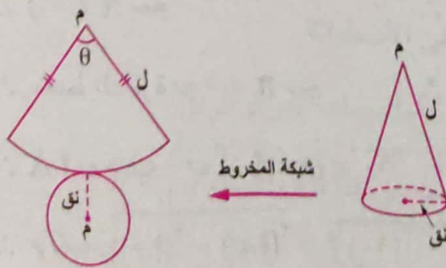


ملاحظات هامة

١ إذا كان : ل > ٢ نق تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

وتكون ٠° < θ < ١٨٠°



٢ إذا كان : ل = ٢ نق تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

وتكون $\theta = 180^\circ$





٣ إذا كان : ل > ٢ نق تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

وتكون $180^\circ < \theta < 360^\circ$





مثال ٢

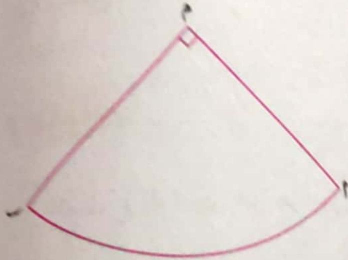
في الشكل المقابل :

قطعة من الورق على شكل قطاع دائرى مساحته ٢٥ π سم^2

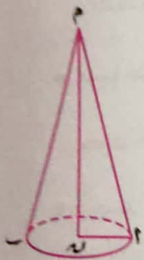
وقياس زاويته المركزية يساوى 90°

طويت بحيث تلامس $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ وتحولت إلى عبوة ورقية

على شكل مخروط فأوجد ارتفاع العبوة لأقرب جزء من عشرة.



الحل



∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $\theta^{د}$ نق^2 ∴ $\frac{1}{2}$ $\theta^{د}$ نق^2 = ٢٥ π

∴ $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times$ نق^2 = ٢٥ π ∴ نق^2 = ١٠٠

∴ نق = ١٠ سم ∴ م أ = ١٠ سم

، ∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق ∴ $\frac{1}{2}$ ل × ١٠ = ٢٥ π

∴ ل = ٥ π سم ∴ طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = ٥ π سم

∴ محيط الدائرة ن = ٥ π سم ∴ ٢ π نق$_{ن}$ = ٥ π ∴ نق$_{ن}$ = ٢,٥ سم

∴ $\triangle$ أ ن م فيه : ق ($\angle$ أ ن م) = 90° ، أ ن = ٢,٥ سم ، م أ = ١٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(\text{م أ})^2 - (\text{أ ن})^2} = \sqrt{(10)^2 - (2.5)^2} \simeq 9.7$ سم

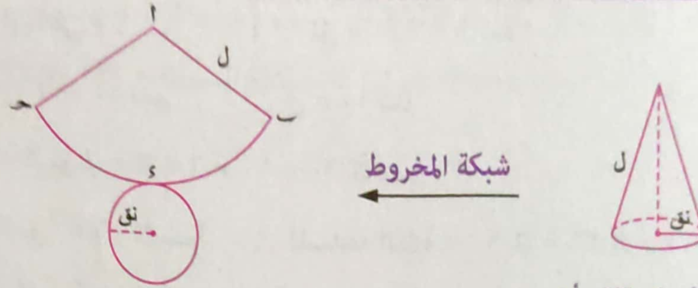
∴ ارتفاع العبوة = ٩,٧ سم

المساحة الجانبية / الكلية - الحجم للمخروط القائم

إذا كان (نق) طول نصف قطر دائرة قاعدة المخروط ، (ل) طول الراسم ، (ع) ارتفاع المخروط فإن :

* المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق
* المساحة الكلية للمخروط القائم = π نق (ل + نق)
* حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

استنتاج المساحة الجانبية والكلية للمخروط القائم



من شبكة المخروط القائم نستنتج أن :

المساحة الجانبية للمخروط القائم = مساحة القطاع أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × طول ⌒ب حـ × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × محيط قاعدة المخروط × أ ب

= $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق × ل = π ل نق

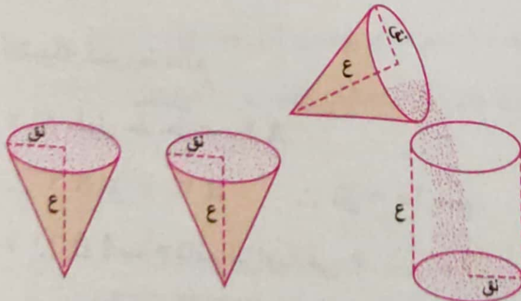
∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق

، ∵ المساحة الكلية للمخروط القائم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته = π ل نق + π نق²

∴ المساحة الكلية للمخروط القائم = π نق (ل + نق)

استنتاج حجم المخروط القائم

تجربة عملية



* أحضر وعاء مفرغ على شكل أسطوانة دائرية قائمة ووعاء آخر على شكل مخروط دائرى قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.
* املأ الوعاء المخروطى بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به فى الأسطوانة.
* لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن الأسطوانة سوف تمتلئ تمامًا بحبات الأرز أو الرمل.

وهذا يعنى أن حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع

، ∵ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

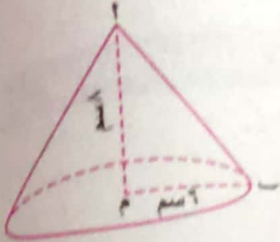
∴ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3}$ π نق² ع

مثال ٣

مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم

أوجد : [١] مساحته الجانبية. [٢] مساحته الكلية. [٣] حجمه.

الحل



∵ $\overline{أم}$ ⊥ مستوى الدائرة ∴ $\overline{أم}$ ⊥ $\overline{مب}$

∴ Δ م أ ب قائم الزاوية فى م ، ∵ نق = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦ سم

∴ أ ب = $\sqrt{(٨)^٢ + (٦)^٢}$ = ١٠ سم ∴ ل = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠ = ٦٠ π سم^٢

، مساحة القاعدة = π نق^٢ = ٣٦ π سم^٢ ∴ المساحة الكلية = ٦٠ π + ٣٦ π = ٩٦ π سم^٢

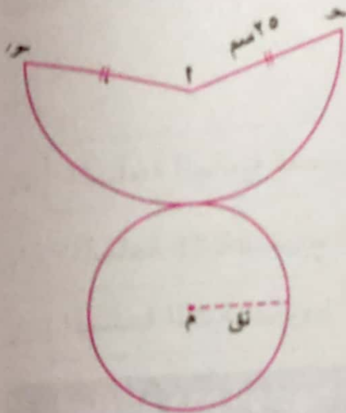
، حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ × π × ٣٦ × ٨ = ٩٦ π سم^٢

مثال ٤

باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم

وإذا كان طول القوس $\overset{\frown}{حـ حَـ}$ = ٣٠ π سم

أوجد حجم المجسم ومساحته الكلية.



الحل

الشبكة لمخروط قائم

، ∵ طول $\overset{\frown}{حـ حَـ}$ = ٣٠ π

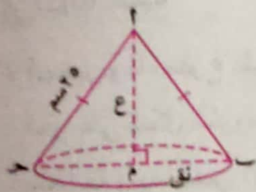
∴ ٢ π نق = ٣٠ π ∴ نق = ١٥ سم

، ∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى م

∴ ع = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (١٥)^٢}$ = ٢٠ سم

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × π × $(١٥)^٢$ × ٢٠ = ١٥٠٠ π سم^٣

، المساحة الكلية = π نق (ل + نق) = π × ١٥ × (٢٥ + ١٥) = ٦٠٠ π سم^٢



مثال ٥

دورق مخروطى الشكل سعته ٦,١٦ لتر ، ارتفاعه ٣٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته. $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

الحـــل

∵ سعة الدورق = ٦,١٦ لتر

∴ حجم المخروط القائم = ٦,١٦ × ١٠٠٠ سم^3

∴ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^2 × ٣٠ = ٦١٦٠ ∴ نق = ١٤ سم

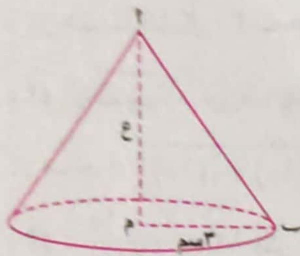
تذكر أن

١ لتر = ١٠٠٠ ملليلتر = ١٠٠٠ سم^3 = ١ ديسم^3

مثال ٦

سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم طول نصف قطر دائرته = ٣ سم ومساحته الجانبية = ١٥ π سم^2 أوجد كثافة الذهب إذا كانت كتلة السبيكة = ٧٢٧ جم (π = ٣,١٤)

الحـــل



∵ المساحة الجانبية للمخروط = ١٥ π

∴ π ل نق = ١٥ π ∴ π × ل × ٣ = ١٥ π

∴ ل = ٥ سم

، ∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى م

∴ ع = أ م = $\sqrt{(٥)^2 - (٣)^2}$ = ٤ سم

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع = $\frac{١}{٣}$ × π × (٣)^2 × ٤ = ١٢ π = ٣٧,٦٨ سم^3

∴ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$ = $\frac{٧٢٧}{٣٧,٦٨}$ ≃ ١٩,٣ جم/سم^3

تذكر أن

الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$

مثال ٧

هرم ثمانى منتظم من الفضة ، طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٣٠ سم صُهر وحول إلى مخروط دائرى قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٩ سم فإذا علم أن ١٠٪ من الفضة فُقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل ، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد.

الحـــل

∵ مساحة الثمانى المنتظم = $\frac{٨}{٤}$ س^2 ظتا $\frac{π}{٨}$

= ٢ × (٦)^2 ظتا ٢٢° ٣٠َ

≃ ١٧٣,٨٢ سم^2

تذكر أن

مساحة مضلع منتظم عدد أضلاعه = ن وطول ضلعه س تساوى $\frac{ن}{٤}$ س^2 ظتا $\frac{π}{ن}$

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٣}$ × ١٧٣,٨٢ × ٣٠ = ١٧٣٨,٢ سم^3

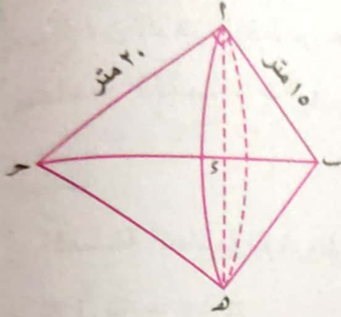
∴ حجم الفضة في المخروط = $\frac{٩٠}{١٠٠}$ × ١٧٣٨,٢ ≃ ١٥٦٤,٤ سم^3

∴ $\frac{١}{٣}$ π × (٩)^2 × ع ≃ ١٥٦٤,٤ ∴ ع ≃ ١٨,٤ سم

مثال ٨

أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ فيه : أ ب = ١٥ متر ، أ حـ = ٢٠ متر فإذا دار المثلث دورة كاملة حول $\overline{\text{ب حـ}}$ صف المجسم الناتج ثم أوجد تكاليف طلاء هذا المجسم بمادة مقاومة لعوامل التعرية علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد = ١٠ جنيهات ثم أوجد حجم هذا المجسم. $\left(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}\right)$

الحـل



* المجسم يكون على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة.

* من هندسة الشكل : أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في أ

، $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

$\therefore$ ب حـ $= \sqrt{(١٥)^٢ + (٢٠)^٢} = ٢٥$ متر

، أ ء $= \frac{١٥ \times ٢٠}{٢٥} = ١٢$ متر

، ب ء $= \sqrt{(١٥)^٢ - (١٢)^٢} = ٩$ متر ، حـ ء = ٢٥ − ٩ = ١٦ متر

بالنسبة للمخروط الأول الذي رأسه ب :

ل = ١٥ متر ، نق = ١٢ متر ، ع = ٩ متر

$\therefore$ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ١٥ × ١٢ = ١٨٠ π متر مربع

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ π × $(١٢)^٢$ × ٩ = ٤٣٢ π متر مكعب

بالنسبة للمخروط الثاني الذي رأسه حـ :

ل = ٢٠ متر ، نق = ١٢ متر ، ع = ١٦ متر

$\therefore$ المساحة الجانبية = π ل نق = π × ٢٠ × ١٢ = ٢٤٠ π متر مربع

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ π × $(١٢)^٢$ × ١٦ = ٧٦٨ π متر مكعب

$\therefore$ المساحة الكلية التي سوف تُطلى = مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

= ١٨٠ π + ٢٤٠ π = ٤٢٠ π = ٤٢٠ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ١٣٢٠ متر مربع

$\therefore$ تكلفة الطلاء = ١٣٢٠ × ١٠ = ١٣٢٠٠ جنيه

، حجم المجسم = مجموع حجمي المخروطين = ٤٣٢ π + ٧٦٨ π = ١٢٠٠ π

= ١٢٠٠ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٣٧٧١ $\frac{٣}{٧}$ متر مكعب.

على المخروط



اختبر نفسك

من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المخروط الدائرى القائم يمكن الحصول عليه عند طى ورقة على شكل ....

(أ) مثلث متساوى الأضلاع. (ب) مثلث قائم الزاوية.

(جـ) قطعة دائرية. (د) قطاع دائرى.

(٢) أقل زاوية يمكن أن يدورها مثلث متساوى الساقين حول محور تماثله لينتج مخروط دائرى قائم هى ....

(أ) 90° (ب) 180° (جـ) 270° (د) 60°

(٣) المخروط الدائرى القائم ينشأ من دوران مثلث قائم دورة كاملة حول ....

(أ) وتره. (ب) أحد ضلعى القائمة.

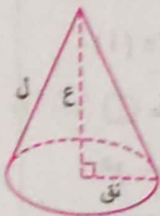
(جـ) أى مستقيم فى مستوى المثلث.

(د) مستقيم يمر بأحد رؤوسه ويوازى الضلع المقابل للرأس.

(٤) إذا قطع المخروط الدائرى القائم بمستوى يوازى قاعدته فالمقطع الناتج هو ....

(أ) مثلث متساوى الساقين. (ب) مثلث متساوى الأضلاع.

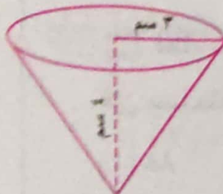
(جـ) دائرة. (د) شبه منحرف.



(٥) المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوى ....

(أ) π نق ل (ب) $\frac{\pi}{3}$ نق^2 ع

(جـ) π نق (نق + ل) (د) $\frac{\pi}{3}$ نق (نق ع + ٣ ل)

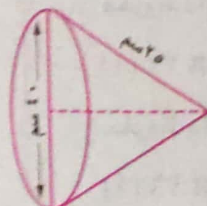


(٦) فى الشكل المقابل :

طول راسم المخروط = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣

(جـ) ٤ (د) ٥



(٧) فى الشكل المقابل :

ارتفاع المخروط = ... سم.

(أ) ١٥ (ب) ٢٠

(جـ) ٢٥ (د) ٤٠

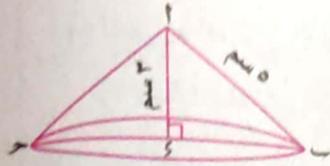
(٨) طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٥ سم ، وطول راسمه ١٧ سم يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

(٩) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم٢

(أ) ٣٧٥ π (ب) ٦٠٠ π (جـ) ١٥٠٠ π (د) ١٨٧٥ π

(١٠) فى الشكل المقابل :



إذا كان : أء = ٣ سم ، أب = ٥ سم

فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم٢.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

(١١) إذا كان طول قطر قاعدة مخروط قائم ١٢ سم وارتفاعه ٨ سم ، فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم٢.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(١٢) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٦ سم ومحيط قاعدته ١٦ π سم فإن مساحته الجانبية = ... سم٢

(أ) ١٤٤ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٦٠ π (د) ٨٠ π

(١٣) مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية تساوى سم٢

(أ) ٣ π نق٢ (ب) ٣ π نق٣ (جـ) ٤ π نق٢ (د) ٤ π نق٣

(١٤) 📖 مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم فإن مساحة قاعدته سم٢

(أ) ٢٥ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠ π (د) ٥٠ π

(١٥) 📖 طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم٢ وطول راسمه ٣٠ سم هو .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ١٤ (جـ) ٣٠ (د) ٣٤

(١٦) 📖 غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية ≃ .... سم٢. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(أ) ٨٨ (ب) ٥٩٦ (جـ) ١٠٧٤ (د) ١٠٤٧

(١٧) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وطول راسمه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم٣

(أ) ٣٢ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٩٦ π (د) ٢٨٨ π

(١٨) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم وطول راسمه ٥ سم يكون حجمه سم٣

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π

(١٩) أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه (ل) دار دورة كاملة حول ب حـ كمحور للدوران فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران بدلالة π ، ل هو ....

(أ) $\frac{\pi \text{ ل}}{٤}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ ل^٢ (جـ) $\frac{\pi \text{ ل}^٣}{٤}$ (د) $\sqrt{٣}$ π ل^٢

(٢٠) مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم فإن ارتفاعه يساوى .... سم.

(أ) ٢٧ (ب) ١٨ (جـ) ٩ (د) ٦

(٢١) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية = ٩٠ π سم^٢.
فإن حجمه = ... سم^٣.

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

(٢٢) حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ومساحته الكلية = ٢١٦ π سم^٢ يساوى .... سم^٣.

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٢٢٠ π (جـ) ٢٨٠ π (د) ٣٢٤ π

(٢٣) مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم^٢.
فإن حجمه = ... سم^٣ حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ٣١٢٢

(٢٤) مخروط دائرى قائم حجمه ٩ π سم^٣ ، وطول نصف قطر قاعدته يساوى ارتفاعه فتكون مساحة قاعدته = ... سم^٢.

(أ) ٩ π (ب) ٣ π (جـ) ٢٧ π (د) ١٢ π

(٢٥) مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^٣ فإن حجمه عندما يتضاعف طول نصف قطر قاعدته = ... سم^٣.

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٤٠٠

(٢٦) مخروط دائرى قائم إذا زاد طول نصف قطر قاعدته للضعف ، وقل ارتفاعه للنصف فإن حجمه ....

(أ) يظل كما هو. (ب) يزداد للضعف.

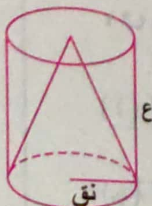
(جـ) يقل للنصف. (د) يزداد لأربعة أمثال.

(٢٧) مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته = ضعف طول ارتفاعه = ٦ سم وهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = طول ارتفاعه = ٦ سم فإن نسبة حجم المخروط : حجم الهرم = ...

(أ) ٣ : π (ب) π : ٣ (جـ) π : ٢ (د) ٢ : π

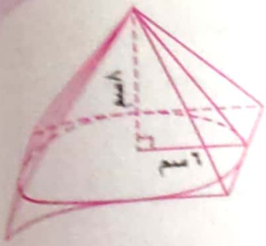
(٢٨) فى الشكل المقابل :

$\frac{\text{حجم المخروط}}{\text{حجم الأسطوانة}}$ = ...



(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{١}$



(٢٩) في الشكل المقابل :

هرم قائم منتظم ومخروط دائري قائم مشتركان في الرأس

وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل

أولاً : المساحة الجانبية للمخروط القائم تساوي .... سم^2

(أ) ٦٠ (ب) ٦٠ π (جـ) ٤٨ (د) ٤٨ π

ثانيًا : المساحة الكلية للهرم المنتظم تساوي .... سم^2

(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٣٨٤ (د) ٤٣٢

ثالثًا : حجم الهرم يساوي .... سم^3

(أ) ٦٤ (ب) ٩٦ (جـ) ٤٨٠ (د) ٣٨٤

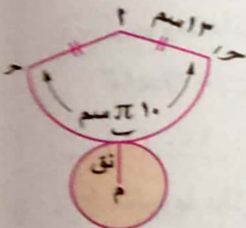
رابعًا : النسبة بين حجم الهرم إلى حجم المخروط تساوي ....

(أ) π : ٣ (ب) ٤ : π (جـ) π : ٤ (د) ٣ : π

خامسًا : النسبة بين المساحة الجانبية للهرم إلى المساحة الجانبية للمخروط تساوي ....

(أ) π : ٣ (ب) ٤ : π (جـ) π : ٤ (د) ٣ : π

(٣٠) الشبكة التي أمامك تصف مجسمًا

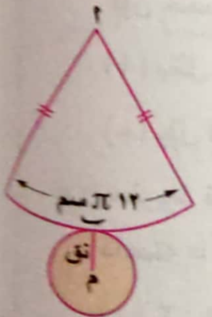


حجمه = ... سم^3

(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

(٣١) الشبكة التي أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^3

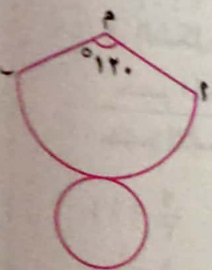


فإن مساحته الكلية = ... سم^2

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

(٣٢) الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم فيه : م ب = ٣ π سم



، ق (∠ أ م ب) = ١٢٠° فإن حجم المجسم = ... سم^3

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ π^2 (ب) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ π^4

(جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) $\frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$ π^3

٣٣ في الشكل المقابل :

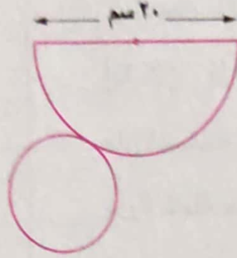


دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين بحيث تكون شبكتى مخروطين قائمين

فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

٣٤ في الشكل المقابل :



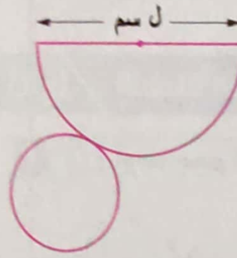
إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٨

(جـ) ٥ (د) ٢,٥

٣٥ في الشكل المقابل :



إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) $\frac{ل}{٢}$ (ب) $\frac{ل}{٣}$

(جـ) $\frac{ل}{٤}$ (د) $\frac{ل}{٥}$

٣٦ الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه

أصبح المخروط الموضح تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

٣٧ القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٠ سم وطول نصف قطر قاعدته ٥ سم فإن الزاوية المركزية لهذا القطاع تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

٣٨ إذا كان لدينا ربع دائرة طول نصف قطرها ١٦ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط الذى يمكن تكوينه من قوس ربع الدائرة = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) ٢

٣٩ مساحة قطاع دائرى : المساحة الكلية للمخروط الدائرى المصمت الذى يمكن تكوينه من طى هذا القطاع ....

(أ) < ١ (ب) > ١ (جـ) = ١ (د) ≤ ١

٤٠ النسبة بين حجم هرم رباعى منتظم وحجم أصغر مخروط دائرى يحتويه تساوى ....

(أ) ٢ : π (ب) ٤ : π (جـ) ٦ : π (د) ٨ : π

(٤١) فى الشكل المقابل :

إذا كان : أ ب = ٣ سم ، ب ء = ء جـ = ١ سم

، ق(∠ أ ب جـ) = ٩٠° فإن حجم الجسم الناشئ

من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول المحور $\overleftrightarrow{أب}$ يساوى ....

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

(٤٢) فى الشكل المقابل :

إذا كان : ظا هـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، أ ب = ٢٦ سم

فإن المساحة الجانبية للجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب و

دورة كاملة حول محور السينات = ... π سم^2.

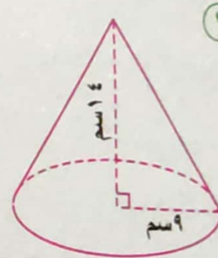
(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٦٠ π

(جـ) ٢٦٠ (د) ٣٦٠ π

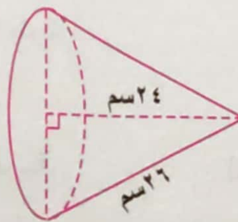
ثانيًا الأسئلة المقالية

١ أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاة :

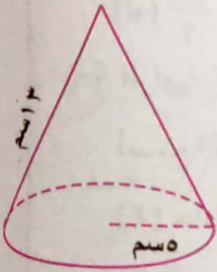
(١)



(٢)

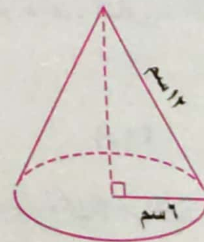


(٣)

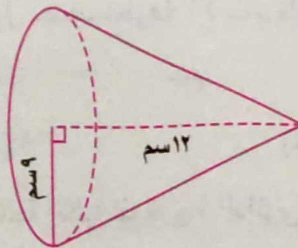


٢ أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط قائم حسب البيانات المعطاة :

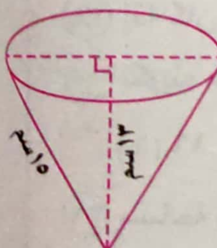
(١)



(٢)



(٣)



٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

« ١٣٦ π سم^2 ، ٢٠٠ π سم^2 ، ٣٢٠ π سم^3 »

٤ أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم ، وطول راسمه ٢٦ سم

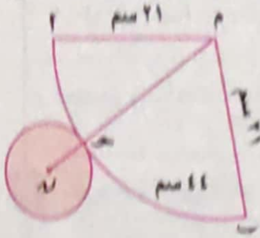
«٢٠ π سم ، ١٠٠ π سم^2»

٥ بوضح الشكل المقابل

شبكة مخروط قائم

، مستعينًا بالبيانات المعطاة

، أوجد ارتفاعه. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$



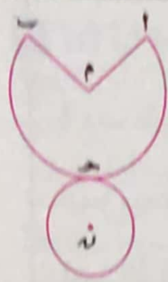
«١٤ $\sqrt{٢}$ سم»

٦ الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم

مخروط قائم مكونة من قطاع دائرى

مساحته ٢٠ π سم^2 وطول قوسه $\overset\frown{أحـب}$ = ٨ π سم

فأوجد ارتفاع المخروط.



«٣ سم»

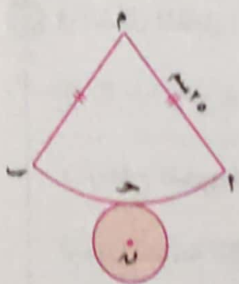
٧ الشكل المقابل يمثل شبكة لمجسم

صف المجسم الناتج من الطى

ثم أوجد ارتفاعه إذا علمت أن :

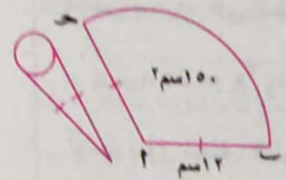
م أ = م ب = ٢٥ سم

، مساحة الدائرة ن = ٤٩ π سم^2



«٢٤ سم»

٨ تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢ سم ومساحته ١٥٠ سم^2 بحيث يتلامس نصفا قطرى دائرته $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ أوجد ارتفاع المخروط لأقرب جزء من عشرة.



«١١,٣ سم»

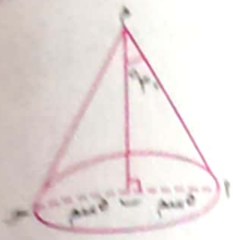
٩ أوجد لأقرب رقم عشرى واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

«٢٨٢,٧ سم^2»

١٠ أوجد حجم مخروط دائرى قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم

«١٢٨٣,٨ سم^3»

١١ فى الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه :

ق (∠ أ م ب) = ٣٠° ، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

احسب مساحته الجانبية والكلية.

«٥٠ π سم٢ ، ٧٥ π سم٢»

---

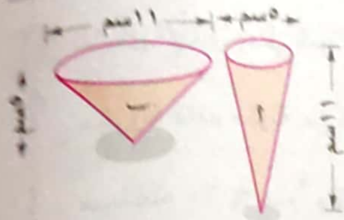
١٢ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر دائرته ٨ سم ومساحته الجانبية = ٩٦ π سم٢

أوجد لأقرب رقم عشرى واحد حجم هذا المخروط.

«٥٩٩,٥ سم٣»

---

١٣ فى الشكل المقابل :



أ ، ب كأسان للشراب

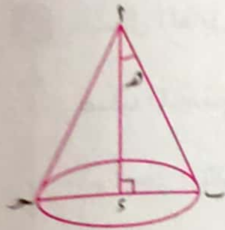
أيهما سعته أكبر ؟

أوجد الفرق بين سعتيهما.

«ب الأكبر ، $\frac{٥٥}{٢}$ π سم٣»

---

١٤ فى الشكل المقابل :



إذا كان : جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

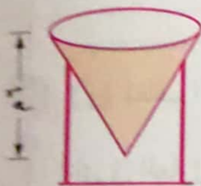
، ارتفاع المخروط = ١٢ سم

أوجد المساحة الكلية للمخروط.

«٢١٦ π سم٢»

---

١٥ هندسة مدنية :



صهريج مياه على شكل مخروط قائم

، حجمه ٣٢ π م٣ وارتفاعه ٦ م

أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.

«٤ م ، (١٦ + ٨ $\sqrt{١٣}$) π م٢»

---

١٦ أيهما أكبر حجمًا ؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠ سم ومحيط قاعدته ٤٨ سم.

---

١٧ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ع وحجمه π ع٣ برهن أن مساحته الجانبية تساوى مساحة السطح الجانبى للأسطوانة القائمة المتحدة معه فى القاعدة والارتفاع.

١٨ الربط بالفيزياء : إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم. أوجد طول قطر قاعدة الإناء. «٨ سم»

١٩ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل. $(\pi = \frac{22}{7})$

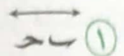
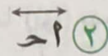
«$8\sqrt{5}$ سم»

٢٠ دورق مخروطى الشكل سعته ٢,٢ لتر وارتفاعه ٢١ سم أوجد طول نصف قطر قاعدته. $(\pi = \frac{22}{7})$ «١٠ سم»

٢١ قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية °٦٠ طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط. «١٦٧,٣ $سم^3$»

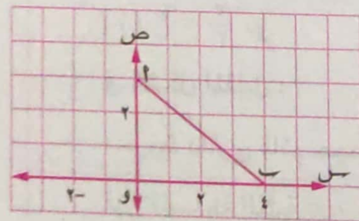
٢٢ أ م ب ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها ٢٠ سم حولت إلى سطح مخروطى دائرى قائم رأسه (م) بحيث انطبق $\overline{مأ}$ على $\overline{مب}$ أوجد نصف قطر قاعدة المخروط وكذا حجمه بدلالة π. «٥ سم ، $\frac{125\sqrt{15}}{3}\pi$ $سم^3$»

٢٣ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران Δ أ ب حـ دورة كاملة حول :

(١)  $\overleftrightarrow{بحـ}$ (٢)  $\overleftrightarrow{أحـ}$

«٩٦ π $سم^3$ ، ٧٦,٨ π $سم^3$»

٢٤ يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد ، احسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول :



(١) محور السينات.

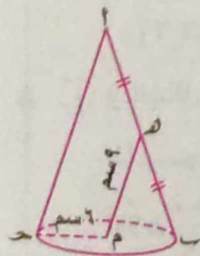
(٢) محور الصادات.

«١٢ π وحدة مكعبة ، ١٦ π وحدة مكعبة»

٢٥ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{بحـ}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران. «٢٥٦ π $سم^3$»

٢٦ فى الشكل المقابل :

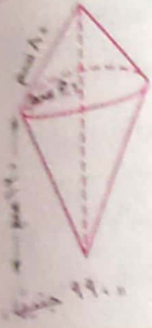
أوجد المساحة الجانبية والكلية والحجم للمخروط الدائرى القائم.



«١٠٨ π $سم^2$ ، ١٤٤ π $سم^2$ ، $144\sqrt{2}\pi$ $سم^3$»

٢٧ ملاحة بحرية :

يوضح الشكل المقابل علامة إرشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحى ، وهى على هيئة مخروطين قائمين لهما قاعدة مشتركة. أوجد تكاليف طلائه بمادة مقاومة لعوامل التعرية ، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيه.



٩٩٠٠ جنيهًا

٢٨ الربط بالصناعة : هرم خماسي منتظم من النحاس، طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه ٤٢ سم ، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم ، طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم فإذا علم أن ١٠ ٪ من النحاس فُقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل ، أوجد ارتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد. ٩,٢٠ سم

٢٩ تفكير إبداعي : مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^3 أوجد حجمه عندما :

(١) يتضاعف ارتفاعه. (٢) يتضاعف طول نصف قطره.

(٣) يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج ؟ فسر إجابتك. ٢٠٠ سم^3 ، ٤٠٠ سم^3 ، ٨٠٠ سم^3

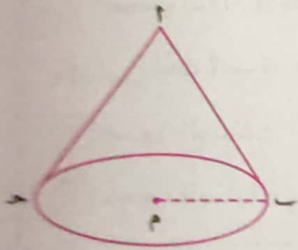
ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق^2 (د) ع = ٤ نق

(٢) فى الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم حجمه ٩٦ π سم^3 وكان : $\frac{م ب}{أ ب} = \frac{٣}{٥}$

فإن المساحة الكلية = ... سم^2

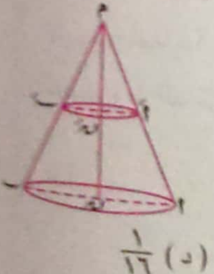
(أ) ٢٤ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٩٦ π (د) ١٩٢ π

(٣) طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروطًا دائريًا قائمًا حجمه ٤٩ π سم^3 وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

(٤) فى الشكل المقابل :



إذا رسم مستوى عمودى على محور المخروط قطعه فى منتصف $\overline{م ن}$ فإن :

أولًا : $\frac{\text{حجم المخروط الأصغر}}{\text{حجم المخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

ثانياً : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (جـ) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{16}$

⑤ النسبة بين حجم هرم ثلاثي منتظم وحجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه بداخل الهرم تساوي ....

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

⑥ النسبة بين حجم هرم ثلاثي منتظم وحجم أصغر مخروط دائري قائم يحتويه تساوي ....

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

⑦ مخروط دائري قائم حجمه (ع) ، إذا زاد طول نصف قطر قاعدته بنسبة ٥٠٪ ، وزاد ارتفاعه بنسبة ٥٠٪ وكان حجمه بعد الزيادة (عَ) فإن : ....

(أ) عَ = ١٥٠٪ ع (ب) عَ = ٢٢٥٪ ع (جـ) عَ = ٣٣٧,٥٪ ع (د) عَ = ٤٥٠٪ ع

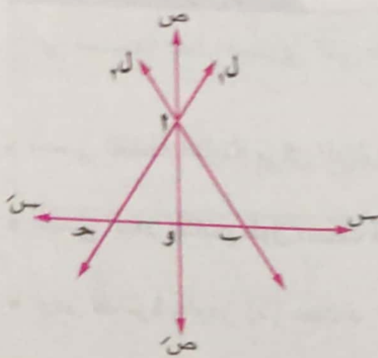
---

٢ في الشكل المقابل :

معادلة المستقيم $ل_1$ هي : $3س - \sqrt{3}ص + 6 = 0$

ومعادلة المستقيم $ل_2$ هي : $\sqrt{3}س + ص - 2\sqrt{3} = 0$

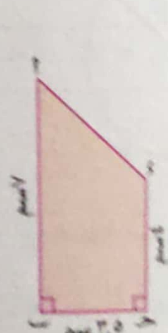
أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب حـ دورة كاملة حول محور السينات.

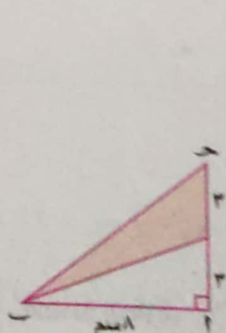


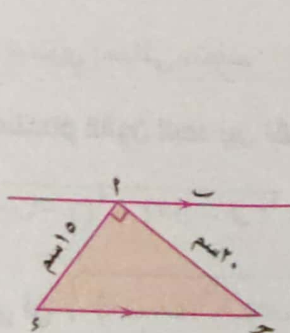
«١٦ π وحدة مكعبة»

---

٣ أوجد حجم الجسم الناشئ عن دوران المساحة المظللة دورة كاملة حول $\overline{أب}$ كمحور للدوران في كل من الأشكال التالية :

①


②


③


«١٩٢,٤ ، ٢٢٦,٢ ، ٧٥٣٩,٨ سم^3»

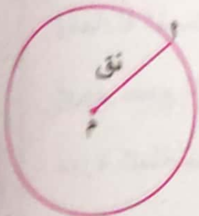
4

الدائرة



تعريف الدائرة

هي مجموعة نقط المستوى التي تكون على بُعد ثابت من نقطة ثابتة في المستوى.



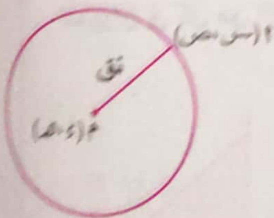
* تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة (م)
* يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة (نق)
* نرمز للدائرة بالرمز (د) حيث د = {أ : م أ = نق ، نق > ٠}

أولاً معادلة الدائرة (بدلالة إحداثيي مركزها وطول نصف قطرها)

إذا كانت أ = (س ، ص) نقطة ما على الدائرة التي

مركزها النقطة م (ء ، هـ) وطول نصف قطرها = نق

في مستوى إحداثي متعامد



وباستخدام قانون البعد بين نقطتين نجد أن :

$\sqrt{(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢}} = نق$

أي أن $(س - ء)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$ **«معادلة الدائرة»**

ملاحظـات

١ إذا كان مركز الدائرة هو نقطة الأصل (٠ ، ٠)

فإن **معادلة الدائرة هي :** $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = \text{نق}^2$

٢ وضع النقطة (س_1 ، ص_1) بالنسبة للدائرة د : $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

- إذا كان : $(\text{س}_1 - \text{د})^2 + (\text{ص}_1 - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$ فإن النقطة تقع على الدائرة.
- إذا كان : $(\text{س}_1 - \text{د})^2 + (\text{ص}_1 - \text{هـ})^2 > \text{نق}^2$ فإن النقطة تقع خارج الدائرة.
- إذا كان : $(\text{س}_1 - \text{د})^2 + (\text{ص}_1 - \text{هـ})^2 < \text{نق}^2$ فإن النقطة تقع داخل الدائرة.

٣ تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفي قطريهما ،

فمثلاً : إذا كانت معادلة الدائرة د_1 هي : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = ٤٩$

، معادلة الدائرة د_2 هي : $(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} - ٤)^2 = ٤٩$

فإن : $\text{نق}_1 = \text{نق}_2 = \sqrt{٤٩} = ٧$ وحدة طولية. أي أن : الدائرتين متطابقتان.

- **ونلاحظ أن :** الدائرة د_2 هي صورة الدائرة د_1 بالانتقال (٣ ، ٤)

حيث إن صورة النقطة (س ، ص) بالانتقال (أ ، ب) هي : (س + أ ، ص + ب)

ثانياً الصورة العامة لمعادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٢\,\text{ل}\,\text{س} + ٢\,\text{ك}\,\text{ص} + \text{جـ} = ٠$$

حيث المركز (م) = $(-\text{ل} ، -\text{ك}) = \left(-\frac{1}{2}\ \text{معامل س} ، -\frac{1}{2}\ \text{معامل ص}\right)$

، $\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}}$ ، $\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ} > ٠$

فمثلاً :

الدائرة التي معادلتها هي : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + ٨\,\text{س} - ٤\,\text{ص} - ١٦ = ٠$

يكون مركزها = $\left(-\frac{1}{2}\ \text{معامل س} ، -\frac{1}{2}\ \text{معامل ص}\right) = (-٤ ، ٢)$

، $\text{نق} = \sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{جـ}} = \sqrt{١٦ + ٤ - (-١٦)} = ٦$ وحدة طولية.

* **يمكن استنتاج الصورة العامة لمعادلة الدائرة كما يلى :**

نعلم أن معادلة الدائرة التى مركزها (ء ، هـ) ، طول نصف قطرها = نق هى : $(س - ء)^2 + (ص - هـ)^2 = نق^2$

أى أن $س^2 + ص^2 - 2 ء س - 2 هـ ص + ء^2 + هـ^2 - نق^2 = 0$

وبوضع م = (ء ، هـ) = (- ل ، - ك)

∴ $س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + ل^2 + ك^2 - نق^2 = 0$

، ∵ ل ، ك ، نق ثوابت ∴ $ل^2 + ك^2 - نق^2 = حـ$ (ثابت)

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى : $س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + حـ = 0$

ملاحظات

1 الصورة العامة لمعادلة الدائرة : $س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص + حـ = 0$ تتصف بالآتى :

* معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص
* خالية من الحد المشتمل على س ص **أى أن** معامل س ص = 0
* معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = 1

2 لكى تمثل معادلة الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة حقيقية يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة وأن يكون : $ل^2 + ك^2 - حـ > 0$.

3 عند تعيين مركز أو طول نصف قطر دائرة من معادلتها العامة يجب أن يكون معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = 1 لذلك يلزم أولًا القسمة على هذا المعامل إذا كان خلاف الوحدة.

حالات خاصة

1 معادلة الدائرة المارة بنقطة الأصل هى :

$س^2 + ص^2 + 2 ل س + 2 ك ص = 0$ المعادلة خالية من الحد المطلق أى (حـ = 0)

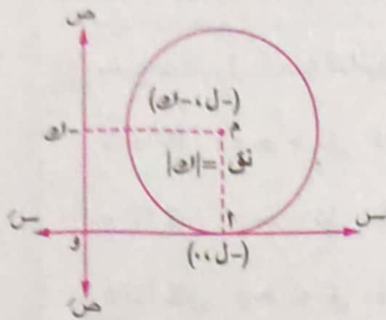
2 معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور السينات هى :

$س^2 + ص^2 + 2 ل س + حـ = 0$ المعادلة خالية من الحد المشتمل على ص أى (ك = 0)

3 معادلة الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات هى :

$س^2 + ص^2 + 2 ك ص + حـ = 0$ المعادلة خالية من الحد المشتمل على س أى (ل = 0)

٤ معادلة الدائرة التى تمس محور السينات :



إذا مست الدائرة التى مركزها (– ل ، – ك)

محور السينات فإن :

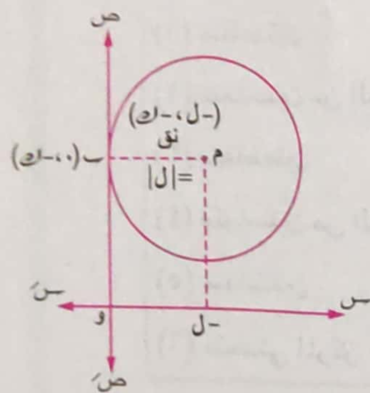
نقطة التماس أ هى : (– ل ، ٠)

ويكون نق = |ك|

∴ حـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} – ك^{٢} = ل^{٢}

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠

٥ معادلة الدائرة التى تمس محور الصادات :



إذا مست الدائرة التى مركزها (– ل ، – ك)

محور الصادات فإن :

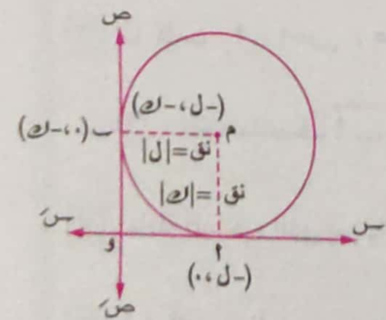
نقطة التماس ب هى : (٠ ، – ك)

ويكون نق = |ل|

∴ حـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} – ل^{٢} = ك^{٢}

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ك^{٢} = ٠

٦ معادلة الدائرة التى تمس المحورين :



إذا مست الدائرة التى مركزها (– ل ، – ك) المحورين

فإن : نق = |ل| = |ك|

∴ حـ = ل^{٢} + ك^{٢} – نق^{٢} = نق^{٢} + نق^{٢} – نق^{٢} = نق^{٢}

∴ حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢}

وتصبح معادلة الدائرة على الصورة :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

حيث : |ل| = |ك| = نق ، حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢}

تذكر أن

١ وضع مستقيم ل بالنسبة للدائرة د والتى مركزها (م) ويفرض أن $\overleftrightarrow{م حـ} \perp$ ل ويقطعه فى حـ

* إذا كان : م حـ < نق فإن : ل قاطع للدائرة فى نقطتين مختلفتين.
* إذا كان : م حـ = نق فإن : ل مماس للدائرة.
* إذا كان : م حـ > نق فإن : ل خارج الدائرة ولا يقطعها فى أى نقطة.

٢ إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ على الترتيب (حيث $نق_1 > نق_2$)

إذا كانت الدائرتان م ، ن	فإن
(١) متباعدتين	م ن > $نق_1 + نق_2$
(٢) متماستين من الخارج	م ن = $نق_1 + نق_2$
(٣) متقاطعتين	$نق_1 - نق_2$ < م ن < $نق_1 + نق_2$
(٤) متماستين من الداخل	م ن = $نق_1 - نق_2$
(٥) متداخلتين	م ن < $نق_1 - نق_2$
(٦) متحدتى المركز	م ن = صفر

٣ المماس للدائرة يكون عموديًا على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

٤ المماسان لدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها متوازيان.

٥ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول.

٦ إذا كانت : أ = $(س_1 ، ص_1)$ ، ب = $(س_2 ، ص_2)$

فإن : نقطة منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{س_1 + س_2}{٢} ، \frac{ص_1 + ص_2}{٢}\right)$

٧ معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $(س_1 ، ص_1)$ وميله = م هى : $م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$

٨ طول العمود المرسوم من النقطة $(س_1 ، ص_1)$ على المستقيم الذى معادلته :

أ س + ب ص + حـ = ٠ يساوى $\frac{|أ س_1 + ب ص_1 + حـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$

مثال ١

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٢ ، ٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات طولية.

الحل

معادلة الدائرة هي : (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = (٥)^{٢}

أي : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٦ ص − ١٢ = ٠ «بعد الفك والتبسيط»

حل آخر :

∵ ل = ٢ ، ك = −٣ ، جـ = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢} = (٢)^{٢} + (−٣)^{٢} − (٥)^{٢} = −١٢

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٦ ص − ١٢ = ٠ «وهي نفس الصورة التي حصلنا عليها سابقًا»

مثال ٢

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٦ $\sqrt{٢}$ وحدة طولية
ثم أثبت أنها تمر بالنقطة ($\sqrt{٢}$ ، −٤)

الحل

معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} = (٣ $\sqrt{٢}$)^{٢} أي : س^{٢} + ص^{٢} = ١٨

وبالتعويض بالنقطة ($\sqrt{٢}$ ، −٤) في الطرف الأيمن للمعادلة

∴ ($\sqrt{٢}$)^{٢} + (−٤)^{٢} = ١٨ = الطرف الأيسر   ∴ النقطة ($\sqrt{٢}$ ، −٤) ∈ الدائرة.

مثال ٣

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها م = (٣ ، −٢) وتمر بالنقطة أ = (−١ ، ١)

الحل

نق = م أ = $\sqrt{(٣ + ١)^{٢} + (-٢ - ١)^{٢}}$ = ٥ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هي : (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

مثال ٤

أوجد معادلة الدائرة التي قطرها $\overline{أب}$ حيث أ = (٤ ، −١) ، ب = (−٢ ، ١)

الحل

∵ مركز الدائرة م هو نقطة منتصف $\overline{أب}$ ∴ م = $\left(\frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{-١ + ١}{٢}\right)$ = (١ ، ٠)

، ∵ نق = م أ = $\sqrt{(٤ - ١)^{٢} + (-١ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هي : (س − ١)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = ($\sqrt{١٠}$)^{٢} أي : (س − ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٠

مثال ٥

أوجد مركز وطول نصف قطر كل من الدوائر الآتية :

١ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٤ = ٠ ، ٢ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ص − ٩ = ٠

٣ ٧ س^{٢} + ٧ ص^{٢} + ٤٢ س − ١٤ ص + ٢٨ = ٠

الحل

١ ∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٤ = ٠ ∴ ل = −١ ، ك = ٢ ، حـ = −٤

∴ المركز = (− ل ، − ك) = (١ ، −٢)

، نق = √(ل^{٢} + ك^{٢} − حـ) = √((−١)^{٢} + (٢)^{٢} − (−٤)) = ٣ وحدة طولية

٢ ∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ص − ٩ = ٠

∴ ل = صفر ، ك = −٢ ، حـ = −٩

∴ المركز = (− ل ، − ك) = (٠ ، ٢)

، نق = √(ل^{٢} + ك^{٢} − حـ) = √((٠)^{٢} + (−٢)^{٢} − (−٩)) = √١٣ وحدة طولية.

> **لاحظ أن**
> ل = صفر لأن معامل س = ٠.

٣ بالقسمة على ٧ لنجعل معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

∴ تصبح المعادلة على الصورة : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٢ ص + ٤ = ٠

∴ ل = ٣ ، ك = −١ ، حـ = ٤ ∴ المركز = (− ل ، − ك) = (−٣ ، ١)

، نق = √(ل^{٢} + ك^{٢} − حـ) = √((٣)^{٢} + (−١)^{٢} − ٤) = √٦ وحدة طولية.

مثال ٦

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣ ، −٤) وتمس محور السينات.

الحل

∵ ل = −٣ ، ك = ٤ ، ∵ الدائرة تمس محور السينات. ∴ نق = | ك | ، حـ = ل^{٢}

∴ نق = ٤ وحدة طولية ، حـ = ٩ «يمكن حساب حـ من العلاقة : حـ = ل^{٢} + ك^{٢} − نق^{٢}»

∴ معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص + ٩ = ٠

مثال ٧

أوجد معادلة الدائرة التي طول نصف قطرها ٥ وحدات وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٣)

الحل

∵ الدائرة تمس محور الصادات عند (٠ ، ٣)

∴ المركز = (− ل ، ٣) ، نق = | ل | وحدة طولية أي أن : | ل | = ٥ ∴ ل = ± ٥ ، حـ = ك^{٢} = ٩

∴ توجد دائرتان إحداهما مركزها (−٥ ، ٣) ومعادلتها : س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س − ٦ ص + ٩ = ٠

والأخرى مركزها (٥ ، ٣) ومعادلتها : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٦ ص + ٩ = ٠

مثال ٨

أوجد معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (-٤ ، ٤)

الحـل

∵ الدائرة تمس المحورين ∴ حـ = ل٢ = ك٢ = ١٦

∴ المعادلة هى : $س^2 + ص^2 + ٨ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

مثال ٩

بيّن أى المعادلات الآتية تُعبر عن دائرة :

١ $س^2 + ٣ ص^2 - ٢ س + ٤ ص + ٥ = ٠$

٢ $٢ س^2 - س ص + ٢ ص^2 + ٥ س - ص - ٢ = ٠$

٣ $س^2 + ص^2 + ٧ س - ص + ٨ = ٠$

٤ $٢ س^2 + ٢ ص^2 - ٦ س + ٤ ص + ٩ = ٠$

٥ $س^2 + ص^2 - ١٦ س + ١٢ ص + ١٠٠ = ٠$

٦ $س^2 + ٦ س - ٨ ص - ٧ = ٠$

الحـل

١ ∵ معامل $س^2 \neq$ معامل $ص^2$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٢ ∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٣ ∵ معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة

، ∵ ٢ ل = ٧ ، ٢ ك = -١ ∴ ل = $\frac{٧}{٢}$ ، ك = $-\frac{١}{٢}$ ، حـ = ٨

∴ $ل^2 + ك^2 - حـ = \frac{٤٩}{٤} + \frac{١}{٤} - ٨ = \frac{٩}{٢} > ٠$

∴ المعادلة تعبر عن دائرة مركزها $\left(-\frac{٧}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$ ، نق = $\sqrt{\frac{٩}{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ وحدة طولية.

٤ ∵ معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة

وبالضرب فى $\frac{١}{٢}$ لجعل معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = ١

∴ $س^2 + ص^2 - ٣ س + ٢ ص + \frac{٩}{٢} = ٠$

∴ ٢ ل = -٣ ، ٢ ك = ٢ ∴ ل = $-\frac{٣}{٢}$ ، ك = ١ ، حـ = $\frac{٩}{٢}$

∴ $ل^2 + ك^2 - حـ = \frac{٩}{٤} + ١ - \frac{٩}{٢} = -\frac{٥}{٤} < ٠$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٥ ∵ معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ والمعادلة خالية من س ص

∴ المعادلة يمكن أن تعبر عن دائرة ∴ ٢ ل = −١٦ ، ٢ ك = ١٢

∴ ل = −٨ ، ك = ٦ ، حـ = ١٠٠

∴ $ل^٢ + ك^٢ - حـ$ = ٦٤ + ٣٦ − ١٠٠ = صفر ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٦ ∵ المعادلة خالية من $ص^٢$ ∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

مثال ١٠

أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها = ٣ وحدات ومعادلتا قطرين فيها هما :

س + ص = ٢ ، ٢ س − ص = ٧

الحل

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢ (١)

، ٢ س − ص = ٧ (٢)

بالجمع : ∴ ٣ س = ٩ ∴ س = ٣

وبالتعويض : ∴ ص = −١ ∴ المركز هو النقطة (٣ ، −١)

∴ ل = −٣ ، ك = ١ ، حـ = $ل^٢ + ك^٢ - نق^٢$ = ٩ + ١ − ٩ = ١

∴ معادلة الدائرة هى : $س^٢ + ص^٢$ − ٦ س + ٢ ص + ١ = ٠

مثال ١١

دائرة مركزها م = (−٢ ، ٧) وطول نصف قطرها نق = ٥ وحدات. بيِّن أى النقط الآتية يقع على الدائرة وأيها يقع داخلها وأيها يقع خارجها : أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٠ ، −٥) ، حـ = (٢ ، ٤)

الحل

∵ معادلة الدائرة هى : $(س + ٢)^٢ + (ص - ٧)^٢ = ٢٥$

وبالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ فى الطرف الأيمن للمعادلة.

∵ $(-١ + ٢)^٢ + (٣ - ٧)^٢ = ١٧ < نق^٢$ ∴ النقطة أ (−١ ، ٣) تقع داخل الدائرة

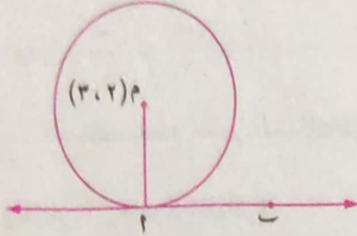
، ∵ $(٠ + ٢)^٢ + (-٥ - ٧)^٢ = ١٤٨ > نق^٢$ ∴ النقطة ب (٠ ، −٥) تقع خارج الدائرة

، ∵ $(٢ + ٢)^٢ + (٤ - ٧)^٢ = ٢٥ = نق^٢$ ∴ النقطة حـ (٢ ، ٤) تقع على الدائرة.

مثال ١٢

أوجد معادلة الدائرة التى مركزها م = (٢ ، ٣) والمستقيم ٣ س + ٤ ص + ٢ = ٠ مماس لها عند النقطة أ

الحل



∵ م أ نصف قطر ، أب مماس للدائرة ∴ م أ ⊥ أب

∴ م أ = $\frac{|٣ \times ٢ + ٤ \times ٣ + ٢|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٤ وحدة طولية

∴ نق = ٤ وحدة طولية

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٦$

مثال ١٣

حدد موضع الدائرة $د_١$: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

بالنسبة للدائرة $د_٢$: $س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ص + ١ = ٠$

الحل

∵ $د_١$: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$ ∴ المركز $م_١$ = (٣ ، ٢)

، $نق_١ = \sqrt{٤} = ٢$ وحدة طولية

، ∵ $د_٢$: $س^٢ + ص^٢ + ٢س + ٢ص + ١ = ٠$ ∴ المركز $م_٢$ = (-١ ، -١)

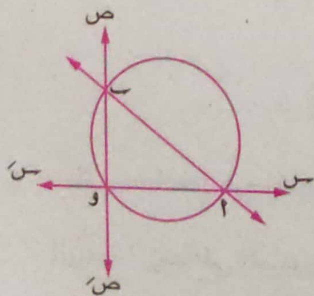
، $نق_٢ = \sqrt{١ + ١ - ١} = ١$ وحدة طولية ∴ $نق_١ + نق_٢ = ٢ + ١ = ٣$ وحدة طولية

، $م_١ م_٢ = \sqrt{(٣ + ١)^٢ + (٢ + ١)^٢} = ٥$ وحدة طولية

∴ $م_١ م_٢ > نق_١ + نق_٢$ ∴ الدائرتان متباعدتان.

مثال ١٤

فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة أب هى :

٦ س + ٨ ص - ٤٨ = ٠

ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطتين أ ، ب

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط أ ، و ، ب

الحــل

∵ $ق(\angle$ أ و ب$) = 90°$ ∴ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة

، ∵ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى : ٦ س + ٨ ص = ٤٨

أى أن : $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦} = ١$

∴ المستقيم يقطع محور السينات فى النقطة أ = (٨ ، ٠) ، يقطع محور الصادات فى النقطة ب = (٠ ، ٦)

وبفرض أن م مركز الدائرة ∴ م منتصف $\overline{أب} = \left(\frac{٨ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right) = (٤ ، ٣)$

، ∵ أ ب = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = ١٠ وحدة طولية.

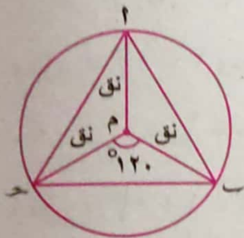
∴ نق = ٥ وحدة طولية ∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$

مثال ١٥

أوجد مساحة سطح مثلث متساوى الأضلاع تمر برءوسه الدائرة :

$س^2 + ص^2 + ٦ س - ٢ ص - ١٥ = ٠$ علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٤ سم

الحــل



∵ ل = ٣ ، ك = -١ ، حـ = -١٥

∴ نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - حـ} = \sqrt{٩ + ١ + ١٥}$ = ٥ وحدة طولية

فإذا كانت م هى مركز الدائرة التى تمر برؤوس

△ أ ب حـ المتساوى الأضلاع ورسمنا $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ ، $\overline{محـ}$ فإن :

$ق(\angle$ ب م حـ$) = \frac{٣٦٠}{٣} = ١٢٠°$ ويكون :

مساحة سطح △ أ ب حـ = ٣ × مساحة سطح △ م ب حـ

$= ٣ \times \frac{١}{٢}$ م ب × م حـ × جا$(\angle$ ب م حـ$) = \frac{٣}{٢}$ نق^2 جا ١٢٠°

$= \frac{٣}{٢} \times ٢٥$ جا ٦٠° $= \frac{٣}{٢} \times ٢٥ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{٧٥\sqrt{٣}}{٤}$ وحدة مربعة

، ∵ كل وحدة طول فى المستوى الإحداثى تمثل ٤ سم

∴ الوحدة المربعة فى المستوى الإحداثى تمثل مساحة قدرها = $(٤)^2$ = ١٦ سم^2

∴ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{٧٥\sqrt{٣}}{٤} \times ١٦ = ٣٠٠\sqrt{٣}$ سم^2

ملاحظة

إذا كان عدد أضلاع مضلع منتظم = ن ضلعًا ، طول نصف قطر الدائرة المارة برءوسه = نق

فإن: مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{°٣٦٠}{ن}\right)$

فمثلًا : السداسي المنتظم المرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٨ سم تكون :

مساحة سطحه = $\frac{٦}{٢}$ × $(٨)^{٢}$ × جا $\left(\frac{°٣٦٠}{٦}\right)$ = ٣ × ٦٤ × جا °٦٠

= ٣ × ٦٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩٦ $\sqrt{٣}$ وحدة مربعة.

مثال (١٦)

أوجد المعادلة الإحداثية للدائرة التي تمر بالنقط : أ = (٦ ، ٣) ، ب = (٢ ، ٣)

، حـ = (٤ ، ١) ثم عيِّن مركزها وطول نصف قطرها.

الحل

نفرض أن معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

∵ النقط أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة فهي تحقق معادلتها

∴ ٣٦ + ٩ + ١٢ ل + ٦ ك + حـ = ٠ أي : ١٢ ل + ٦ ك + حـ = −٤٥ (١)

، ٤ + ٩ + ٤ ل + ٦ ك + حـ = ٠ أي : ٤ ل + ٦ ك + حـ = −١٣ (٢)

، ١٦ + ١ + ٨ ل + ٢ ك + حـ = ٠ أي : ٨ ل + ٢ ك + حـ = −١٧ (٣)

بطرح (٢) من (١) : ∴ ٨ ل = −٣٢ ∴ ل = −٤

وبطرح (٣) من (١) : ∴ ٤ ل + ٤ ك = −٢٨ ∴ ل + ك = −٧

∴ −٤ + ك = −٧ ∴ ك = −٣

وبالتعويض في (٣) عن ل ، ك : ∴ −٣٢ − ٦ + حـ = −١٧ ∴ حـ = ٢١

∴ المعادلة هي : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ٦ ص + ٢١ = ٠ حيث المركز = (٤ ، ٣)

، نق = $\sqrt{١٦ + ٩ - ٢١}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢ وحدة طولية.

مثال ١٧

أوجد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات وتمر بالنقطتين : (−١ ، ٢) ، (−٣ ، ٤)

الحل

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك| ، حـ = ل^{٢}

لذلك نفرض أن معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠

، ∵ الدائرة تمر بالنقطة (−١ ، ٢) فهي تحقق معادلتها.

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + ل^{٢} = ٠ ∴ ل^{٢} − ٢ ل + ٤ ك = −٥ (١)

، ∵ الدائرة تمر بالنقطة (−٣ ، ٤) فهي تحقق معادلتها.

∴ ٩ + ١٦ − ٦ ل + ٨ ك + ل^{٢} = ٠ ∴ ل^{٢} − ٦ ل + ٨ ك = −٢٥ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢ والطرح من المعادلة (٢) :

∴ − ل^{٢} − ٢ ل = −١٥

∴ ل^{٢} + ٢ ل − ١٥ = ٠

∴ (ل − ٣) (ل + ٥) = ٠ ∴ ل = ٣ أ، ل = −٥

∴ ك = −٢ أ، ك = −١٠

∴ توجد دائرتان في إحداهما ل = ٣ ، ك = −٢ فتكون المعادلة هي :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٤ ص + ٩ = ٠

وفي الدائرة الأخرى ل = −٥ ، ك = −١٠ فتكون المعادلة هي :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٢٠ ص + ٢٥ = ٠



من أسئلة الكتاب المدرسى • تذكر • فهم • تطبيق • مستويات عليا

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مركز الدائرة التى $\overline{أب}$ قطر فيها حيث : أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٥ ، −٣) هو ....

(أ) (٤ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٦ ، ٦) (د) (٠ ، ٤)

(٢) الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠$

طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٩

(٣) الدائرة التى معادلتها $(س + ٢)^٢ + ص^٢ + ٢ ص = ٠$ طول نصف قطرها

يساوى .... وحدة طول.

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

(٤) طول قطر الدائرة : $٤ س^٢ + ٤ ص^٢ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

(٥) إذا كان المستقيمان : ص = −٦ ، ص = ٨ يمسان دائرة م

فإن طول نصف قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) ١٤

(٦) إذا كان المستقيم : ص = ٢ يمس الدائرة م التى مركزها (٦ ، ٩)

فإن طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) ٦ (ب) ٧ (جـ) ١٤ (د) ١٥

(٧) طول نصف قطر الدائرة :

$(ن + ٣) س^٢ + ص^٢ − ٤ ص + (م − ٢) س ص + (م − ن) س − ٨ = ٠$

هو .... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) $٢\sqrt{٢}$

(٨) مساحة الدائرة التى معادلتها : $(س − ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٧$ تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٣,٥ π (ب) ٧ π (جـ) ١٢,٢٥ π (د) ٤٩ π

(٩) إذا كانت المعادلة : ٢ $س^٢$ + ﺃ $ص^٢$ + ب س ص − ٥ = ٠ تمثل دائرة

فإن مساحتها = ... وحدة مربعة.

(أ) ٥ π (ب) $\sqrt{٥}$ π (جـ) $\frac{٥}{٢}$ π (د) ٥ $\sqrt{٢}$ π

(١٠) محيط الدائرة التى معادلتها : $(س − ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$ يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(١١) محيط الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢$ + ٢ س − ٢ ص − ٢ = ٠ هو .... وحدة طول.

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٤ π (د) ٨ π

(١٢) محيط الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢ = ٨$ هو .... وحدة طول.

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π (د) ٤ $\sqrt{٢}$ π

(١٣) إذا كان المستقيمان : س = −٣ ، س = ٤ يمسان الدائرة م

فإن محيطها = ... وحدة طول. حيث $(π = \frac{٢٢}{٧})$

(أ) ٢٢ (ب) ٤٤ (جـ) ١٢ (د) ١٤

(١٤) إذا كان : $\begin{pmatrix} س & ص & ٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ −٢ \end{pmatrix}$ = ▭ فإن المعادلة الناتجة تمثل دائرة

طول قطرها = ... وحدة طول. حيث ▭ المصفوفة الصفرية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

(١٥) المعادلة : $\begin{vmatrix} س & ت ص \\ ت ص & س \end{vmatrix}$ − ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧

(١٦) أى المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ؟

(أ) $س^٢ − ص^٢$ + س − ص = ٦ (ب) ٢ $س^٢ + ص^٢$ − س + ص = ٥

(جـ) $س^٢ + ص^٢$ − س = ٦ (د) $س^٢ + ص^٢$ − س ص = ٦

(١٧) إذا كانت المعادلة : ٢ $س^٢$ + (ﺃ − ١) $ص^٢$ + ٥ س − ٣ ص = ٧ تمثل دائرة فإن : ﺃ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(١٨) إذا كانت : $س^٢ + ص^٢$ + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

(١٩) الدائرة التى معادلتها : $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٦$ مركزها ....

(أ) (٢ ، ٣)　(ب) (٢ ، -٣)　(جـ) (١٣ ، ١٦)　(د) (٤ ، ٩)

(٢٠) مركز الدائرة : $٢ س^٢ + ٢ ص^٢ - ٣٢ = ٠$ هو ....

(أ) (٠ ، ٠)　(ب) (٢ ، ٢)　(جـ) (١ ، ١)　(د) (-١ ، -١)

(٢١) مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤)　(ب) (٤ ، -٣)　(جـ) (-٣ ، ٤)　(د) (-٤ ، ٣)

(٢٢) مركز الدائرة التى معادلتها : $٢ س^٢ + ٢ ص^٢ + ١٢ س - ١٦ ص = ٠$ هو ....

(أ) (٣ ، -٤)　(ب) (-٦ ، ٨)　(جـ) (-٣ ، ٤)　(د) (٦ ، -٨)

(٢٣) الدائرة : $(س + ٢)^٢ + ص^٢ + ٢ ص = ٠$ مركزها النقطة ....

(أ) (٢ ، ٢)　(ب) (-٢ ، -١)　(جـ) (٢ ، -١)　(د) (-٢ ، ٠)

(٢٤) مركز الدائرة التى تمر بنقطة الأصل والنقطتين أ (-٦ ، ٠) ، ب (٠ ، ٨) هو ....

(أ) (٤ ، -٣)　(ب) (-٥ ، ٥)　(جـ) (٥ ، ٥)　(د) (-٣ ، ٤)

(٢٥) إذا مست أى دائرة محورى الإحداثيات وكانت مرسومة فى الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم ....

(أ) ص = س　(ب) ص = - س　(جـ) ص = س + ١　(د) ص = س - ١

(٢٦) كم عدد الدوائر التى مركزها (٣ ، -٥) وتمس أحد المحورين ؟

(أ) ١　(ب) ٢　(جـ) ٣　(د) ٤

(٢٧) النقطة (٢ ، ٢) تقع .... الدائرة التى معادلتها $س^٢ + ص^٢ = ٩$

(أ) على　(ب) داخل　(جـ) خارج　(د) فى مركز

(٢٨) النقطة (٢ ، ٠) تقع على ....

(أ) محور السينات.　(ب) محور الصادات.

(جـ) المستقيم : ص = ٢ س　(د) الدائرة : $س^٢ + ص^٢ = ٩$

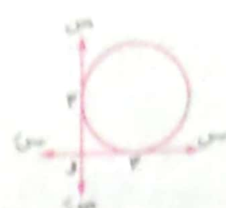
(٢٩) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ من النقط الآتية هى ....

(أ) (٢ ، ٣)　(ب) (٣ ، -٢)　(جـ) (٢ ، ٥)　(د) (٤ ، ٣)

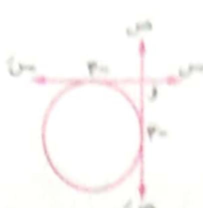
(٣٠) الدائرة التى معادلتها : $(س - ١)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٥$ تمر بالنقطة ....

(أ) (٠ ، ٠)　(ب) (٣ ، -١)　(جـ) (٢ ، -٤)　(د) كل ما سبق.

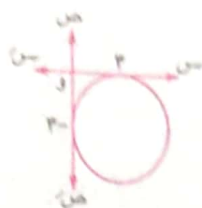
(٣١) الدائرة د : (س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩ يمثلها الشكل ....



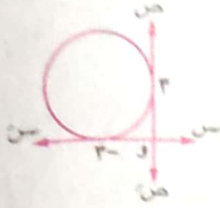
(أ)



(ب)



(جـ)



(د)

(٣٢) الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٩ = ٠
(ب) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ص + ٣ = ٠
(د) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ص + ٩ = ٠

(٣٣) معادلة الدائرة التى مركزها (٤ ، ٣) وتمس محور السينات هى ....

(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦
(ب) (س − ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩
(جـ) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٩
(د) (س + ٣)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

(٣٤) معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (−٤ ، ٤) هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠
(ب) س^{٢} + ص^{٢} = ١٦
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠
(د) س^{٢} + ص^{٢} = ٨

(٣٥) 📖 معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠
بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢) هى ....

(أ) (س + ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥
(ب) (س − ٨)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥
(جـ) (س − ٨)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥
(د) (س + ٥)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} = ٢٥

(٣٦) معادلة الدائرة التى مركزها (−٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

(أ) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٥
(ب) (س − ٤)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥
(جـ) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٦٢٥
(د) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

(٣٧) معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم : ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص = ١٦
(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص − ١١ = ٠
(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص − ١٦ = ٠
(د) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٤ ص = ١١

(٣٨) معادلة الدائرة التى يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هى ....

(أ) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٨
(ب) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٨
(جـ) (س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٣٦
(د) (س − ٣)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٩

(٣٩) معادلة الدائرة التى مركزها يقع على المستقيم : ص = $\frac{١}{٢}$ س وتمس محور السينات يمكن أن تكون ....

(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٤$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ١٦$

(جـ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$ (د) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

(٤٠) معادلة الدائرة متحدة المركز مع الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٢ ص - ٦ = ٠$

وتمر بالنقطة (-٣ ، ٤) هى ....

(أ) $(س + ٣)^٢ + ص^٢ = ١٦$ (ب) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١٦$ (د) $(س - ٣)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٦١$

(٤١) فى المعادلات الآتية :

الدائرة التى مركزها يقع على محور الصادات ولا تقطع محور السينات معادلتها هى ....

(أ) $س^٢ + (ص - ١)^٢ = ٤$ (ب) $س^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(جـ) $س^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٩$ (د) $(س + ٥)^٢ + ص^٢ = ١٦$

(٤٢) معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (-٤ ، -٣) ومساحة سطحها ٢٥ π سم^٢ هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٨ س + ٦ ص - ٢٥ = ٠$ (ب) $س^٢ + ص^٢ + ٨ س + ٦ ص = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س + ٣ ص + ٢٥ = ٠$ (د) $س^٢ + ص^٢ + ٨ س - ٦ ص = ٠$

(٤٣) أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ = (-١ ، ٤) ، ب = (٧ ، ٨) ، حـ = (٩ ، ٤) ، ء = (١ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة المارة برؤوسه هى ....

(أ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

(جـ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٢٥$ (د) $(س - ٤)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ١٦$

(٤٤) أ ب حـ ء مربع مركزه الهندسى نقطة الأصل وطول ضلعه $٢\sqrt{٣}$ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة التى تمس أضلاعه هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٣$ (ب) $س^٢ + ص^٢ = ١٢$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٦$ (د) $(س - \sqrt{٣})^٢ + (ص - \sqrt{٣})^٢ = ٣$

(٤٥) معادلة الدائرة التى تمر برؤوس سداسى منتظم مساحته $٦\sqrt{٣}$ سم^٢ ومركزها نقطة الأصل هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٢$ (ب) $س^٢ + ص^٢ = ٤$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٩$ (د) $س^٢ + ص^٢ = ١٦$

(٤٦) الدائرة التي معادلتها : $(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 = أ^2$ حيث $(أ \neq ب)$ ....

(أ) تمس محور السينات. (ب) تمس محور الصادات.

(جـ) تمس محوري الإحداثيات. (د) لا تمس أيًا من المحورين.

(٤٧) إذا كان محور الصادات مماسًا للدائرة : $س^2 + ص^2 + ٤ س + م ص + ٤ = ٠$

فإن : م = ...

(أ) ٤ (ب) −٤ (جـ) صفر (د) ± ٤

(٤٨) إذا كانت الدائرة التي معادلتها : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠$ تمس محور السينات

فإن : حـ = ...

(أ) −٩ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) −٦

(٤٩) إذا كان محور السينات مماسًا للدائرة : $س^2 + ص^2 + م س + ٤ ص + ٧ - ٣ م = ٠$

فإن : م = ...

(أ) ٢ أ، ١٤ (ب) −٢ أ، −١٤ (جـ) ٢ أ، −١٤ (د) −٢ أ، ١٤

(٥٠) إذا كان المستقيم : $٣ س - ٤ ص - ١٢ = ٠$ يمس الدائرة $(س + ٣)^2 + (ص - ١)^2 = نق^2$

فإن محيط الدائرة = ... وحدة طول (بدلالة π)

(أ) ٥ π (ب) ١٠ π (جـ) ١٥ π (د) ٢٠ π

(٥١) إذا كان المستقيم : ص = م س يمس الدائرة $(س - ٢)^2 + (ص - ٦)^2 = ٤$ فإن : م = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{-٤}{٣}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

(٥٢) المستقيم : ص = ٥ − ٢ س .... الدائرة التي معادلتها :

$س^2 + ص^2 - ٨ س - ٤ ص + ١٥ = ٠$

(أ) يمس (ب) يقطع (جـ) خارج (د) يمر بمركز

(٥٣) الدائرتان $د_1$: $(س + ٢)^2 + (ص - ١)^2 = ٤$ ، $د_2$: $(س - ٥)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$ ....

(أ) متباعدتان. (ب) متماستان من الخارج.

(جـ) متماستان من الداخل. (د) متقاطعتان.

(٥٤) الدائرتان $(س + ٢)^2 = ١ - ص^2$ ، $س^2 + ص^2 - ٢ س - ٨ ص - ١٩ = ٠$ تكونان ....

(أ) متقاطعتين. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متباعدتين. (د) متماستين من الخارج.

(٥٥) إذا كان المستقيم ل : ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠

يمس الدائرة د : $س^٢ + ص^٢$ − ٢٢ س − ٤ ص − حـ = ٠ فإن : حـ = ...

(أ) ١٥ (ب) −٢٠ (جـ) ٢٥ (د) −٢٥

(٥٦) طول القطعة المماسة للدائرة : $س^٢ + ص^٢$ = ٩ من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

(٥٧) طول القطعة المماسة للدائرة : $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ من النقطة (٠ ، ٢ نق) يساوى .... وحدة طول.

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

(٥٨) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة : $س^٢ + ص^٢$ + ٦ س − ٨ ص + ١٥ = ٠

عند النقطة أ (−٢ ، ١) فإن معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى ....

(أ) س − ٣ ص + ٥ = ٠ (ب) س − ٣ ص = ٥

(جـ) ٣ س − ص − ٥ = ٠ (د) ٣ ص − س + ٥ = ٠

(٥٩) إذا قطع محور السينات الدائرة التى معادلتها : $س^٢ + ص^٢$ = ٤٩ فى النقطتين أ ، ب

فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ٧ (جـ) ٢ (د) ١٤

(٦٠) نقطتا تقاطع الدائرة : $(س − ٢)^٢ + ص^٢$ = ١٦ مع محور السينات هما ....

(أ) (٦ ، ٠) ، (−٢ ، ٠) (ب) (−٦ ، ٠) ، (٢ ، ٠)

(جـ) (٤ ، ٠) ، (−٤ ، ٠) (د) (٢ ، ٠) ، (−٢ ، ٠)

(٦١) إذا قطع المستقيم : ص = ٢ الدائرة التى معادلتها : $(س − ٣)^٢ + (ص − ٢)^٢$ = ٢٥ فى النقطتين أ ، ب

فإن : أب = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{١٣}$ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ١٠

(٦٢) إذا كان المستقيم : ص − ٢ س + ٥ = ٠ يقطع الدائرة : $س^٢ + ص^٢$ − ٤ س − ٨ ص = ٠

فى النقطتين أ ، ب فإن بعد مركز الدائرة عن الوتر $\overline{أب}$ يساوى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) $\sqrt{٥}$

(٦٣) دائرة مركزها م = (٥ ، ٤) وطول نصف قطرها = ٥ وحدة طول وتقطع محور السينات فى أ ، ب

فإن : مساحة △ م أ ب = ... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٦٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التي معادلتها : $س^٢ + ص^٢ = ل^٢$

وكانت أ ، ب تنتميان للدائرة حيث : أ = (-٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، -٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، -٢)

(٦٥) مساحة سطح المربع الذي تمر برؤوسه الدائرة التي معادلتها :

$س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٦ ص + ٤ = ٠$ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ١٢ (د) ١٨

(٦٦) الدائرة التي تمر بالثلاث نقط : أ = (-٢ ، ٠) ، ب = (٢ ، -١) ، جـ = (٣ ، ٣) يكون طول قطرها = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٣٤}$ (ب) $\sqrt{٣٣}$ (جـ) $\sqrt{٣٢}$ (د) $\sqrt{٣١}$

(٦٧) سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم فإن مساحته = ... سم^٢.

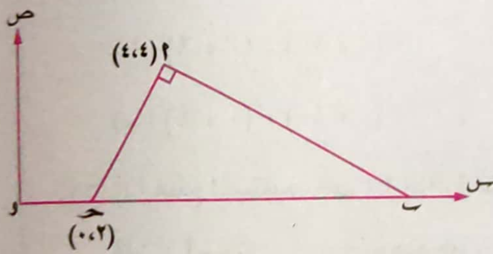
(أ) $٨\sqrt{٣}$ (ب) $١٦\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

(٦٨) مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :

$س^٢ + ص^٢ - ١٦ = ٠$ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٧٢

(٦٩) الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أ ب جـ في الشكل المقابل هي ....



(أ) $س^٢ + (ص - ٧)^٢ = ٢٥$

(ب) $(س - ٧)^٢ + ص^٢ = ٢٥$

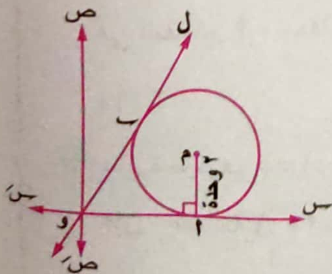
(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

(د) $(س - ٤)^٢ + ص^٢ = ١٦$

(٧٠) في الشكل المقابل :

إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هي ....



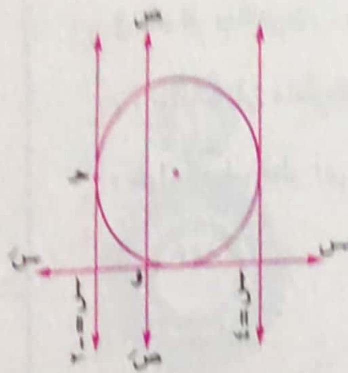
(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤$

(جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٢٥$

(د) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

(٧١) في الشكل المقابل :



معادلة الدائرة هي ....

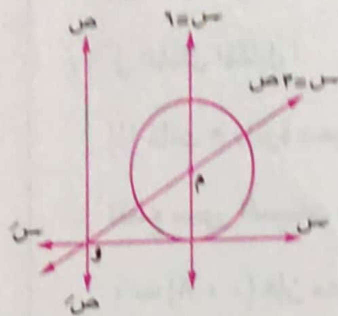
(أ) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(ب) $(س - ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٣٦$

(جـ) $(س - ١)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

(د) $(س + ١)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٩$

(٧٢) في الشكل المقابل :



إذا كانت الدائرة م تمس محور السينات

فإن معادلة الدائرة م هي ....

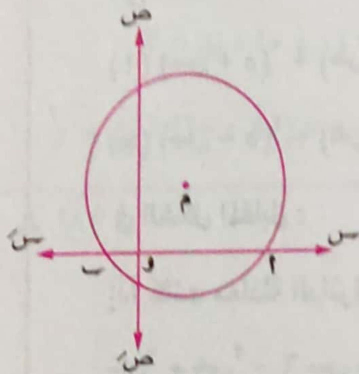
(أ) $(س - ٦)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

(ب) $(س - ٦)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

(جـ) $(س - ٦)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

(د) $(س - ٨)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

(٧٣) في الشكل المقابل :



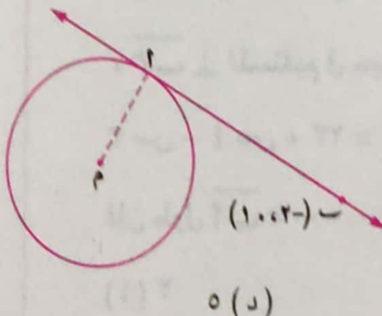
إذا كانت معادلة الدائرة هي : $(س - ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

فإن : أب = ... وحدة طولية.

(أ) ٨ (ب) ٤

(جـ) ٦ (د) ٥

(٧٤) في الشكل المقابل :



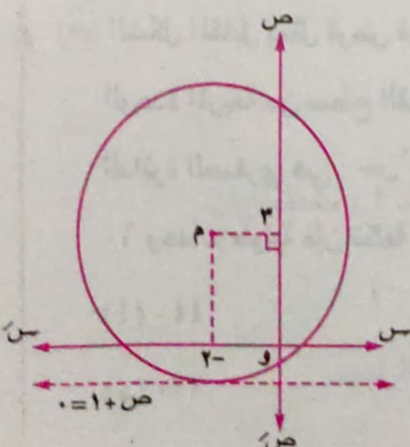
إذا كانت معادلة الدائرة م هي : $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (-٢ ، ١٠)

فإن : أب = ... وحدة طولية.

(أ) ١٣ (ب) $\sqrt{١٩٤}$ (جـ) ١٢ (د) ٥

(٧٥) الشكل المقابل يمثل



معادلة الدائرة ....

(أ) $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦$

(ب) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ١٦$

(جـ) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٤$

(د) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

(٧٦) فى الشكل المقابل :

م ، ن دائرتان متطابقتان

، طول نصف قطر أى منهما = نق

فإن : م ن = ... وحدة طول.

(أ) ٢ نق (ب) $\sqrt{٢}$ نق

(جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ نق (د) $\sqrt{٥}$ نق

(٧٧) فى الشكل المقابل :

إذا كانت م دائرة محيطها = ١٠ π وحدة طولية

تقطع محور السينات فى النقطتين أ (٢ ، ٠)

، ب (٨ ، ٠) فإن معادلة الدائرة م

هى ....

(أ) $(س + ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٢٥$ (ب) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٩$ (د) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(٧٨) فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة م هى :

$س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٤ ص - ١٢ = ٠$.

، $\overline{م ب}$ ⊥ المستقيم ل حيث معادلة ل هى :

٣ س - ٤ ص + ٢٣ = ٠ ، أ ∈ $\overline{م ب}$

فإن طول $\overline{أ ب}$ = ... وحدة طولية.

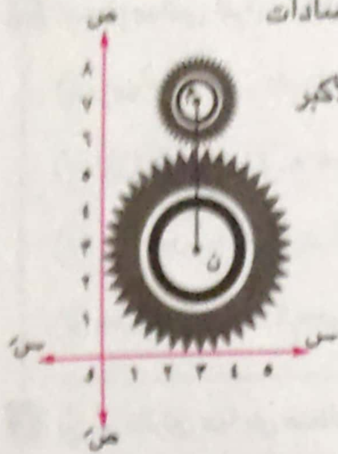
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٢,٥

(٧٩) الشكل المقابل يمثل قرص فى آلة يراد تصنيع مثله فإذا كان ثمن الوحدة المربعة من سطح القرص يتكلف ٥ جنيهات وكانت معادلة الدائرة الصغرى هى : $س^٢ + ص^٢ = ٤$ وطول قطر الدائرة الكبرى ١٠ وحدات طولية فإن تكلفة تصنيع القرص ≃ .... جنيه.

(أ) ٤٤٠ (ب) ٦٦٠

(جـ) ٢٢٠ (د) ٣٣٠

(٨) الشكل المقابل يمثل ترسين فى آلة مركزهما م ، ن ، $\overline{مَن}$ // محور الصادات ، إذا كان نصف قطر الترس الأصغر يساوى $\frac{1}{2}$ نصف قطر الترس الأكبر فإن معادلة الترس الأصغر هى ....



(أ) (س − ٣)^{2} + (ص − ٦)^{2} = ٩

(ب) (س − ٣)^{2} + (ص − ٧)^{2} = ١

(جـ) س^{2} + ص^{2} − ٦ س − ١٤ ص + ٥٨ = صفر

(د) (س − ١)^{2} + (ص − ١)^{2} = ١

ثانيا الأسئلة المقالية

١ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (م) وطول نصف قطرها = نق فى كل من الحالات الآتية :

① م = (٢ ، ٣) ، نق = ٥

② م = (٠ ، ٠) ، نق = ٣

③ م = (٠ ، −١) ، نق = ٢ $\sqrt{3}$

④ م = (−٤ ، −٣) ، نق = $\frac{3}{2}$

٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان :

① مركزها م (−٢ ، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات طولية.

② مركزها م (٥ ، −١٢) وتمر بنقطة الأصل.

③ مركزها م (٧ ، −٥) وتمر بالنقطة أ = (٣ ، ٢)

④ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ = (٦ ، −٤) ، ب = (٠ ، ٢)

⑤ مركزها النقطة (−٣ ، −٢) وتمس محور السينات.

⑥ مركزها النقطة (٣ ، ٠) وتمس محور الصادات.

⑦ مركزها النقطة (٥ ، −٥) وتمس محورى الإحداثيات.

⑧ تمر بالنقطتين أ = (٦ ، ٢) ، ب = (٠ ، −١) والمماسان لها عند أ ، ب متوازيان.

⑨ مركزها يقع على محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (٨ ، ٠)

⑩ طول نصف قطرها = ٦ وحدات وتمس المحورين وتقع فى الربع الرابع.

٣ أوجد إحداثيي المركز ، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية :

(١) $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ = ٠$

(٢) 📖 $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤٩$

(٣) 📖 $(س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩$

(٤) 📖 $س^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٢٤$

(٥) 📖 $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٦ ص - ١٢ = ٠$

(٦) $س^{٢} + ص^{٢} + ٤ ص = ٨$

(٧) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س - ٢ ص = ٠$

(٨) 📖 $س^{٢} + ص^{٢} - ٨ س = ١٢$

---

٤ بيِّن أى دائرتين مما يلى متطابقتان ؟ ولماذا ؟

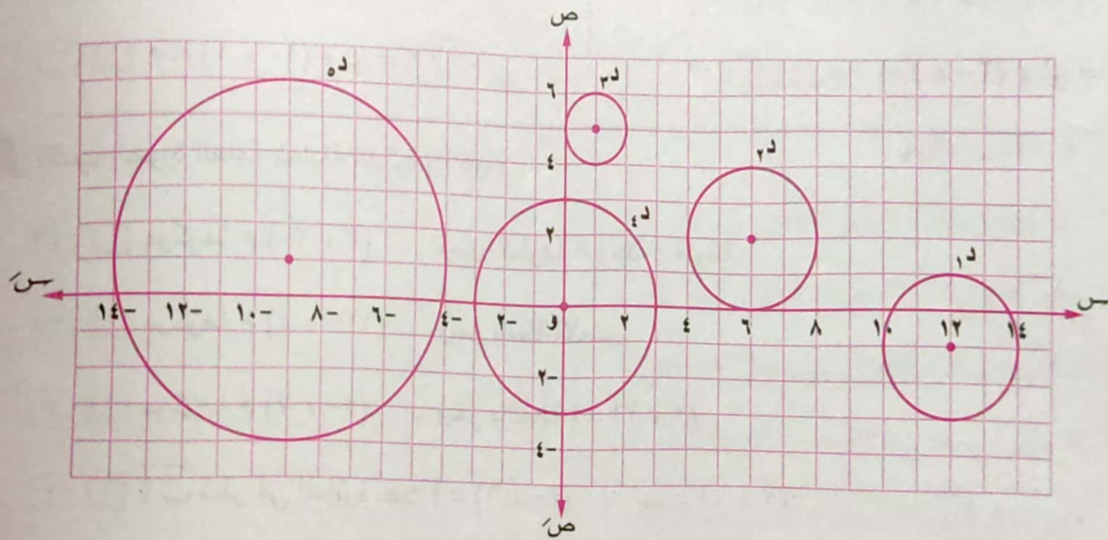
(١) 📖 $س^{٢} + ص^{٢} - ٤ س + ٨ ص = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ ص + ١٦ = ٠$

(٢) $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ ص = ١$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س - ٢٥ = ٠$

(٣) 📖 $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س + ٤ ص - ٣ = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س - ١١ = ٠$

---

٥ 📖 فى الشكل التالى :



(١) اكتب معادلة كل دائرة.

(٢) أى الدوائر السابقة متطابقة ؟ فسر إجابتك.

---

٦ 📖 يبين الشكل المقابل

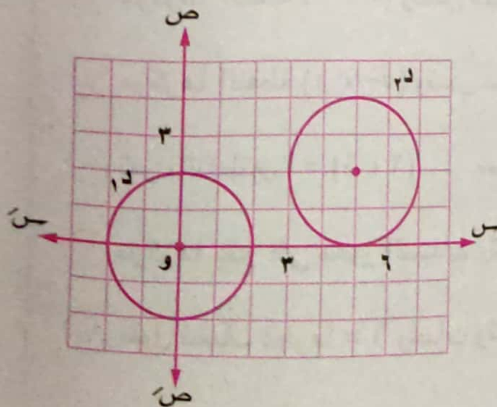
الدائرتين $د_{١}$ ، $د_{٢}$

أثبت أن الدائرتين متطابقتان

ثم أوجد معادلة كل منهما

وإذا كانت الدائرة $د_{٣}$ هى صورة الدائرة $د_{١}$

بالانتقال (−٤ ، ٣) اكتب معادلة الدائرة $د_{٣}$



بيِّن مع ذكر السبب أيًا من المعادلات الآتية تمثل دائرة وأيها لا تمثل دائرة :

(١) س^٢ + س ص + ص^٢ = ٢٥

(٢) س^٢ + ص^٢ + ٨ س − ١٦ ص − ١ = ٠

(٣) س^٢ + ٢ ص^٢ + ٦ س − ٥ ص = ٠

(٤) ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ + ٣ ص − ٨ = ٠

(٥) (س + ص)^٢ − ٣ س + ٦ ص − ٤ = ٠

(٦) س^٢ + ص^٢ + س + ٢ ص + ٧ = ٠

(٧) س^٢ + ص^٢ + ٢ س − ٤ ص + ٥ = ٠

(٨) $\frac{١}{٤}$ س^٢ + $\frac{١}{٤}$ ص^٢ + س − ٨ = ٠

(٩) س^٢ + س = ص^٢ + ص + ٧

م$_١$ ، م$_٢$ مركزا دائرتين حيث م$_١$ = (٢ ، −١) ، م$_٢$ = (−١ ، ٣)

أوجد معادلتي هاتين الدائرتين إذا علم أن كلًا منهما تمر بمركز الأخرى.

أثبت أن الدائرتين : س^٢ + ص^٢ − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

، ٤ س^٢ + ٤ ص^٢ − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما. «٣ ، ٢,٥ وحدة طول»

---

١٠ بيِّن أي النقط التالية تنتمي إلى الدائرة د التي معادلتها : (س − ٦)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٢٥

، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث :

أ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، حـ(٣ ، ٣) ، ء(٢ ، −٣)

---

١١ دائرة مركزها م = (٢ ، −١) وتمر بالنقطة أ = (−١ ، ٣) بيِّن مواقع النقط الآتية بالنسبة للدائرة م : ب = (٢ ، ٤) ، حـ = (−٣ ، ١) ، ء = (١ ، ٢)

---

١٢ حدد وضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة : (س + ٣)^٢ + (ص − ٤)^٢ = ٩ إذا كانت معادلة المستقيم هي :

(١) ٢ س − ٤ ص + ٥ = ٠

(٢) ٦ س − ٨ ص + ٢٣ = ٠

(٣) ٢ س − ٤ ص + ١٠ = ٠

---

١٣ حدد وضع المستقيم ل : ٥ س − ١٢ ص + ١٣ = ٠ بالنسبة للدائرة :

س^٢ + ص^٢ − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠

---

١٤ حدد موضع الدائرة د$_١$: (س − ٥)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤ بالنسبة للدائرة د$_٢$: (س + ٧)^٢ + (ص − ٣)^٢ = ١

١٥ هل الدائرتان $د_١$: $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$ ،

$د_٢$: $س^٢ + ص^٢ + ١٤ س + ١٠ ص - ٢٦ = ٠$ متماستان من الخارج ؟ فسر إجابتك.

١٦ أثبت أن الدائرتين : $(س + ٢)^٢ = ١ - ص^٢$ ، $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٨ ص - ١٩ = ٠$

متماستان من الداخل.

١٧ إذا كانت الدائرتان $د_١$: $(س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢$: $(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

متماستين. أوجد قيم ك «٨١ ، ٢٨٩»

١٨ أثبت أن الدائرتين : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س - ٤ ص + ١٢ = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٤ ص - ٤ =$ صفر

متماستان. وأوجد إحداثيات نقطة التماس ثم أوجد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة التماس وتمر بمركز الدائرة الثانية.

١٩ اكتب معادلة دائرة الوحدة وإذا كانت النقطة (٢ أ جتا هـ ، ٢ أ جا هـ) تنتمى لهذه الدائرة

أوجد قيم أ الحقيقية. «$\pm \frac{١}{٢}$»

٢٠ أوجد قيم هـ الحقيقية التى تجعل كلًا مما يأتى يعبر عن معادلة دائرة :

(١) $س^٢ + ص^٢ - ٢ س - ٤ ص - هـ + ٢ = ٠$.

(٢) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٦ ص - هـ^٢ + ٤ = ٠$.

(٣) $س^٢ + ص^٢ - ٤ هـ س - ٢ هـ ص + ١٠ (هـ - ١) = ٠$.

(٤) $س^٢ + ص^٢ + ٦ س + ٨ ص + هـ^٢ - ٣ هـ + ١٥ = ٠$.

(٥) $س^٢ + ص^٢ + ٢ هـ س - ٦ هـ ص - ٢ هـ^٢ + ١٢ هـ - ٣ = ٠$.

٢١ أوجد قيم أ فى المعادلة : $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٤ ص + ٢ أ - ٣ = ٠$ فى كل من الحالات الآتية :

(١) المعادلة تمثل دائرة.

(٢) المعادلة تمثل دائرة تمر بنقطة الأصل.

(٣) المعادلة تمثل دائرة تمس محور السينات.

(٤) المعادلة تمثل دائرة تمس محور الصادات.

(٥) المعادلة تمثل دائرة تمس المستقيم : $٣ س + ٤ ص + ١٥ = ٠$.

(٦) المعادلة تمثل دائرة طول قطرها ١٤ وحدة طولية.

٢٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا علم أن :

(١) مركزها م (٥ ، ٤) وتمس المستقيم $س = ٢$

(٢) مركزها م (٥ ، ٣) وتمس المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٧) ، (−١ ، ٣)

(٣) مركزها م يقع فى الربع الأول وطول نصف قطرها يساوى ٣ وحدات طولية والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها.

(٤) طول نصف قطرها = ٥ وحدات وتمس محور السينات عند النقطة (٤ ، ٠)

(٥) طول نصف قطرها = $\frac{1}{2}$ ٣ وحدة وتمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −٤)

(٦) تمس المحورين وتمر بالنقطة (−٢ ، −٤)

(٧) تمس محور السينات عند النقطة (−٣ ، ٠) وتمس أيضًا محور الصادات.

(٨) تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{3}$ وحدة طول.

(٩) تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، −١) وتقطع من الجزء السالب لمحور السينات وترًا طوله ٤ $\sqrt{6}$ وحدة طول.

(١٠) تمس محور السينات وتمر بالنقطتين (٢ ، ١) ، (−٥ ، ٢)

(١١) تمس محور الصادات وتمر بالنقطتين (−٤ ، ٢) ، (−١ ، ٢)

(١٢) يقع مركزها على محور السينات وتمر بالنقطتين أ (١ ، ٣) ، ب (٢ ، −٤)

(١٣) تمر بنقطة الأصل وتقطع من الجزئين الموجبين لمحورى الإحداثيات السينى والصادى جزءين طوليهما ١٢ ، ١٦ وحدة طولية على الترتيب.

(١٤) يقع مركزها على المستقيم : ص − س = ١ وتمر بالنقطتين أ = (−٢ ، ٤) ، ب = (٦ ، ٨)

(١٥) طول نصف قطرها = $\sqrt{85}$ وحدة طولية وتمر بالنقطتين أ = (−١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٤)

(١٦) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ ، ب نقطتى تقاطع الدائرة س^2 + ص^2 + ٢ س + ٤ ص = ٠ مع محور السينات.

---

٢٣ أوجد مساحة سطح مثلث متساوى الأضلاع تمر بروؤسه الدائرة :

س^2 + ص^2 + س − ٤ ص − ٢ = ٠ . «$\frac{٧٥\sqrt{٣}}{١٦}$ وحدة مربعة»

---

٢٤ أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسى منتظم تمر بروؤسه الدائرة :

س^2 + ص^2 + ٦ س − ١٢ ص + ٥ = ٠ علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٥ سم. «٢٣٧٨ سم^2»

---

٢٥ أوجد مساحة سطح سداسى منتظم تمر بروؤسه الدائرة :

س^2 + ص^2 − ١٠ س + ٦ ص + ٢٥ = ٠ . «$\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة»

٢٦ أوجد مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :

$س^٢ + ص^٢ - ١٦ = ٠$ «٤٨ وحدة مربعة»

---

٢٧ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها = ٥ وحدات ومعادلتا مستقيمين يحملان قطرين فيها هما :

٣ س + ص + ٢ = ٠ ، ٤ س - ص - ١٦ = ٠ ثم أثبت أن النقطة (٥ ، -٤) تنتمى للدائرة.

---

٢٨ أوجد معادلة الدائرة التى طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر الدائرة :

$س^٢ + ص^٢ - ٢ س جا هـ - ٢ ص جا هـ - ٨ = ٠$ ومعادلتا مستقيمين يحملان قطرين فيها هما :

س + ص = ٠ ، $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

---

٢٩ أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطتى تقاطع الدائرتين :

$س^٢ + ص^٢ - ١٠ س = ٠$ ، $س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ١٢ = ٠$ ومركزها :

(١) نقطة الأصل. (٢) النقطة (٢ ، ٠)

---

٣٠ أثبت أن : النقط أ = (٠ ، -١) ، ب = (-١ ، ٠) ، جـ = (-٩ ، ٠) تقع على دائرة مركزها م (-٥ ، -٥) وأوجد معادلة هذه الدائرة.

---

٣١ إذا كانت النقط : أ = (٣ ، -٢) ، ب = (٣ ، ٨) ، جـ = (-١ ، ٠) تنتمى إلى دائرة واحدة فأثبت أن : $\overline{أب}$ قطر فيها ، ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

---

٣٢ أثبت أن : المثلث الذى رؤوسه النقط أ = (٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٦) ، جـ = (٠ ، ٠) قائم الزاوية ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوسه.

---

٣٣ أثبت أن : النقط أ = (-٢ ، ٠) ، ب = (٤ ، ٠) ، جـ = (١ ، ٣ $\sqrt{٣}$) رؤوس المثلث أ ب جـ المتساوى الأضلاع ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.

---

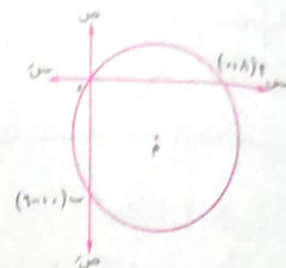
٣٤ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقط : أ = (٢ ، -١) ، ب = (-٢ ، ٠) ، جـ = (٠ ، -٩) وعيّن مركزها وطول نصف قطرها.

---

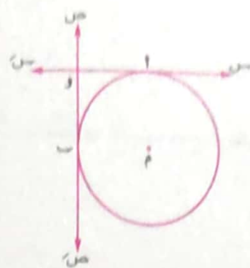
٣٥ إذا كانت : أ = (٣ ، ٠) ، ب = (٠ ، ٩) ، جـ = (٠ ، ١) ، د = (-١ ، ٢) فأثبت أن : الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى.

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة م في كل من الأشكال الآتية :

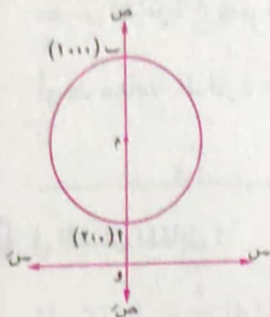
(١) الدائرة تمر بنقطة الأصل وتمر بالنقطتين أ ، ب



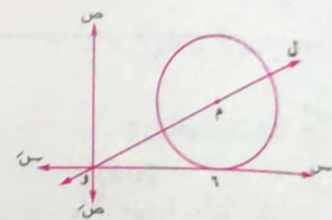
(٢) الدائرة تمس محورى الإحداثيات في أ ، ب وطول $\overline{مو} = ٢\sqrt{٢}$



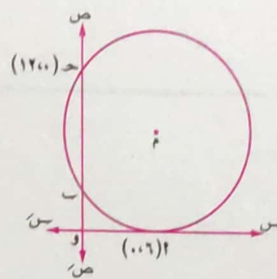
(٣) الدائرة مركزها يقع على محور الصادات وتقطع محور الصادات في أ ، ب



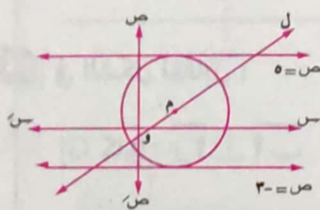
(٤) المستقيم ل لمعادلته : س − ٢ ص = ٠ يمر بمركز الدائرة وبنقطة الأصل.



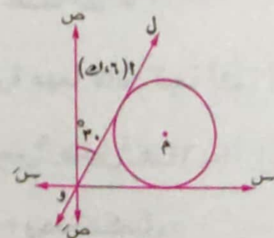
(٥) الدائرة تمس محور السينات عند أ وتقطع محور الصادات في ب ، حـ



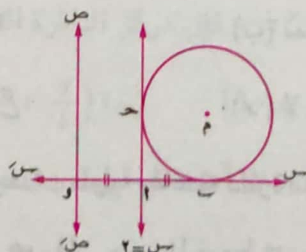
(٦) المستقيم ل : ٢ س − ٣ ص = ١ يمر بمركز الدائرة والمستقيمان ص = ٥ ، ص = −٣ يمسان الدائرة.



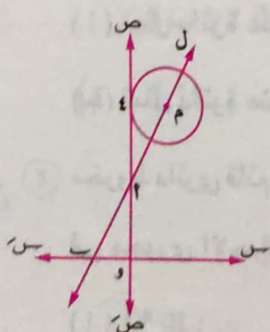
(٧) المستقيم ل يمس الدائرة عند النقطة أ (٦ ، ك) ويصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات والدائرة يمسها أيضًا محور السينات.



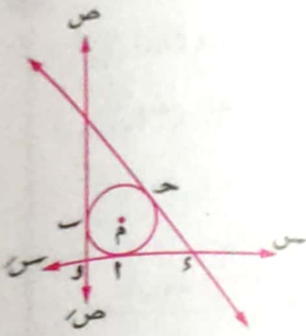
(٨) الدائرة تمس محور السينات عند ب وتمس المستقيم : س = ٢ عند حـ



(٩) الدائرة تمس محور الصادات عند النقطة (٠ ، ٤) والمستقيم ل يمر بمركز الدائرة والنقطة أ (٠ ، ٢) ، ب (−١ ، ٠)



٣٧ في الشكل المقابل :



الدائرة م يمسها محورى الإحداثيات في أ ، ب

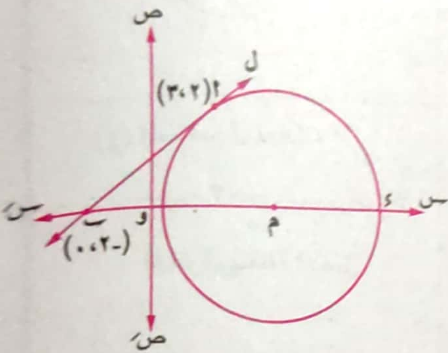
فإذا كان المستقيم : ٤ س + ٣ ص - ١٢ = ٠

مماس للدائرة م عند حـ

أوجد معادلة الدائرة م

---

٣٨ في الشكل المقابل :



المستقيم ل يمس الدائرة

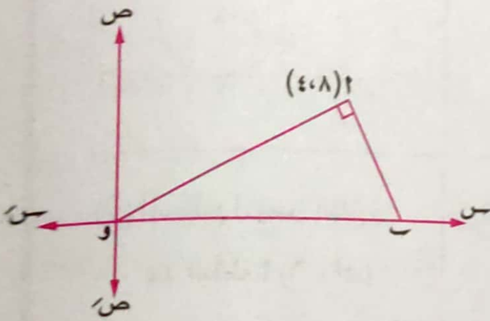
عند أ (٢ ، ٣) ويقطع محور السينات

عند ب (-٢ ، ٠)

أوجد معادلة الدائرة م

---

٣٩ في الشكل المقابل :



إذا كان : $\overline{وأ} \perp \overline{أب}$

، أ = (٨ ، ٤)

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط أ ، ب ، و

ثالثًا مسائل تقيس مهارات التفكير

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المعادلة : (ك - ٢) $س^٢$ + (٢ - ك) $ص^٢$ - ك س + ٣ ك ص - ٢٥ = ٠

(أ) تمثل دائرة عندما ك = ٢ (ب) تمثل دائرة عندما ك ≠ ٢

(جـ) تمثل دائرة عندما ك ∈ ع (د) لا تمثل دائرة مهما كانت قيمة ك

(٢) مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٦ وحدات طولية وقاعدته دائرة معادلتها : $س^٢ + ص^٢ = ٦٤$

في محورى الإحداثيات س ، ص فإن حجم المخروط = ... وحدة مكعبة.

(أ) ٩٦ π (ب) $\frac{٦٤٠}{٣}$ π (جـ) ١٢٨ π (د) $\frac{١٢٨}{٣}$ π

③ أقل بُعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة التى معادلتها $(س - ٧)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$

هو .... وحدة طولية.

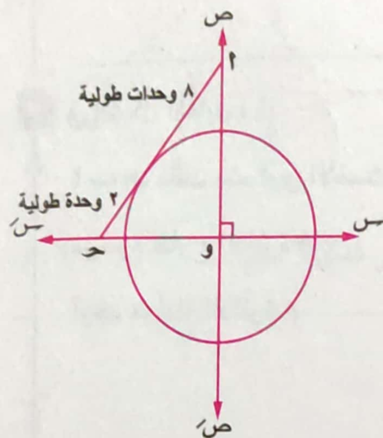
(أ) ١١ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٧

④ عدد الدوائر التى تمس محورى الإحداثيات وتقع مراكزها على الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

⑤ فى الشكل المقابل :



معادلة الدائرة هى ....

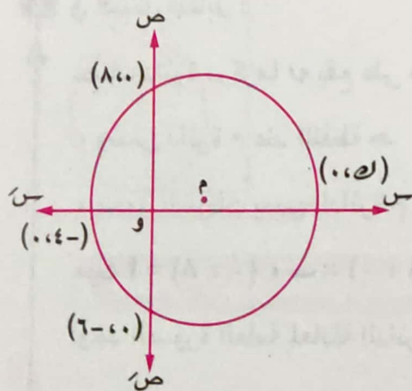
(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٤$

(ب) $س^٢ + ص^٢ = ١٦$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٦٤$

(د) $س^٢ + ص^٢ = ١٠٠$

⑥ فى الشكل المقابل :



معادلة الدائرة هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ٦٥$

(ب) $(س - ٦)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٦٤$

(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٦٥$

(د) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٦٤$

⑦ إذا كانت و هى نقطة الأصل ، $\overleftrightarrow{وأ}$ ، $\overleftrightarrow{وب}$ مماسين للدائرة التى معادلتها :

$س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٤ ص + ٦ = ٠$ فإن مركز الدائرة الخارجة عن Δ أ و ب هو ....

(أ) $\left(\frac{٧}{٤} ، ٢\right)$ (ب) $\left(\frac{٥}{٢} ، -١\right)$ (جـ) $\left(\frac{٧}{٤} ، -١\right)$ (د) $\left(\frac{٥}{٢} ، ٢\right)$

⑧ طول الوتر المشترك للدائرتين : $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س - ١٠ ص = ٠$.

، $س^٢ + ص^٢ + ٦ س + ٢ ص - ٤٠ = ٠$ يساوى .... وحدة طول.

(أ) $٥\sqrt{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٢ (د) $١٠\sqrt{٢}$

٢ في الشكل المقابل :

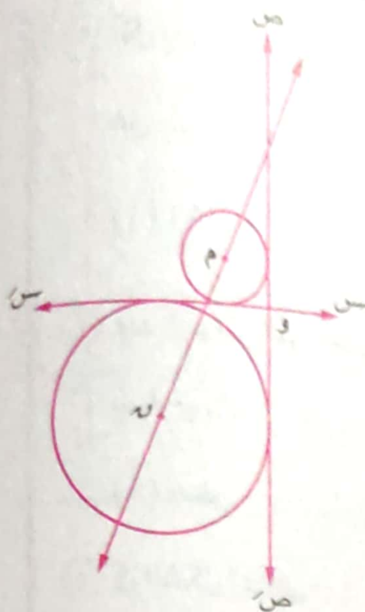
إذا كانت كل من الدائرتين م ، ن

تمس محورى الإحداثيات

ومعادلة خط المركزين $\overleftrightarrow{مـن}$

هى : ص = ٢ س + ١

أوجد معادلة كل من الدائرتين م ، ن

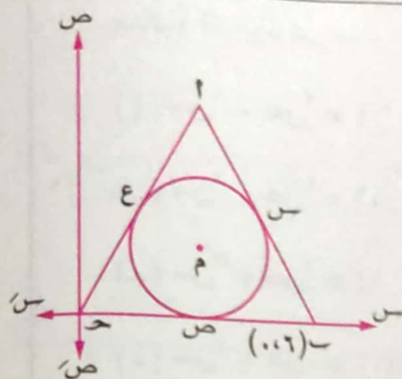


٣ في الشكل المقابل :

أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع

مرسوم خارج الدائرة م

أوجد معادلة الدائرة م



٤ في الشكل المقابل :

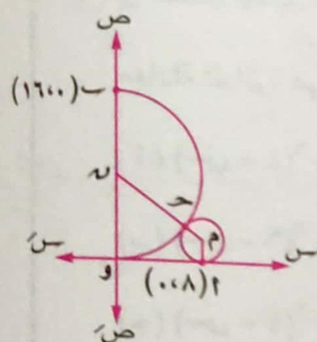
نصف دائرة مركزها ن يقع على محور الصادات

، وتمس دائرة م عند النقطة حـ

، محور السينات يمس الدائرة م عند أ

حيث أ = (٨ ، ٠) ، ب = (٠ ، ١٦)

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة م



تطبيقات حياتية

١ تخطيط المدن : في رسم لإحدى المدن على مستوى إحداثى متعامد كل وحدة فيه تمثل ٥ أمتار ، وجد أن الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص + ١١ = ٠$ تحدد أحد ميادينها ، أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان. $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$ «١١٠٠م٢»

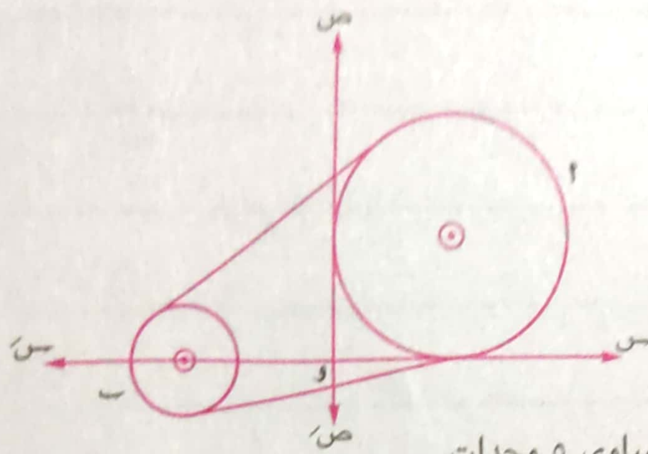
٢ الملاحة البحرية : يقع رادار عند الموقع أ (٧ ، −٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، −٣٠) ؟ فسر إجابتك.

التصميم المعماري : صمم مهندس معماري مبنى قاعدته على شكل ثماني منتظم ،

تمر برؤوسه الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٤ س + ١٢ ص - ٦٠ = ٠$

احسب مساحة قاعدة المبنى لأقرب وحدة مربعة. «$٢٠٠\sqrt{٢}$ وحدة مربعة»

الربط بالصناعة : يوضح الشكل المقابل



بكرة أ في آلة تمس محوري الإحداثيات ، تدور

بواسطة سير ، يمر على بكرة صغيرة ب معادلة

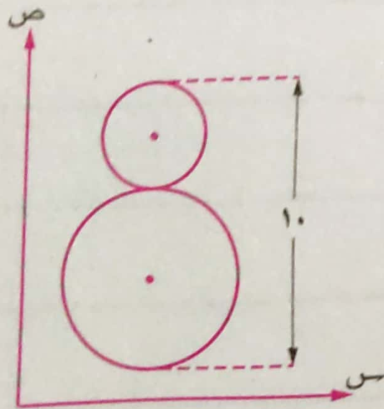
دائرتها : $س^2 + ص^2 + ١٤ س + ٤٥ = ٠$

أوجد :

① معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوي ٥ وحدات.

② البعد بين مركزي البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الإحداثي تمثل ٦ سم «٧٨ سم»

الصناعة : يبين الشكل المقابل



ترسين في آلة مركزاهما يقعان على مستقيم يوازي

محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات.

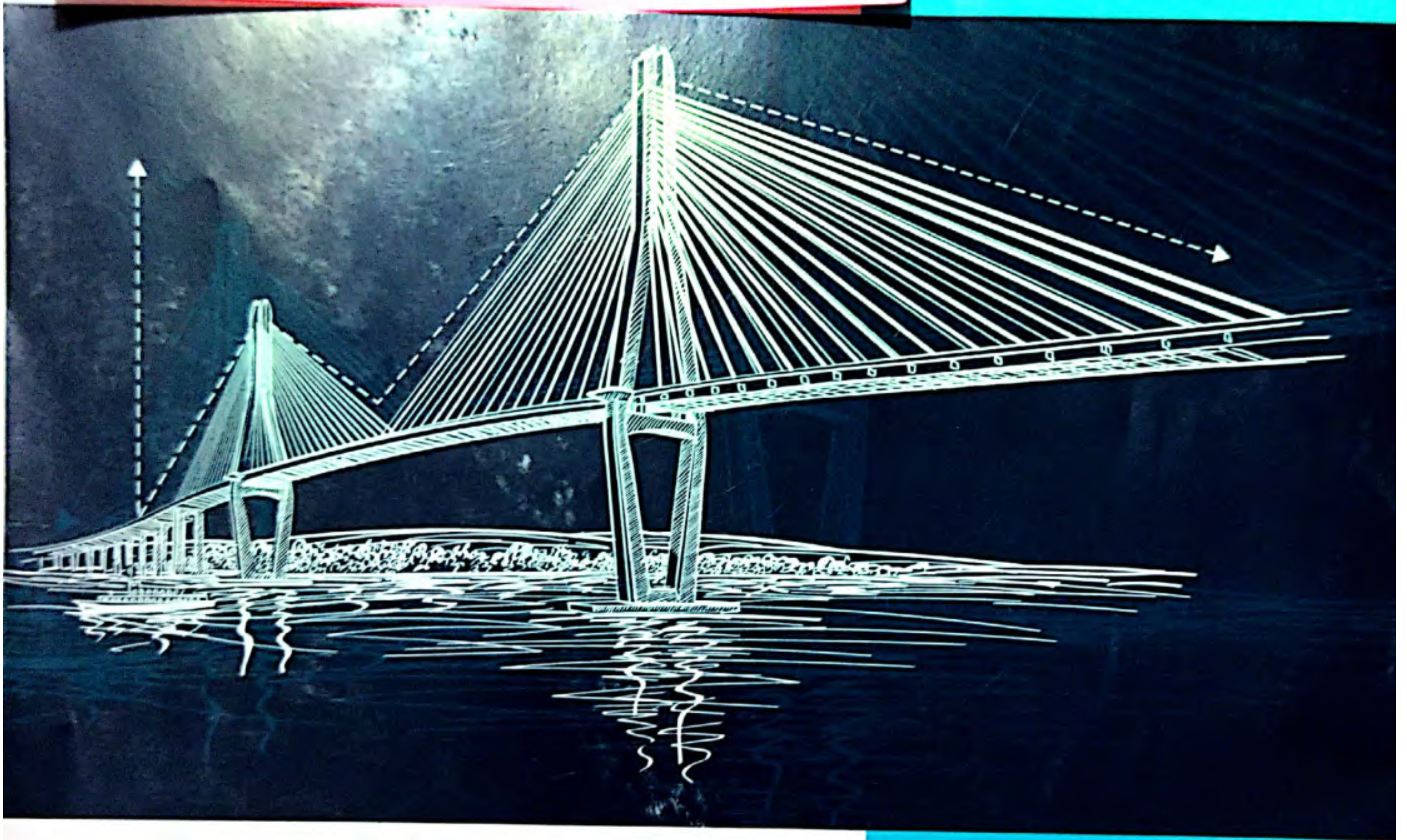
أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر

هي : $س^2 + ص^2 - ١٠ س - ٨ ص + ٣٢ = ٠$

تطبيقات
الرياضيات

الجزء الخاص
بالامتحانات





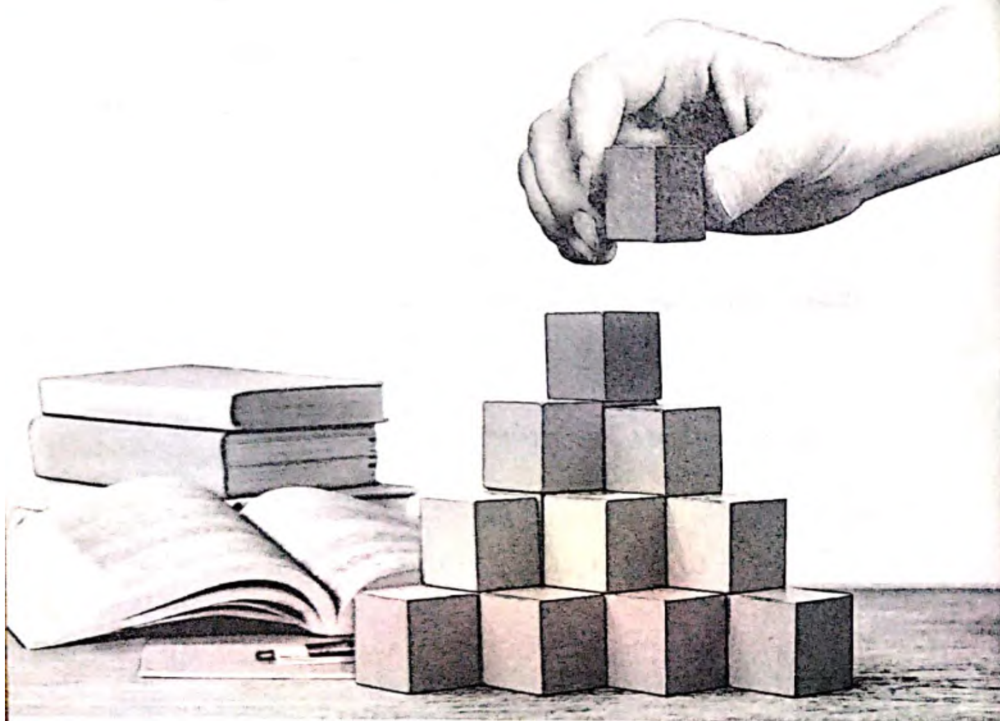
2022
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

محتويات الكتاب



الاختبارات التراكمية القصيرة



◂ **أولًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى الاستاتيكا.

◂ **ثانيًا** : اختبارات تراكمية قصيرة فى الهندسة والقياس.

أولًا اختبارات تراكمية قصيرة فى الاستاتيكا

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا كان : $\overline{ق_1}$ = ٢ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = $\overline{س}$ + $\overline{ص}$ حيث $ق_1$ ، $ق_2$ مقيسة بالنيوتن فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (ج) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

(٢) قوتان متساويتان فى المقدار تؤثران فى نقطة وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن فإن مقدار كل منهما .... بالنيوتن.

(أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\sqrt{٣}$ (ج) ٣ (د) ٣$\sqrt{٣}$

(٣) إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى ، فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (ج) ١٢٠° (د) ١٨٠°

(٤) مقدار محصلة قوتين مقدارهما ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٦ (ج) ٧ (د) ٨

السؤال الثانى ٣ درجات

قوتان مقدارهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن ، فأوجد مقدار ق وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع ق

السؤال الثالث ٣ درجات

قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد قيمة : ق

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 2 على درس 2,1 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (ج) ٢٠° (د) ١٨٠°

(٢) حللت القوة $\overline{ح}$ إلى قوتين $\overline{ق_1}$ ، $\overline{ق_2}$ وتصنعان مع $\overline{ح}$ زاويتين قياساهما $هـ_1$ ، $هـ_2$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overline{ق_1}$ هو ....

(أ) $\frac{ح \text{ جا } هـ_1}{\text{جا}(هـ_1 + هـ_2)}$ (ب) $\frac{ح \text{ جا } هـ_2}{\text{جا}(هـ_1 - هـ_2)}$

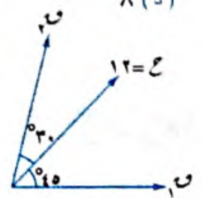
(ج) $\frac{ح \text{ جا } هـ_2}{\text{جا}(هـ_1 + هـ_2)}$ (د) $\frac{ح \text{ جا}(هـ_1 + هـ_2)}{\text{جا } هـ_2}$

(٣) قوتان متساويتان فى المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن ، فإن مقدار كل منهما بوحدة النيوتن ....

(أ) ٢$\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (ج) ٤$\sqrt{٢}$ (د) ٨

(٤) فى الشكل الموضح :

$ق_1$ = ...



(أ) ١٢ جتا ٧٥° (ب) ١٢ جتا ٤٥°

(ج) ٦ قا ٤٥° (د) ٦ قا ٧٥°

السؤال الثانى ٣ درجات

قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل على القوة ق بزاوية قياسها ٤٥° ، أوجد ق ، ومقدار محصلتهما.

السؤال الثالث ٣ درجات

حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين ، أحدهما يميل على القوة بزاوية قياسها ٦٠° ، والآخر يميل بزاوية قياسها ٣٠° من الناحية الأخرى.

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل يميل على الأفقى بزاوية هـ فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى تساوى ....

(أ) و جتا هـ (ب) و جا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و

(٢) قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن.

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

(٣) إذا كان : $\overline{ق_١}$ = ٢ $\overline{س}$ − ٢ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢}$ = أ $\overline{س}$ − $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣}$ = ٤ $\overline{س}$ − ب $\overline{ص}$

ومحصلتهم $\overline{ح}$ = ٦ $\overline{س}$ − ٤ $\overline{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) صفر (د) −١

(٤) إذا كان : $\overline{ق_١}$ = ٥ $\overline{س}$ ، $\overline{ق_٢}$ = ٧ $\overline{س}$ − ٥ $\overline{ص}$ ، $\overline{ح}$ محصلتهما

فإن : ‖$\overline{ح}$‖ = ...

(أ) $\sqrt{٥} + \sqrt{٧٤}$ (ب) ٤٩ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{١٢} - \sqrt{٥}$

السؤال الثانى ٣ درجات

ثلاث قوى مستوية مقاديرها : ٨٥ ، ٧٥ ، ٥٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تؤثر فى نقطة مادية الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال والثالثة فى اتجاه الجنوب الغربى.
أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

السؤال الثالث ٣ درجات

قوتان تؤثران فى نقطة مادية ، فإذا كانت أكبر قيمة لمحصلتهما ٣٢ ث.كجم ، وكانت أصغر قيمة لمحصلتهما ١٢ ث. كجم ، أوجد مقدار كل من القوتين ، ثم أوجد مقدار محصلتهما إذا كان قياس الزاوية بين القوتين = ٦٠°

اختبار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

(٢) القيمة العظمى والقيمة الصغرى على الترتيب لمحصلة القوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هما .... نيوتن.

(أ) ١٣ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

(٣) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥

(٤) قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٣}$

السؤال الثانى ٣ درجات

وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث.جم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومُنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى ، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

السؤال الثالث ٣ درجات

إذا كان $\overline{ق_١}$ = ٥ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢}$ = أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣}$ = −١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$
ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overline{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π)
فأوجد قيمتى : أ ، ب

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 5 من درس 1 حتى درس 5 من الوحدة الأولى

أجب عن الأسئلة الآتية :

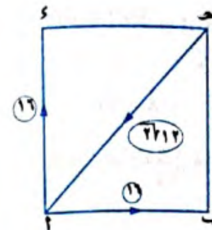
السؤال الأول ٢ درجة

قوتان مقدارهما : ق ، ق $\sqrt{2}$ نيوتن ، تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين ، وأثبت أن مقدار محصلتهما يساوى ق

السؤال الثاني ٢ درجة

الشكل المقابل يمثل القوى : ١٦ ، ١٦ ، ١٢ $\sqrt{2}$ نيوتن ، والتي تؤثر في المربع أ ب جـ ء في الاتجاهات أب ، أء ، أجـ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.



السؤال الثالث ٤ درجات

كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم ، علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفي خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر في نقطة من حائط رأسي أملس.

أوجد في وضع التوازن كلًا من :

الشد في الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

السؤال الرابع ٢ درجة

ثلاث قوى مستوية مقاديرها : ٥ ، ١٠ ، ٤ $\sqrt{7}$ نيوتن تؤثر في نقطة مادية ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية يساوى ٦٠° فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث.

الدرجة الكلية ١٠

اختبار 1 على درس 1 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٥ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمي إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٢) عدد المستويات التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائي.

(٣) المستقيمان المتخالفان ....

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

(٤) في الشكل المقابل :

المستوى س ∩ المستوى ص ∩ المستوى أ ب جـ = ...

(أ) {أ} (ب) المستقيم ل

(جـ) أجـ (د) أب

(٥) إذا كان : أب // المستوى س فإن : أب ∩ س = ...

(أ) أب (ب) أب (جـ) أب (د) ∅

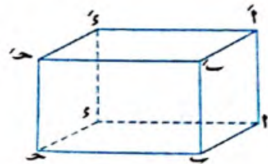
السؤال الثاني ٥ درجات (كل جزئية درجة)

باستخدام الشكل المقابل اذكر :

(١) مستويان متوازيان. (٢) مستويان متقاطعان.

(٣) مستقيمان متخالفان. (٤) مستقيم ومستوى متوازيان.

(٥) خط تقاطع المستوى أ ب بَ أَ مع المستوى أ جـ ء



الدرجة الكلية
١٠

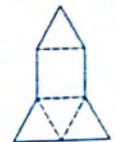
اختبار 2 من درس 2,1 من الوحدة الثانية

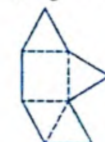
أجب عن الأسئلة الآتية :

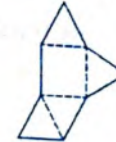
السؤال الأول ٤ درجات *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

(٢) إذا كان حجم هرم رباعى منتظم ١٢ سم³ وارتفاعه ٤ سم فإن طول حرف قاعدته .... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

(٣) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم فإن حجمه يساوى بوحدة سم³ ....

(أ) $\frac{١}{٣} \times (١٠)^٢ \times ١٣$ (ب) $\frac{١}{٣} \times (١٠)^٢ \times ١٢$

(جـ) $\frac{١}{٣} \times (١٢)^٢ \times ١٣$ (د) $\frac{١}{٣} \times (١٣)^٢ \times ١٠$

(٤) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم فإن مساحته الكلية = ... سم²

(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ (د) $٩\sqrt{٣}$

السؤال الثانى ٣ درجات *كل جزئية درجة ونصف*

هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد :

(١) المساحة الجانبية. (٢) حجم الهرم.

السؤال الثالث ٣ درجات

هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وارتفاعه الجانبى $١٠\sqrt{٣}$ سم أوجد مساحته الكلية.

الدرجة الكلية
١٠

اختبار 3 من درس 1 حتى درس 3 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات *كل جزئية درجة*

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم².

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، ارتفاعه الجانبى ١٣ سم فإن مساحته الجانبية = ...

(أ) ٢٦٠ سم² (ب) ٣٦٠ سم² (جـ) ١٣٠ سم² (د) ٥٢٠ سم²

(٣) عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

(٤) حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم³

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

السؤال الثانى ٣ درجات

هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³ ، فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

السؤال الثالث ٣ درجات

أوجد طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم² وطول راسمه ٣٠ سم

الدرجة الكلية

١٠

اختبار 4 من درس 1 حتى درس 4 من الوحدة الثانية

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول ٤ درجات (كل جزئية درجة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) مركز الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص =$ صفر هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

(٢) محيط الدائرة التي معادلتها : $(س - ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥$ يساوي .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

(٣) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم تساوي .... $سم^2$

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

(٤) النقطة التي تقع على الدائرة : $(س - ٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

السؤال الثاني ٣ درجات

أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢)

السؤال الثالث ٣ درجات

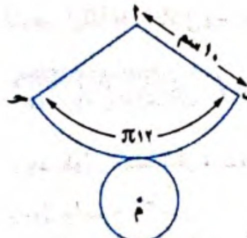
الشكل المقابل يمثل شبكة مجسم حيث

طول $\frown{جـ ب}$ = ١٢ π سم

، أ ب = ١٠ سم احسب :

(١) المساحة الكلية لهذا المجسم.

(٢) حجم المجسم.



الامتحانات النهائية



◂ **أولًا** : امتحان الكتاب المدرسي.

◂ **ثانيًا** : نماذج الامتحانات النهائية.

◂ **ثالثًا** : نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد.



يمكنك حل الامتحانات الإلكترونية عن طريق مسح الكود الخاص بكل امتحان



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق ، فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر (ب) ٦٠° (جـ) ٢٠° (د) ١٨٠°

(٢) جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

(٣) النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

(٤) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٧ (جـ) ٨ (د) ٥

٢ (أ) إذا كان : $\overrightarrow{ق_1} = ٥ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = -١٤ \overrightarrow{س} + ب \overrightarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح} = (١٠\sqrt{٢} ، \frac{٣}{٤} \pi)$

فأوجد قيمتى : أ ، ب

(ب) وضع جسم وزنه ٣٠٠ ث جم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومُنع من الانزلاق بواسطة قوة تصنع مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى زاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى ، أوجد مقدار القوة ومقدار رد فعل المستوى.

٣ (أ) أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢ ، -١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

(ب) كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث.جم وطول نصف قطرها ٣٠ سم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٠ سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن كلًا من : الشد فى الخيط ورد فعل الحائط على الكرة.

٤ (أ) مكعب من الشمع طول حرفه ٣٠ سم حول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٥ سم ، أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ٨ ٪ من الشمع قد فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

(ب) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين : ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

٥ (أ) أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(ب) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم وزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف ، يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة جـ على الحائط تعلو رأسيًا بمسافة ٤٠ سم أوجد كلًا من الشد ورد الفعل عند أ

ثانيًا نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

امتحان تفاعلى ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

(أ) ٤ π نق^2 (ب) ٣ π نق^2 (جـ) ٢ π نق^2 (د) ٤ π نق^2

٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن ....

(أ) أب = ب حـ = حـ أ (ب) أب + ب حـ = أحـ

(جـ) أب + ب حـ > أحـ (د) أب + ب حـ < أحـ

٣ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$

فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٢$\sqrt{٣}$

٤ الشكل المقابل يمثل شبكة هرم رباعى منتظم ارتفاعه (ع)

فإن العلاقة بين س ، ص ، ع هى ....

(أ) س^2 + ص^2 = ع^2

(ب) س^2 + ع^2 = ص^2

(جـ) $\left(\frac{س}{٢}\right)^2$ + ع^2 = ص^2

(د) $\left(\frac{س}{٢}\right)^2$ + ص^2 = ع^2

٥ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : $ق_1$: $ق_2$: $ق_3$ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم ، أثرت القوى ٢ ، ٤$\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم فى الاتجاهات أب ، أحـ ، أء ، أهـ ، أو على الترتيب

أوجد المحصلة مقدارًا واتجاهًا.

٧ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^3 وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^2

(أ) ٢٤٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٦٠

٨ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^2 ، وطول راسمه ١٠ سم.

أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

٩ فى الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ (٨ ، ٠) ، ء (٢ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة هى ....

(أ) (س − ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٢٥

(ب) (س + ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٣٦

(جـ) (س − ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٣٦

(د) (س + ٥)^2 + (ص − ٤)^2 = ٢٥

١٠ قوتان مقدارهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°

إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التى مقدارها ق

فإن مقدار المحصلة = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) ٦$\sqrt{٢}$ (جـ) ٦$\sqrt{٣}$ (د) ١٠

١١ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢$\sqrt{٣}$ (جـ) ٧٢ (د) ٣٦$\sqrt{٣}$

١٢ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ح}}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ وكانت $\overrightarrow{\text{ح}'}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $-\overrightarrow{\text{ق}_2}$

فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{\text{ح}} + \overrightarrow{\text{ح}'} = 2\,\overrightarrow{\text{ق}_1}$

(ب) $\overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{ح}'} + 2\,\overrightarrow{\text{ق}_2}$

(جـ) $\text{ح}^2 + \text{ح}'^2 = 2\,(\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2)$

(د) كل ما سبق.

١٣ معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 12\text{س} + 6\text{ص} + 20 =$ صفر

بالانتقال (٢ ، -٢)

(أ) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 10\text{س} + 4\text{ص} + 20 = 0$

(ب) $\text{س}^2 - 16\text{س} + 10\text{ص} + 20 = 0$

(جـ) $(\text{س} - 6)^2 + (\text{ص} + 3)^2 = 20$

(د) $(\text{س} - 8)^2 + (\text{ص} + 5)^2 = 25$

١٤ قوة مقدارها $5\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حُللت إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $7\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (د) ١٥

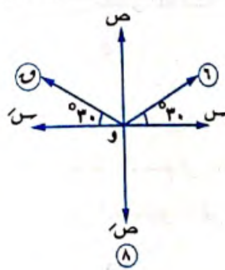
١٥ $\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث.كجم متصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت عليه قوة أفقية ق عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار كل من القوة ورد الفعل.

١٦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل

بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص

فإن : ق = ... نيوتن.



(أ) ٨ (ب) ٦

(جـ) ١٤ (د) ٢

١٧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط علمًا بأن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل = ... سم $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
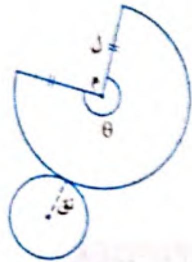
(أ) $\frac{20\sqrt{110}}{11}$ (ب) $10\sqrt{2}$ (جـ) ١٦٠ (د) $8\sqrt{5}$

١٨ الشكل المقابل يمثل شبكة مخروط حيث إن

قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائرى = θ

حيث ١٨٠° < θ < ٣٦٠°

فإن : ....



(أ) ل > ٢ نق (ب) ل = نق

(جـ) ل = ٢ نق (د) ل < ٢ نق

١٩ أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

٢٠ إذا كانت المعادلة $(\text{س} \quad \text{ص} \quad 25)\begin{pmatrix}\text{س}\\\text{ص}\\-4\end{pmatrix} = \square$ تمثل معادلة دائرة

فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

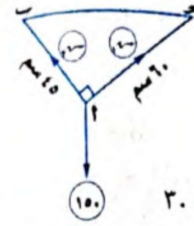
٢١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإن مقدار محصلتهما لا يمكن أن يساوى ....

(أ) ٢ ق (ب) $3\sqrt{2}$ ق (جـ) ٨ ق (د) $5\sqrt{3}$ ق

٢٢ في الشكل المقابل :

جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد

فإن : ش١ – ش٢ = ... ث.جم



(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

---

٢٣ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى.

---

٢٤ النقطة التي تقع على الدائرة $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٢$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، –٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)



النمـــوذج الثاني

امتحان تفاعلي ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحدًا. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

---

٢ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى يساوي ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٣ مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، –٤) (ب) (–٤ ، ٣) (جـ) (–٣ ، ٤) (د) (–٣ ، –٤)

---

٤ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين هو ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

---

٥ حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... سم^٣ $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

(أ) ٧٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١١٠ (د) ٧٧٠

٦ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوي ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوي ٦ ث.كجم

أوجد مقدار كل من القوتين.

---

٧ قوى مستوية مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق ث.جم تؤثر في نقطة ، في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوي الأضلاع في ترتيب دوري واحد.

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... ث.جم

(أ) ٥ ق (ب) $٢\sqrt{٣}$ ق (جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) ق

---

٨ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه أء

حُللت هذه القوة إلى مركبتين في الاتجاهين أحـ ، أو فإن مركبة هذه القوة في اتجاه أو تساوي .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) $١٠\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) $١٠\sqrt{٢}$

---

٩ معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، –٣) وتمس المستقيم الذي معادلته :

$٣ س - ٤ ص + ٢ = ٠$ هي ....

(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢$ (ب) $(س + ٢)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٤$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٦ ص = ١٢$ (د) $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٦$

---

١٠ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف. (ب) يتضاعف ثلاث مرات.

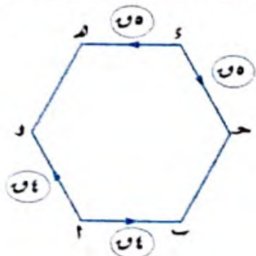
(ب) يتضاعف أربع مرات. (د) لا يتغير.

---

١١ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم

فإن محصلة القوى تكون في اتجاه ....



(أ) أء (ب) ءأ

(جـ) أحـ (د) أهـ

١٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم.

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم.

---

١٣ إذا كانت : ق١ = ٥ س − ٣ ص ، ق٢ = −٧ س + ٢ ص ، ق٣ = ٢ س + ص فإن : ح = ...

(أ) ٧ س − ٢ ص (ب) ٤ س − ٤ ص

(جـ) −١٤ س + ٤ ص (د) صفر

---

١٤ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها 30° مع الرأسي تحت تأثير قوة على الكرة في اتجاه عمودي على الخيط.

فإن مقدار القوة = ... داين.

(أ) $300\sqrt{3}$ (ب) ١٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) $300\sqrt{2}$

---

١٥ قوتان ق ، ق تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما ق

فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) 60° (ب) 45° (جـ) 120° (د) 135°

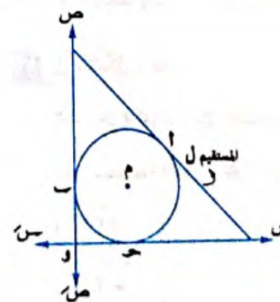
---

١٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته 210° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد ارتفاع المخروط.

---

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة المستقيم ل هي $\frac{س}{8} + \frac{ص}{6} = 1$

فإن معادلة الدائرة هي ....

(أ) $(س - 2)^2 + (ص - 2)^2 = 4$

(ب) $(س - 2)^2 + (ص - 2)^2 = 16$

(جـ) $(س + 2)^2 + (ص + 2)^2 = 4$

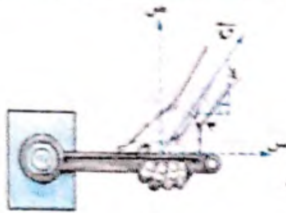
(د) $(س + 2)^2 + (ص + 2)^2 = 16$

١٨ النسبة بين حجم هرم ثلاثي منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم تساوي ....

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

---

١٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت المركبة الصادية للقوة (ق) لشخص يستخدم مفتاحًا للربط هي ٦٠ نيوتن فإن المركبة السينية للقوة ق تساوي .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

---

٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوي ....

(أ) صفر° (ب) 90° (جـ) 180° (د) 45°

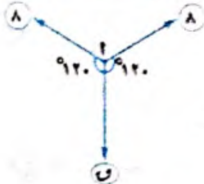
---

٢١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوي ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل نق² (جـ) π ل نق (د) π ل نق²

---

٢٢ في الشكل المقابل :



أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل حيث ق تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها 120° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا 120°

---

٢٣ مركز الدائرة : $س^2 + ص^2 - 6\,س + 8\,ص = 0$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٢٤ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.



امتحان تفاعلى ٣

النمـــوذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

فإن مقدار محصلتهما ح يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٥ سم يكون حجمه .... سم^{٢}

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن ومتلاقيتان فى نقطة تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

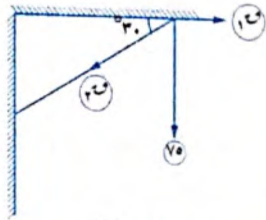
٥ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٥ سم

فإن حجمه = ... سم^{٢}

(أ) ١١٥٦ (ب) ١٢٥٤ (جـ) ١٣٠٨ (د) ١٢٩٦

٧ فى الشكل المقابل :



حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن

إلى مركبتين إحداهما أفقية ق١ والأخرى ق٢

فإن : ق٢ = ... نيوتن

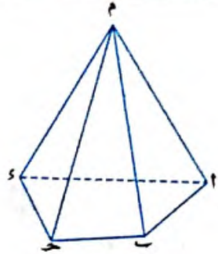
(أ) ٧٥ (ب) ٧٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ (د) ١٥٠ $\sqrt{٣}$

٨ قوتان مقدارهما ٦ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٠°

٩ فى الشكل المقابل :



المستوى أ ب ء ∩ المستوى م حـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ (جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{\text{م حـ}}$

١٠ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.

١١ شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى نقطة الأصل ومساحته ٣ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

فإن معادلة الدائرة التى تمر برؤوسه هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ٢ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٤

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ٦ (د) س^{٢} + ص^{٢} = ٨

١٢ في الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه : ق(∠ أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم²

(أ) ٥٠ π　　(ب) ٧٥ π

(جـ) ١٠٠ π　　(د) ١٢٥ π

١٣ قوتان ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة.　　(ب) منفرجة.　　(جـ) قائمة.　　(د) مستقيمة.

١٤ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية مقدارها ق نيوتن وكان رد فعل المستوى على الجسم ر نيوتن فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $١٠٠\sqrt{٣}$　　(ب) $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$　　(جـ) $٢٠٠\sqrt{٣}$　　(د) $\frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$

١٥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه = ٣٦ سم

فإن ارتفاع الهرم = ... سم

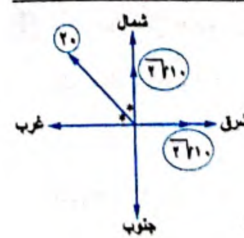
(أ) $\sqrt{٦}$　　(ب) $٢\sqrt{٦}$　　(جـ) ٦　　(د) ٤

١٦ أثبت أن الدائرتين : س² + ص² − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

، ٤ س² + ٤ ص² − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما.

١٧ في الشكل المقابل :



محصلة القوى $١٠\sqrt{٢}$ ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٢٠ نيوتن

تؤثر فى اتجاه ....

(أ) شمال الشرق.　　(ب) الشمال.

(جـ) غرب الشمال.　　(د) غرب الجنوب.

١٨ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق　　(ب) ع = ٢ نق　　(جـ) ع = ٢ نق²　　(د) ع = ٤ نق

١٩ شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة هو ....



(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = $١٠\sqrt{٢}$ نيوتن.

(جـ) ق = $٥\sqrt{٢}$ نيوتن.

(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.

٢٠ محيط الدائرة التى معادلتها : س² + ص² = ٨ هو ....

(أ) ٨ π　　(ب) ٦٤ π　　(جـ) $٢\sqrt{٢}$ π　　(د) $٤\sqrt{٢}$ π

٢١ ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

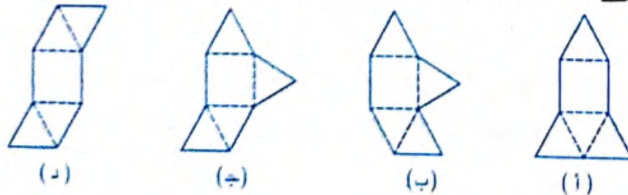
(أ) نقطة واحدة.　　(ب) نقطتين.

(جـ) ٣ نقاط على استقامة واحدة.　　(د) ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.

٢٢ قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر　　(ب) $٤\sqrt{٢}$　　(جـ) ٤　　(د) ٦

٢٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



(أ)　　(ب)　　(جـ)　　(د)

٢٤ إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{ق_2}$ (ب) $ق_1 = ق_2$

(جـ) $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} \neq \vec{0}$ (د) $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ليسا على استقامة واحدة.



امتحان تفاعلى ٤

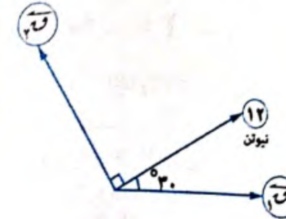
النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :

حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠°

فإن : $ق_2$ = ... نيوتن.



(أ) ١٠ (ب) $١٠\sqrt{٣}$ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) $٤\sqrt{٣}$

٢ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم ، حجمه ٣٠٠ سم³ يكون طول ضلع قاعدته يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

٣ قوتان متعامدتان مقدارهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٧

٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم. أخذت نقطة هـ على $\overline{أء}$ بحيث أ هـ = ٦ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، $٦\sqrt{١٠}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ ، $\overrightarrow{هـ حـ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة. أوجد قيمة كل من : ق ، ك

٥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب حـ دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{ب حـ}$ هو .... سم³

(أ) ١٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ١٥ π (د) ١٢ π

٧ مخروط دائرى قائم قاعدته أفقية تستند على مستوى الإحداثيات ومعادلتها $س^2 + ص^2 = ٣٦$ فإذا كان ارتفاع المخروط ٨ وحدات طول.

أوجد : (١) حجم المخروط. (٢) مساحته الكلية.

٨ المعادلة $(س \quad ص \quad ٨)\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٢ \end{pmatrix} = \boxed{}$ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٩ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) $٤\sqrt{٢}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) $٤\sqrt{٥}$

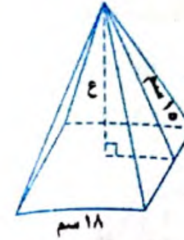
١٠ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسى بزاويتين قياساهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن والخيط الثانى $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن فإن وزن الجسم (و) = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٦ (د) ٢٤

١١ إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ قوتين فإن قياس الزاوية بين القوة $\overrightarrow{ق_1}$ ومحصلة القوتين $(\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2})$ ، $(\overrightarrow{ق_1} - \overrightarrow{ق_2})$ يساوى ....

(أ) صفر (ب) $ظا^{-1}\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (جـ) $ظا^{-1}\left(\frac{ق_2}{ق_1}\right)$ (د) $ظا^{-1}\left(\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}\right)$

١٢ في الشكل المقابل :



حجم الهرم الرباعى المنتظم الذى طول ضلع قاعدته ١٨ سم ، وارتفاعه الجانبى ١٥ سم هو .... سم³

(أ) ١٢٩٦ (ب) ١٦٢٠

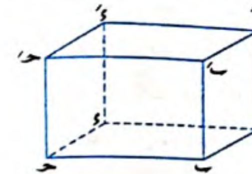
(جـ) ٥٤٠ (د) ١٩٤٤

---

١٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، −٤) ويقع مركزها على محور السينات.

---

١٤ في الشكل المقابل :



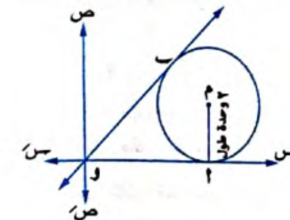
المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ حَ حـ = ...

(أ) ↔أأَ (ب) ↔ببَ

(جـ) ↔حـحَ (د) ↔أحـ

---

١٥ في الشكل المقابل :



إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) (س − ٢)² + (ص − ٥)² = ٢٥

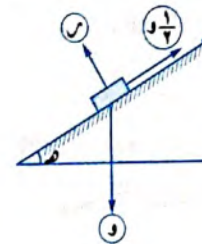
(ب) (س − ٢)² + (ص − ٥)² = ٤

(جـ) (س − ٥)² + (ص − ٢)² = ٢٥

(د) (س − ٥)² + (ص − ٢)² = ٤

---

١٦ في الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : ق (د هـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

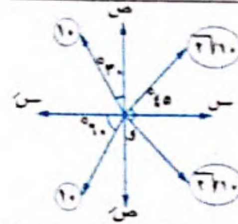
(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

١٧ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم² فإن حجمه = ... سم³

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

---

١٨ في الشكل المقابل :



محصلة القوى ع = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠√٢

(جـ) ١٠ (د) صفر

---

١٩ المعادلة | س −ص ، ص س | = ٣٦ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

---

٢٠ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

---

٢١ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) √٢ : √٣ (ب) √٣ : ٢ (جـ) √٦ : ٢ (د) √٢ : ٣

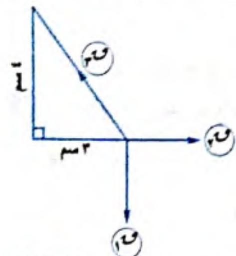
---

٢٢ قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث جم

(أ) ٢√٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

---

٢٣ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ق٣ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : ق١ : ق٢ : ق٣ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

١٤ فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{أب}}$ قضيب منتظم وزنه و يتصل بطرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى أملس ، $\overline{\text{بحـ}}$ خيط خفيف مثبت أحد طرفيه فى ب والطرف الآخر فى نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ



فإن رد فعل المفصل ....

(أ) يكون فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أب}}$ (ب) عموديًا على $\overline{\text{بحـ}}$

(جـ) عموديًا على الحائط. (د) ينصف $\overline{\text{بحـ}}$



امتحان تفاعلى ٥

النمــوذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم ، ارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٧ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) 180° (ب) 60° (جـ) 20° (د) صفر$^\circ$

٤ إذا كانت $\overrightarrow{\text{ق}}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$

٥ إذا كان : $\overrightarrow{\text{ق}}_1$ = ٥ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_2$ = أ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٦ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}}_3$ = −١٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ب $\overrightarrow{\text{ص}}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overrightarrow{\text{ح}}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$) فإن : أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٤

٦ مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^2 وطول راسمه ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته ثم أوجد حجمه.

٧ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

٨ المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه الذى طول حرفه ل سم تساوى .... سم^2

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ ل^2 (ب) $\sqrt{٣}$ ل^2 (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل^2 (د) ٣ $\sqrt{٢}$ ل^2

٩ هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم^3

(أ) ٣٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٦ $\sqrt{١٥}$ (د) ٢١٦ $\sqrt{١٥}$

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ١٠ سم ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، أثرت القوى ٢ ، ٧ $\sqrt{٥}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{حـب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـهـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـء}}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

١١ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وكانت محصلتهما = ح$_1$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما 90° ثم أصبحت محصلتهما = ح$_2$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما 150° فإن : ....

(أ) ح$_1$ = ح$_2$ (ب) ح$_1$ = ٢ ح$_2$ (جـ) ح$_1$ = $\frac{٣}{٥}$ ح$_2$ (د) ح$_1$ = $\frac{١}{٢}$ ح$_2$

١٢ الصورة العامة لمعادلة دائرة قطرها $\overline{اب}$ حيث: ا(٢ ، ٣) ، ب(−٤ ، ٩) هي ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٦ ص + ١٨ = ٠

(ب) (س + ٤)^{٢} + (ص − ٩)^{٢} = ٧٢

(ج) س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ١٢ ص + ١٩ = ٠

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ١٢ ص + ١٩ = ٠

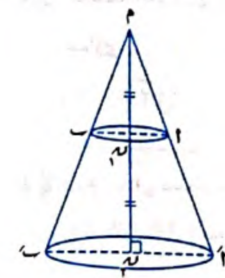
---

١٣ قوتان القيمة العظمى لمحصلتهما ٢٥ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ١٣ نيوتن. فإن مقداراهما .... نيوتن.

(أ) ٢٥ ، ١٣ (ب) ١٩ ، ٦ (ج) ١٣ ، ١٢ (د) ٧ ، ٢٠

---

١٤ في الشكل المقابل:

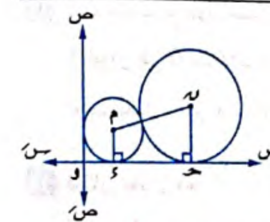


النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط م ا ب إلى المساحة الجانبية للمخروط م اَ بَ تساوي ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤ (ج) ١ : ٦ (د) ١ : ٨

---

١٥ في الشكل المقابل:

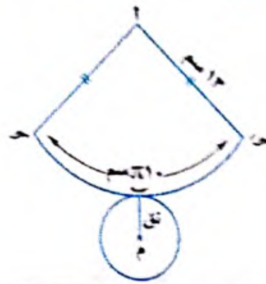


م ، ن دائرتان متماستان من الخارج معادلتاهما (س − ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤ ، (س − ا)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = ٦٤

فإن: ا + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ١٨ (د) ٢٨

١٦ الشبكة التي أمامك تصف مجسمًا ، حجمه = ... سم^{٣}



(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π (ج) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

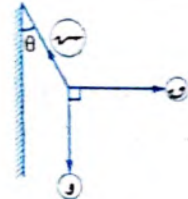
---

١٧ قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية ومقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار المركبة الثانية = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٢٠ $\sqrt{٢}$ (ج) ١٠ (د) ٢٠ $\sqrt{٥}$

---

١٨ في الشكل المقابل:



علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشُد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ

أي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و ظا θ (ب) $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ش}$ = صفر

(ج) ش^{٢} = ق^{٢} + و^{٢} (د) ش = ق + و

---

١٩ حللت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى قوتين $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ وتصنعان مع $\overrightarrow{ح}$ زاويتان قياسيهما هـ$_{١}$ ، هـ$_{٢}$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overrightarrow{ق_{١}}$ هو ....

(أ) $\frac{\text{ح جا هـ}_{١}}{\text{جا(هـ}_{١}\text{ + هـ}_{٢}\text{)}}$ (ب) $\frac{\text{ح جا هـ}_{٢}}{\text{جا(هـ}_{١}\text{ − هـ}_{٢}\text{)}}$

(ج) $\frac{\text{ح جا هـ}_{٢}}{\text{جا(هـ}_{١}\text{ + هـ}_{٢}\text{)}}$ (د) $\frac{\text{ح جا(هـ}_{١}\text{ + هـ}_{٢}\text{)}}{\text{جا هـ}_{٢}}$

---

٢٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقداري قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوي .... نيوتن.

(أ) ١١ (ب) ٢ (ج) ٥ (د) ٣

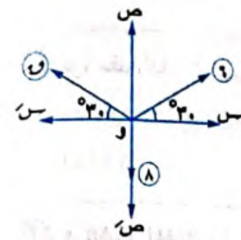
٢١ إذا قطعنا هرم رباعي منتظم بمستوى يوازي قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

(أ) مثلث. (ب) مربع. (جـ) مستطيل. (د) دائرة.

٢٢ النقطة التي تقع على الدائرة : س^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٦ هي ....

(أ) (صفر ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، صفر) (د) (٤ ، ٣)

٢٣ إذا كانت محصلة القوى (بالنيوتن) الموضحة بالشكل المقابل تؤثر في محور الصادات فإن : ق = ... نيوتن



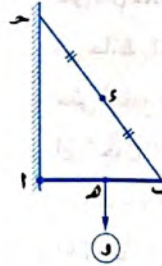
(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

٢٤ في الشكل المقابل :

أب قضيب منتظم متصل بمفصل أ على حائط رأسي حفظ أفقيًا بواسطة خيط مربوط من نقطة ب والطرف الآخر للخيط مربوط في نقطة حـ على الحائط الرأسي أعلى أ

أي مما يأتي هو مثلث القوى ؟



(أ) Δ ب ء هـ (ب) Δ ء هـ أ

(جـ) Δ أ ء هـ (د) Δ أ حـ ء

النمـــوذج السادس

امتحان تفاعلي ٦



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوي ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل نق^{٢} (جـ) π ل نق (د) π ل نق^{٢}

٢ أي قوتين مما يأتي لا يمكن أن يكون مقدار محصلتهما ٤ نيوتن ؟

(أ) ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن. (ب) ٣ نيوتن ، ٣ نيوتن.

(جـ) ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن. (د) ٣ نيوتن ، ٨ نيوتن.

٣ النقطة التي تقع على الدائرة (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هي ....

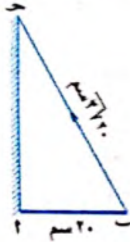
(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٤ عدد المستويات التي تحمل أوجه الهرم الخماسي هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) عدد لا نهائي.

٥ في الشكل المقابل :

أب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت في حائط رأسي عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد فعل المفصل على القضيب ....



(أ) في اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبعد عن الحائط مسافة ١٠ سم

(جـ) ينصف $\overline{حـب}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

٦ علق ثقل مقداره ٣٤٠ نيوتن بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين في خط أفقي واحد البعد بينهما ٣٤ سم. فإن الشد في الخيطين على الترتيب يساوي .... نيوتن.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ، ٦٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥٠ $\sqrt{٢}$ ، ٨٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ٣٠٠ ، ١٦٠ (د) ٣٠٠ ، ١٠٠

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٥ ، −٤) وتمس محور السينات هي ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠

(ب) س^{٢} + ص^{٢} − ٥ س + ٤ ص = ٠

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ٨ ص = ٢٥

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س − ٨ ص + ٢٥ = ٠

٨ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما في نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد في كل منهما.

---

٩ إذا كانت ح محصلة القوتين ق١ ، ق٢ وكانت ح ⊥ ق١ وكانت ح = $\frac{١}{٢}$ ق٢ فإن قياس الزاوية بين القوتين ق١ ، ق٢ هو ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

---

١٠ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³ أوجد ارتفاعه الجانبي ومساحته الجانبية.

---

١١ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية في نقطة ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°

فإن : مقدار ك = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

---

١٢ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم³ ومحيط قاعدته ٦ π سم.

فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٢٧ (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{٣}$ (د) ٩

---

١٣ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

---

١٤ أ ب جـ د هـ و شكل سداسي منتظم. تؤثر القوى التي مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢ ث.كجم في نقطة أ في الاتجاهات أب ، أجـ ، أهـ ، أو على الترتيب.

فإن محصلة هذه القوى تعمل في اتجاه ....

(أ) أجـ (ب) أهـ (جـ) أد (د) أو

---

١٥ طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة س² + ص² = نق² من النقطة (٠ ، ٢ نق) هو .... وحدة طول.

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

١٦ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه : أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته ب جـ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

---

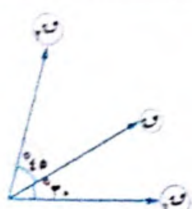
١٧ أ ب جـ د أَ بَ جـَ دَ مكعب طول حرفه ٢٠ سم وضع بداخله مخروط دائري قائم بحيث رأس المخروط هو مركز القاعدة أَ بَ جـَ دَ وقاعدة المخروط تمس أضلاع القاعدة أ ب جـ د

فإن النسبة بين حجم المخروط والمكعب = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١٢}{\pi}$

---

١٨ في الشكل المقابل :



القوة ق هي محصلة القوتين ق١ ، ق٢

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥° (ب) $\frac{جا ٧٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$

(جـ) $\frac{جا ٤٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$ (د) $\frac{جا ٧٥°}{جا ٣٠°} + \frac{جا ٧٥°}{جا ٤٥°}$

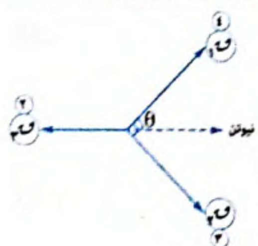
---

١٩ قوتان متلاقيتان في نقطة مقداراهما ق١ ، ق٢ حيث ٠ ≤ ق١ ≤ ١٢ ، ٨ ≤ ق٢ ≤ ١٧ وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) ٢ ≤ ح ≤ ٤ (ب) ٠ ≤ ح ≤ ٤ (جـ) ٠ ≤ ح ≤ ١٧ (د) ٥ ≤ ح ≤ ١٧

---

٢٠ الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى



ق١ ، ق٢ ، ق٣ مقاديرها ٤ ، ٢ ، ٢ نيوتن

على الترتيب فإذا كانت : جا θ = $\frac{٣}{٥}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى

يساوي .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

---

٢١ المستقيمات الرأسية المختلفة في الفراغ تكون ....

(أ) متوازية. (ب) متخالفة.

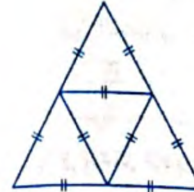
(جـ) يجمعها مستوى واحد. (د) متقاطعة.

٢٢ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$

٢٣ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة :



(أ) هرم رباعى.

(ب) هرم رباعى منتظم.

(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٢٤ قوتان مقداراهما ٣ ، ٥ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بين المحصلة والقوة الثانية = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) صفر° (د) ٣٠°

النمـــوذج السابع

امتحان تفاعلى ٧



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^{٢}.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

٣ مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة

وكانت : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ − ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$

فإن : $ق_3$ = ... نيوتن.

(أ) ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ (ب) −٥ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$

(جـ) $\sqrt{٢٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٧٢ (د) ٧٢ $\sqrt{٣}$

٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢) هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ١٠ ص − ٥ = ٠ .

(ب) س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ١٠ ص − ٥ = ٠ .

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٥ ص − ٥ = ٠ .

(د) س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ١٠ ص − ٢٥ = ٠ .

٧ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

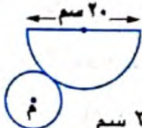
(أ) ∅ (ب) ل (جـ) {أ} (د) س

٨ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٢٤٠ سم^{٢} وارتفاعه الجانبى ١٢ سم

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) حجم الهرم.

٩ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا

فإن طول نصف قطر قاعدته = ...



(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

١٠ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر فى مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

أوجد رد فعل كل من المستويين.

---

١١ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ، مساحته الكلية = ٢١٦ π سم^{2}

يساوى .... سم^{3}

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٣٢٠ π (جـ) ٣٨٠ π (د) ٣٢٤ π

---

١٢ إذا كانت ح هى محصلة قوتين ق$_{1}$ ، ق$_{2}$ حيث : ق$_{2}$ > ق$_{1}$ فأى من الشروط الآتية تكفى لجعل ح ⊥ ق$_{1}$ ؟

(أ) ح^{2} = ق$_{1}^{2}$ + ق$_{2}^{2}$ (ب) ح^{2} = ق$_{2}^{2}$ − ق$_{1}^{2}$

(جـ) $\overline{ق_{1}}$ ⊥ $\overline{ق_{2}}$ (د) جميع ما سبق.

---

١٣ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{ب حـ}$ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب ، عيِّن محصلة هذه القوى.

---

١٤ إذا كانت : س^{2} + ص^{2} + ٢ (حتا θ) س − ٢ (حا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ... وحدة طول.

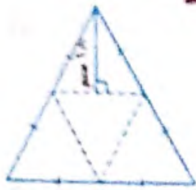
(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

---

١٥ أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_{1}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ق$_{2}$ ثقل جرام والقوة الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق فإن : (ق$_{1}$ ، ق$_{2}$) = ...

(أ) (٧ ، ٠) (ب) (٧ ، ١٢) (جـ) (٧ ، ١٢ $\sqrt{٢}$) (د) (٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$)

١٦ عند طى الشبكة التى أمامك



فإن المساحة الكلية للجسم الناتج = ... سم^{2}

(أ) ١٠٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٢٤ $\sqrt{٣}$

(جـ) ٧٥٨ (د) ٤٣٢ $\sqrt{٣}$

---

١٧ أ ب حـ ء هـ شكل خماسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overline{أ حـ}$ ثم حُللت هذه القوة فى اتجاهين $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه $\overline{أ ب}$ يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢.٤

---

١٨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^{2}

(أ) ٦٠٠ π (ب) ٣٧٥ π (جـ) ١٨٧٥ π (د) ٥٦٢٥ π

---

١٩ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) $\sqrt{١٩}$ (ب) $\sqrt{٣٤}$ (جـ) ٧ (د) ١٥

---

٢٠ فى الشكل المقابل :



القوة $\overline{ق}$ هى محصلة القوتين $\overline{ق_{1}}$ ، $\overline{ق_{2}}$

فإن : $\frac{ق_{1} + ق_{2}}{ق}$ = ...

(أ) حا ٣٠° + حا ٤٥° (ب) $\frac{حا ٧٥° + حا ٣٠°}{حا ٧٥°}$

(جـ) $\frac{حا ٤٥° + حا ٣٠°}{حا ٧٥°}$ (د) $\frac{حا ٧٥°}{حا ٣٠°}$ + $\frac{حا ٧٥°}{حا ٤٥°}$

---

٢١ مركز الدائرة ٢ س^{2} + ٢ ص^{2} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٤ ، ٢) (جـ) ($\frac{٣}{٢}$ ، −٢) (د) (−٣ ، −٤)

٢٢ قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٢٣ أقل عدد من المستويات التي يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢٤ إذا كان : $\overline{ق_١}$ = ٢ $\overline{س}$ − ٢ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢}$ = ٤ $\overline{س}$ − ٨ $\overline{ص}$ ، محصلتهما $\overline{ح}$ = ٢ أ $\overline{س}$ − ٢ ب $\overline{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٣ (ب) ٣ $\frac{١}{٢}$ (جـ) ٦ $\frac{١}{٢}$ (د) ١٢



امتحان تفاعلي ٨

النمـــوذج الثامن

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∋]٠ ، π[، ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٢$\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢ حجم هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوي .... سم^٣

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

٣ محيط الدائرة التي معادلتها : س^٢ + ص^٢ = ٨ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢$\sqrt{٢}$ π (د) ٤$\sqrt{٢}$ π

٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الآخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

٥ قوتان متساويتان في المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٦ هرم سداسي منتظم حجمه ٨$\sqrt{٣}$ سم^٣ وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

٧ قوة مقدارها ١٠$\sqrt{٢}$ ث.جرام تعمل في اتجاه الجنوب الشرقي تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبة القوة في اتجاه الجنوب = ... ث.جرام.

(أ) ١٠$\sqrt{٣}$ (ب) ١٠$\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٨ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هي ....

(أ) س^٢ + ص^٢ − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

(ب) س^٢ + ص^٢ − ٢ س + ص − ٤ = ٠

(جـ) س^٢ + ص^٢ + ٤ س − ٢ ص − ٤ = ٠

(د) س^٢ + ص^٢ − ٤ س + ٢ ص − ١٦ = ٠

٩ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق في أحد طرفي خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت في نقطة من حائط رأسي ، أثرت على الجسم قوة أفقية ق ، فاتزن الجسم عندما يكون على بعد ٥٠ سم من الحائط فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٠

١٠ الزاوية المركزية للقطاع الذي إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون ....



(أ) حادة. (ب) منفرجة.

(جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

١١ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨٠ ، ك ، ٥٠ ، $٨٠\sqrt{٣}$ ث.كجم فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، الجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤٠ ث.كجم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

---

١٢ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

---

١٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٨ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ١٢

---

١٤ فى الشكل المقابل :

دائرة م تمس محور السينات عند أ

، و ب = ٢ وحدة طول ، ب حـ = ٦ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٦$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

---

١٥ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار رد فعل المستوى على الجسم = ... ث.كجم.

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (جـ) $١٢\sqrt{٣}$ (د) $٨\sqrt{٣}$

---

١٦ أوجد قيم ك التى تجعل الدائرتين :

$د_١ : (س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢ : (س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

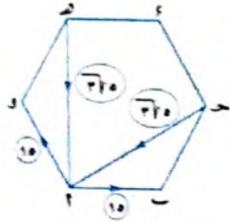
متماستين.

١٧ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ فأى القيم الآتية تصلح قيمة لـ θ ؟

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

---

١٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم

أثرت القوى ١٥ ، $٥\sqrt{٣}$ ، $٥\sqrt{٣}$ ، ١٥ على الترتيب

فى الأضلاع $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـأ}$ ، $\overleftarrow{هـأ}$ ، $\overleftarrow{أو}$

فإن المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

---

١٩ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أء}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب هما ....

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠ (ب) $٥\sqrt{٣}$ ، ١٠ (جـ) ١٠ ، $١٠\sqrt{٣}$ (د) $٢٠\sqrt{٣}$ ، ٢٠

---

٢٠ الشبكة التى أمامك تصف



مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^٣

فإن مساحته الكلية = ... سم^٢

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

---

٢١ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

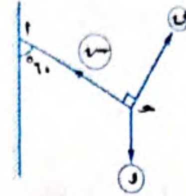
(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسم = ٣ مستويات.

٢٢ في الشكل المقابل :



مصباح وزنه و ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : ق/ش = ...

(أ) ٢ (ب) ١/٢ (جـ) ١/√٣ (د) √٣

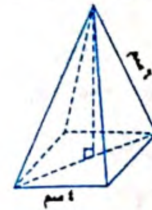
---

٢٣ قوتان ق ، ٢ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) ق√٥ (ب) ق√٣ (جـ) ٣ق (د) ق

---

٢٤ في الشكل المقابل :



هرم رباعي منتظم فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٧√٢ (ب) ٢√٧

(جـ) ٤√٢ (د) ٢√٥

النموذج التاسع



امتحان تفاعلي ٩

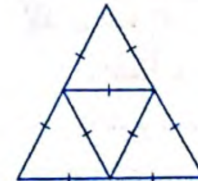
أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متعامدتان مقدارهما ٢ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، مقدار محصلتهما يساوي ٣√٥ نيوتن فإن : ق = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٢ أي المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم رباعي منتظم.

(جـ) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٣ مخروط دائري قائم حجمه ١٠٠ سم³ فإن حجمه عندما يتضاعف ارتفاعه يساوي .... سم³

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤ (د) ٨٠

---

٤ وضع جسم وزنه ١٨ ث.كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تعمل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار هذه القوة = ... ث.كجم

(أ) ١٢ (ب) ٩ (جـ) ٢√٣ (د) ٦√٣

---

٥ قوة مقدارها ٤√٢ تعمل في اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها في اتجاه الشمال الشرقي تساوي .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٤√٢ (جـ) ٨ (د) ٨√٢

---

٦ هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم²

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٢٠

---

٧ معادلة الدائرة التي يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هي ....

(أ) (س − ٣)² + (ص − ٥)² = ٣√٢ (ب) (س + ٣)² + (ص + ٥)² = ١٨

(جـ) (س − ٣)² + (ص − ٥)² = ١٢ (د) (س − ٣)² + (ص − ٥)² = ١٨

---

٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن في أحد طرفي خيط خفيف والطرف الآخر مثبت في نقطة من حائط رأسي ، أزيح الثقل بقوة في اتجاه عمودي على الخيط حتى أصبح الخيط في وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

فإن مقدار الشد في الخيط = ... نيوتن

(أ) ٨ (ب) ٨√٢ (جـ) ٨√٣ (د) ١٢

٩ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ث.كجم يتصل طرفه أ بحائط رأسى بواسطة مفصل ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بربطه من إحدى نقطة حـ حيث : أ حـ = ٤ أمتار بأحد طرفى خيط ثم ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ء على الحائط الرأسى فوق أ وعلى بعد ٤ أمتار منها. احسب مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

---

١٠ معادلة الدائرة التى تمس محور السينات عند النقطة (-٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة طول = ...

(أ) $(س + ٢)^{٢} = ٤٨$ (ب) $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ٤٨$

(جـ) $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٢٤$ (د) $(س + ٢)^{٢} + (ص - ٤)^{٢} = ١٦$

---

١١ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار أى من هاتين القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢

---

١٢ قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

---

١٣ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٣} : \sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٣} : ٢$ (جـ) $\sqrt{٦} : ٢$ (د) $\sqrt{٣} : ٢$

---

١٤ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، الأولى نحو الشرق ، الثانية تصنع زاوية قياسها ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

---

١٥ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^{٢} وطول راسمه ١٣ سم
فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٥٠ π (ب) ٦٥ π (جـ) ٩٠ π (د) ١٠٠ π

---

١٦ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

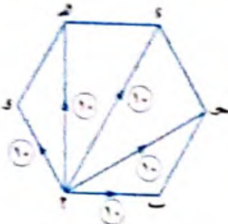
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

١٧ النقطة التى تقع على الدائرة : $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ١) (ب) (٢- ، ٣) (جـ) (٥ ، ٢) (د) (٣ ، ٤)

---

١٨ أثرت خمس قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى اتجاهات الرؤوس الأخرى للسداسى كما بالشكل المقابل



فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (د) (٢٠ + ١٠ $\sqrt{٣}$)

---

١٩ فى الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين بحيث تكون شبكتى مخروطين قائمين

فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

---

٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°
فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

---

٢١ قوتان متساويتان فى المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن
فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

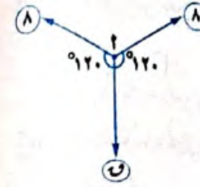
(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

---

٢٢ مركز الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٤- ، ٣) (ب) (٣- ، ٤) (جـ) (٤ ، ٣-) (د) (٣ ، ٤-)

٢٣ في الشكل المقابل :



أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الموضحة بالشكل حيث $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

٢٤ المستويان غير المتوازيين يتقاطعان في ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) مستوى. (د) شعاع.

النمـــوذج العاشر



امتحان تفاعلي ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ النقطة التي تقع على الدائرة $س^2 + (ص - ٥)^2 = ٢٠$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٢ قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما هو ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

٣ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة

فإن مقدار محصلة $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ يساوي ....

(أ) $ق_3$ (ب) $ق_1 + ق_2$ (جـ) $ق_1 ق_2$ (د) صفر

٤ قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

ومحصلتهما ق $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

٥ مخروط دائري قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم²

(أ) ٢٠٠ π (ب) ١٣٦ π (جـ) ٣٢٠ π (د) ٤٠٠ π

٦ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

٧ إذا كانت (و) هي نقطة الأصل لنظام إحداثي متعامد في المستوى وكانت

$\overrightarrow{ق}$ = (٨ ث.كجم ، ١٣٥°) قوة تؤثر في نقطة و فإن مركبة القوة $\overrightarrow{ق}$ في اتجاه محور الصادات تساوي ....

(أ) -٤ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٤

٨ أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٦ $\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن

في $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أد}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ على الترتيب. فإن مقدار واتجاه محصلة هذه القوى هو ....

(أ) ١٨ نيوتن في اتجاه $\overrightarrow{أد}$ (ب) ٢٣ نيوتن في اتجاه $\overrightarrow{أد}$

(جـ) ٢٠ نيوتن في اتجاه $\overrightarrow{أهـ}$ (د) ٢٣ نيوتن في اتجاه $\overrightarrow{أجـ}$

٩ علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن في طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط في حائط رأسي ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. فإن مقدار القوة = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٦ (د) ٢٨

١٠ وضع جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها ق نيوتن

فإن مقدار رد فعل المستوى على الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$

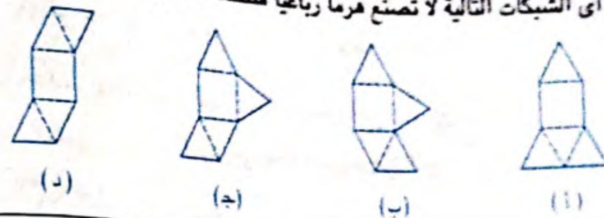
١١ معادلة الدائرة التي مركزها (-٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٥$ (ب) $(س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٥$

(جـ) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$

١٢ إناء أسطواني الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدني على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء في الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

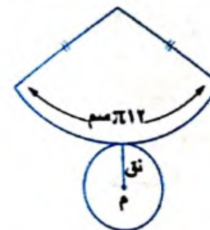
١٣ أي الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟



١٤ خمس قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥$\sqrt{٣}$ ، ٧$\sqrt{٢}$ ، ٧ ث.كجم تعمل في اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربي ، الجنوب الغربي ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن المجموعة متزنة.

١٥ الشبكة التي أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم³

فإن مساحته الكلية = ... سم²



(أ) ٩٦ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٣٢ π (د) ١٦ π

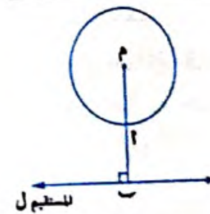
١٦ في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة هي

س² + ص² − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ ،

، م ب ⊥ المستقيم ل حيث ل : ٣ س − ٤ ص + ٢٣ = ٠ ،

، م ب يقطع الدائرة في أ فإن : طول أ ب = ... وحدة طول.



(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٢

١٧ قوتان مقدارهما ق ، ق$\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران في نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن وكانت هـ١ هي قياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة وكانت هـ٢ قياس الزاوية بين القوة الثانية والمحصلة فإن : ....

(أ) هـ١ = هـ٢ (ب) هـ١ = $\frac{١}{٢}$ هـ٢ (جـ) هـ١ = ٣ هـ٢ (د) هـ١ = ٤ هـ٢

١٨ أي الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أي مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

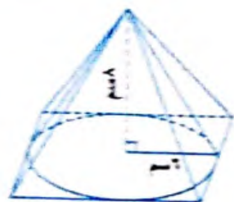
(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان في نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أي ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

١٩ في الشكل المقابل :

هرم قائم منتظم ومخروط دائري قائم مشتركان في الرأس وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل فإن النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط القائم والمساحة الجانبية للهرم تساوي ....



(أ) $\frac{٤}{\pi}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

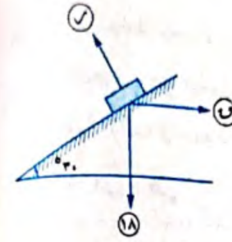
٢٠ قوة مقدارها ٥$\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها في اتجاه الشرق يساوي .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥$\sqrt{٣}$

٢١ إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ يساوي ....

(أ) $ق_١$ (ب) $ق_١ + ق_٢$ (جـ) $ق_٣$ (د) صفر

٢٢ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية ق نيوتن

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$

(ج) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

---

٢٣ طول قطر الدائرة : ٤ $س^{٢}$ + ٤ $ص^{٢}$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠

يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ١٢ (د) ٢٤

---

٢٤ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه تساوي ....

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ (ج) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٣}$: ٣

ثالثاً نماذج امتحانات بنظام أسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الأول

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان مقدارهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٣٠° (ب) ٩٠° (ج) ١٨٠° (د) ٢٧٠°

---

٢ قوتان مقدارهما ٧ ، ق ث.كجم المحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.كجم

(أ) ٨ (ب) ٧ (ج) ١٠ (د) ٥

---

٣ قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ (ب) يتناقص كلما نقصت قيمة θ

(ج) يزداد كلما نقصت قيمة θ (د) لا يتغير بتغير قيمة θ

---

٤ قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن

ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن قيمة ق تساوي .... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٣

---

٥ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل في اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين

فإن مركبتها في اتجاه الشرق تساوي .... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ٦ (ج) صفر (د) ٨

---

٦ $\overrightarrow{ق_{١}}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_{٣}}$ = −١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$)

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (١ ، ١) (ج) (١ ، −١) (د) (−١ ، −١)

7. ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ نيوتن تؤثر فى نقطة الأولى نحو الشمال والثانية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق فإن مقدار المحصلة يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٣ (جـ) ٣٢ (د) ٢٨

8. ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقدارى قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى ....

(أ) ١١ نيوتن. (ب) ٢ نيوتن. (جـ) ٥ نيوتن. (د) ٣ نيوتن.

9. علق جسم وزنه ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم فإن مقدار الشد فى الخيطين .... ث جم

(أ) ١٦٠ ، ١٢٠ (ب) ١٨٠ ، ١٢٠

(جـ) ١٥٠ ، ١٦٠ (د) ١٠٠ ، ١٣٠

10. أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية فى المقدار يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

11. قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° فإن مقدار رد فعل كل من المستويين ....

(أ) ١٢ ، ١٥ نيوتن (ب) ١٢ ، ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

(جـ) ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ نيوتن (د) ١٥ ، ١٣ نيوتن

12. هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم³

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٦٠ (د) ٢٠٠

13. طول قطر الدائرة : ٤ س² + ٤ ص² + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠ يساوى .... وحدة طول

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

14. النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

15. مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ٦ سم. وارتفاعه ٤ سم. فإن طول راسمه = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

16. المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متخالفة. (ب) متوازية.

(جـ) متقاطعة. (د) يجمعها مستوى واحد.

17. طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروط دائرى قائم حجمه ٤٩ π سم³ وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

18. أى المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ....

(أ) س² − ص² + س − ص = ٦ (ب) ٢ س² + ص² − س + ص = ٥

(جـ) س² + ص² − س = ٦ (د) س² + ص² − س ص = ٦

19. مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم² فإن حجمه = ... سم³ حيث (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ٣١٢٢

20. هرم رباعى منتظم مساحته الكلية ٧٠ سم² ، ومساحته الجانبية ٤٥ سم² فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) ٢,٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٤}$ (د) ٤,٥

21. المعادلة $\begin{vmatrix} س & ت\ ص \\ ت\ ص & س \end{vmatrix}$ − ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧

النموذج الثانى

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ثلاث قوى مستوية متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكان مقدارى قوتين منهما هو ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يكون .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ١١ (جـ) ٥ (د) ٢

٢ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم^{٢}، وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٣٦٠

٣ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_{١}}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$

فإن : $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٤ (ب) $\sqrt{٨٤}$ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠

٤ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}.

(أ) $٣٢٠\sqrt{٣}$ (ب) $٩٦٠\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٣٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ (د) ٥٥٤,٢٥

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) $١٦\sqrt{٢}$ (د) صفر

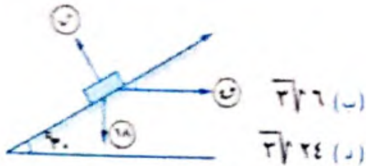
٦ إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى ∋ [٠ ، π] فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ)]٤ ، ٨[(ب)]٤ ، ٨] (جـ) [٤ ، ٨[(د) [٤ ، ٨]

٧ إذا كانت الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص + حـ = ٠ تمس محور السينات فإن : حـ = ...

(أ) −٩ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) −٦

٨ فى الشكل المقابل :



ق + ر = ...

(أ) $١٢\sqrt{٣}$ (ب) $٦\sqrt{٣}$ (جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

٩ طول القطعة المماسة للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٩ من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

١٠ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية مقدارًا ويمكن أن تكون متزنة هو ....

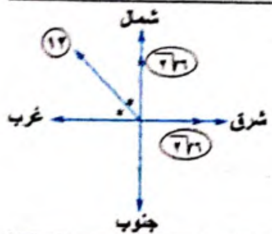
(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ١

١١ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

١٢ فى الشكل المقابل :



تكون محصلة القوى تعمل فى اتجاه ....

(أ) الجنوب. (ب) الشرق.

(جـ) الغرب. (د) الشمال.

١٣ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أء}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب هما .... نيوتن.

(أ) $٥\sqrt{٣}$ ، ٥ (ب) ٥ ، $٥\sqrt{٣}$ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ ، ٥ (د) $١٠\sqrt{٣}$ ، ١٠

١٤ إذا كانت $\overrightarrow{ح}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكانت ى قياس الزاوية بينهما وكان ق١ : ق٢ : ح = ٤ : ٣ : $\sqrt{١٣}$ فإن : ى = ...°

(أ) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

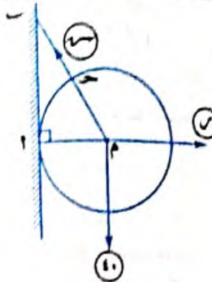
---

١٥ مركز الدائرة التى معادلتها : ٢ س^٢ + ٢ ص^٢ + ١٢ س − ١٦ ص = ٠ هو ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٦ ، ٨) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٦ ، −٨)

---

١٦ فى الشكل المقابل :



كرة منتظمة مركزها م ، وطول قطرها ٦ سم

ووزنها ٤٠ نيوتن ، ب حـ = ٢ سم

فإنه فى وضع الاتزان يكون ر + ش = ... نيوتن

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٦٠ (د) ٨٠

---

١٧ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ق_٢}$ ومحصلة القوتين ($\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$) ، ($\overrightarrow{ق_١}$ − $\overrightarrow{ق_٢}$) هى ....

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

---

١٨ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم، وطول راسمه ٥ سم. يكون حجمه .... سم^٣.

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π

---

١٩ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // المستوى س

فإن : $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

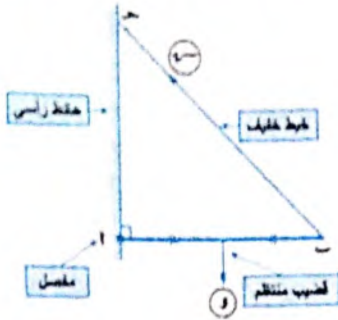
---

٢٠ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التى معادلتها س^٢ + ص^٢ = نق^٢

وكان أ ، ب ∈ للدائرة حيث أ = (−٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، −٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، −٢)

٢١ فى الشكل المقابل :



اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....

(أ) فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$

(ب) فى اتجاه $\overrightarrow{أحـ}$

(جـ) ينصف $\overline{ب حـ}$

(د) عمودى على $\overline{ب حـ}$

النموذج الثالث

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ عدد المستويات التى تمر بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة تساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان : أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم^٢.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

---

٣ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

هى : س^٢ + ص^٢ .... = ٠.

(أ) −٤ س + ٢ ص − ٩ (ب) −٤ س + ٢ ص − ٤

(جـ) + ٢ س − ص + ٣ (د) + ٢ س − ص + ٩

---

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة بحيث :

$\overrightarrow{ق_١}$ = (٢ ، −٥) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (−٣ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{ق_٣}$ = ...

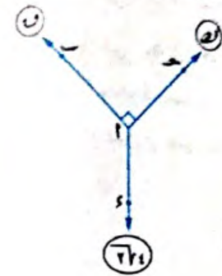
(أ) (٢ ، ١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

٥ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ° بحيث ما هـ = $\frac{-4}{5}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) خلاف ذلك

---

٦ فى الشكل المقابل :



ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤√٢ نيوتن

، ق(∠ب أ جـ) = ٩٠° ، ق(∠ب أ د) = ١٣٥°

فإن : ق ، ك تساوى .... على الترتيب.

(أ) ٤ ، ٤ (ب) ٤ ، ٤√٢

(جـ) ٤√٢ ، ٤ (د) ٢ ، ٢

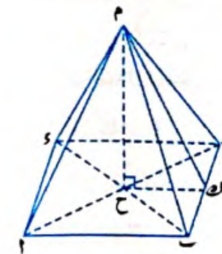
---

٧ مركز الدائرة : ٢ س^2 + ٢ ص^2 − ٣٢ = ٠ هو ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (١ ، ١) (د) (−١ ، −١)

---

٨ فى الشكل المقابل :



م أ ب جـ د هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^3 وارتفاعه ٤ سم

، ك جـ = ك ب ، $\overline{أ جـ} \cap \overline{ب د}$ = {ح}

، ق(∠م ح ك) = ق(∠ح ك ب) = ق(∠م ك ب) = ٩٠°

فإن المساحة الجانبية للهرم = ... سم^2

(أ) ١٨ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٦ (د) ٦٠

---

٩ مخروط دائرى قائم ، طول راسمه ١٧ سم. وارتفاعه ١٥ سم.

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

---

١٠ إذا كان : ق ، ٢ مقدارى قوتين تؤثران فى جسيم وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°

، المحصلة تنصف الزاوية المحصورة بين القوتين فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) √٣ (د) خلاف ذلك.

١١ الصورة القطبية للمتجه أ = √٢ س + √٢ ص هى

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

---

١٢ قوتان مقدارهما ٨√٣ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

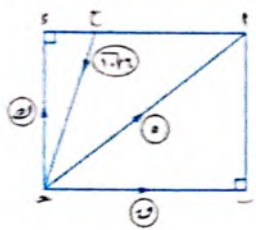
---

١٣ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل التمام

---

١٤ فى الشكل المقابل :



إذا كانت مقادير القوى ق ، ٥ ، ك ، ٦√١٠ متزنة وتؤثر فى المستطيل أ ب جـ د فى الاتجاهات $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{جـ د}$ ، $\overleftarrow{جـ ح}$ بحيث أ ب = ٦ سم

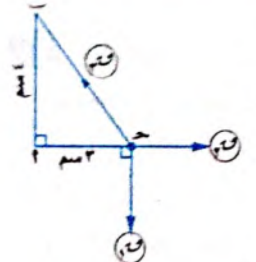
، ب جـ = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم

فإن قيمة ك = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

---

١٥ فى الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_1$ ، ق$_2$ ، ق$_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد

، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٣ سم

فإن : ق$_1$: ق$_2$: ق$_3$ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٣ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

١٦ عدد المستقيمات التى تمر بنقطتين مختلفتين ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

١٧ إذا كان الخط المستقيم ل // المستوى س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ل (ب) المستوى س (جـ) ∅ (د) خلاف ذلك.

---

١٨ إذا كانت الدائرة : $س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ١٢ ص + ٥ = ٠$ تمر برؤوس خماسى منتظم علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الاحداثى تمثل ٥ سم.

فإن مساحة سطح الخماسى المنتظم ≈ .... $سم^٢$.

(أ) ٨٧٣٢ (ب) ٧٨٢٣ (جـ) ٣٢٨٧ (د) ٢٣٧٨

---

١٩ وضع جسم وزنه ٨ ث.جم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ بحيث ما هـ = ٠.٦ وحفظ الجسم فى حالة الاتزان بواسطة قوة أفقية

فإن مقدار هذه القوة = ... داين.

(أ) ٦ (ب) ٥٨٨٠ (جـ) ٥٨٨ (د) خلاف ذلك.

---

٢٠ فى الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة الدائرة م هى $(س - ٣)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٢٥$

، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (-٢ ، ١٠)

فإن : أ ب = ... وحدة طول.

(أ) ١٣ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٥

---

٢١ فى الشكل المقابل :

أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم ، القوى التى مقاديرها

٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن

أثرت فى $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ بالترتيب

فإن مقدار محصلتهم = ... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٥٦١}$ (ب) $\sqrt{٦٥١}$

(جـ) $\sqrt{١٥٦}$ (د) $\sqrt{١٦٥}$

النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overrightarrow{ق_١} = ٢ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ حيث $ق_١$ ، $ق_٢$ مقاسه بالنيوتن فإن : مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٣}$ (د) ٥

---

٢ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما تساوى .... °

(أ) ٦٠ (ب) صفر (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

---

٣ إذا كان حجم هرم رباعى منتظم ١٢ $سم^٣$ وارتفاعه ٤ سم

فإن : طول حرف قاعدته = ... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٤ فى الشكل الموضح :

$ق_١$ = ...

(أ) ١٢ جا ٧٥°

(ب) ١٢ جا ٤٥°

(جـ) ٦ قا ٤٥°

(د) ٦ قا ٧٥°

---

٥ فى الشكل المقابل :

المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ جـَ جـ = ...

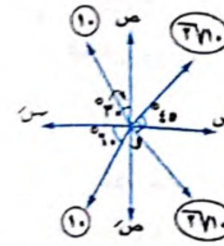
(أ) $\overleftrightarrow{أأَ}$ (ب) $\overleftrightarrow{بَ ب}$

(جـ) $\overleftrightarrow{جـَ جـ}$ (د) $\overleftrightarrow{أَ جـَ}$

٦ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط قائم ٦ سم، وارتفاعه ٨ سم، فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم².

(أ) ٦ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

٧ فى الشكل المقابل :



مقدار محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠
(ب) ١٠√٢
(جـ) ١٠
(د) صفر

٨ مركز الدائرة : س² + ص² − ٦ س + ٨ ص = صفر هو النقطة ....

(أ) (−٤ ، ٣) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٣ ، −٤)

٩ محيط الدائرة التى معادلتها : (س − ٣)² + (ص + ٢)² = ٢٥ يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

١٠ إذا كان : ق١ = ٥ س + ٢ ص ، ق٢ = أ س + ٦ ص ، ق٣ = −١٤ س + ب ص وكانت المحصلة ح = (١٠√٢ ، $\frac{٣}{٤}$ π)

فإن : أ + ب = ...

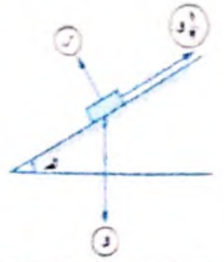
(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٤

١١ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم

فإن : مساحته الكلية = ... سم²

(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$ (ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$ (جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ٩√٣

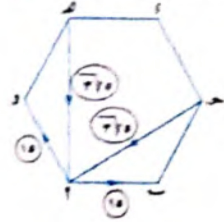
١٢ فى الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزن تحت تأثير القوى المبينة بالشكل فإن : ق (∠ هـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°
(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

١٣ فى الشكل المقابل :



أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم
أثرت القوى ١٥ ، ٥√٣ ، ٥√٣ ، ١٥ نيوتن
على الترتيب فى الأضلاع أب ، جـ أ ، د أ ، أ و
فإن : مقدار المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

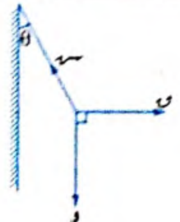
١٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

١٥ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم²، وطول راسمه ١٠ سم، يساوى .... سم.

(أ) ٦ (ب) ١٤ (جـ) ١٦ (د) −١٦

١٦ فى الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها θ
فأى الجمل الآتية غير صحيح فى وضع الاتزان ....

(أ) ق = و ظا θ (ب) ش = ق + و
(جـ) و + ق + ش = صفر (د) ش² = ق² + و²

١٧ إذا كان حجم هرم سداسى منتظم يساوى $8\sqrt{3}$ سم^3، وارتفاعه يساوى ٤ سم.

فإن : محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) $6\sqrt{3}$

---

١٨ قوة مقدارها $5\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حللت إلى مركبتين متعامدين

فإن : مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $7\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (د) ١٥

---

١٩ معادلة الدائرة التى تمس المحورين ومركزها النقطة (−٤ ، ٤) هى ....

(أ) س^2 + ص^2 + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

(ب) س^2 + ص^2 = ١٦

(جـ) س^2 + ص^2 − ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

(د) س^2 + ص^2 = ٨

---

٢٠ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

---

٢١ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله $20\sqrt{2}$ سم. مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد الفعل المفصل على القضيب ....

(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبتعد عن الحائط مسافة ١٠ سم.

(جـ) ينصف $\overline{بحـ}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

النموذج الخامس

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٦٠° (ب) صفر° (جـ) ٣٠° (د) ١٨٠°

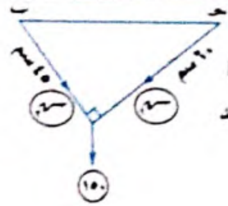
---

٢ قوتان مقدارهما ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) $\sqrt{5}$ ق (ب) $\sqrt{3}$ ق (جـ) ٣ ق (د) ق

---

٣ فى الشكل المقابل :



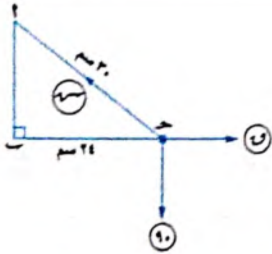
جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقى واحد

فإن : ش١ − ش٢ = ... ث.جم

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

---

٤ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ٩٠ ث.جم ، على بعد ٢٤ سم من الحائط وطول الخيط ٣٠ سم.

فإن : ش − ق = ... ث.جم.

(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٣٠

---

٥ أ ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، ء فيه : ء أ = حـ ء = ٤٠ سم ، أ ب = ٧٠ سم ، م ∈ $\overline{أب}$ حيث أ م = ٤٠ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، $10\sqrt{2}$ ، ٣٥ ث.جم فى $\overrightarrow{حـب}$ ، $\overrightarrow{حـم}$ ، $\overrightarrow{حـأ}$ ، $\overrightarrow{حـء}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوى ٥٠ ث.جم فإن : قيمة ق = ... ث.جم

(أ) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٦ أى مجموعات القوى التى مقاديرها كالتالى لا يمكن أن تكون متزنة ....

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١٢ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

---

٧ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

فإن مقدار القوة الأفقية = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠ (جـ) $\frac{100}{\sqrt{3}}$ (د) ١٥٠

---

٨ قوتان مقداراهما ق ، $\sqrt{3}$ ق نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما $ح_1$

عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_2$ عندما كان قياس

الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) $ح_1 = ح_2$ (ب) $ح_1 = 2\,ح_2$ (جـ) $ح_1 = \frac{2}{5}\,ح_2$ (د) $ح_1 = \frac{1}{2}\,ح_2$

---

٩ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٤ $\sqrt{2}$ ، ٥ $\sqrt{2}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات

الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب.

وكان مقدار محصلة القوى = ٢ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق − ك = ...

(أ) ١٢ (ب) ٢٧ (جـ) ٦ (د) ١٢

---

١٠ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية.

مقدار محصلتهما يساوى ٢ $\sqrt{5}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

١١ كرة ملساء من الحديد وزنها و ث.كجم مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى مائل

أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جتا هـ = $\frac{3}{5}$ فإذا اتزنت الكرة فإن مجموع

مقدارى الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل = ... ث.كجم.

(أ) $\frac{4}{3}$ و (ب) $\frac{5}{3}$ و (جـ) ٢ و (د) $\frac{1}{3}$ و

١٢ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى =

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى

---

١٣ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم³

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

---

١٤ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم

فإن مساحة قاعدته .... سم²

(أ) ٢٥ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠ π (د) ٤٠ π

---

١٥ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى حجم مخروط طول نصف قطر

قاعدته نق واتفاعه ع فإن : ....

(أ) ع = $\frac{5}{2}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق² (د) ع = ٤ نق

---

١٦ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه داخل

الهرم يساوى ....

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

---

١٧ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الأوجه يساوى ١٨ سم

فإن حجمه = ... سم³

(أ) ٩ $\sqrt{2}$ (ب) $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ (جـ) $\frac{27\sqrt{2}}{5}$ (د) ٩ $\sqrt{3}$

---

١٨ معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ هى ....

(أ) س² + ص² − ٢ س − ٤ ص = ١٦ (ب) س² + ص² + ٢ س + ٤ ص = ١١

(جـ) س² + ص² + ٢ س + ٤ ص − ١٦ = ٠ (د) س² + ص² − ٢ س − ٤ ص = ١١

١٩ الدائرتان $(\text{س} + ٢)^{٢} = ١ - \text{ص}^{٢}$ ، $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ٢\,\text{س} - ٨\,\text{ص} - ١٩ = ٠$

تكونان ....

(أ) متقاطعتين. (ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متباعدتين. (د) متماستين من الخارج.

---

٢٠ مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة :

$\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} - ١٦ = ٠$ هي .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤ (ب) ٣٦ (جـ) ٤٨ (د) ٧٢

---

٢١ طول القطعة المماسة للدائرة : $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = \text{نق}^{٢}$

من النقطة (٠ ، ٢ نق) = ... وحدة طول

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق (د) $\sqrt{٣}$ نق

الإجابـــات



إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الاستاتيكا

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)
2. ق = ٨ نيوتن / قياس زاوية ميل المحصلة على ق = ٣٠°
3. ق = ٨ نيوتن

الاختبار الثانى

1. ① (أ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)
2. ق = ٤ $\sqrt{2}$ نيوتن ، ح = ٤ نيوتن
3. ٥٠ ، ٥٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

الاختبار الثالث

1. ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ)
2. ح = ١٦ ، ١٥ ث.كجم ، هـ = ٣٠ ، ٩٩°
3. ٣٢ ، ١٠ ث.كجم ، ح = ٢ $\sqrt{301}$ ث.كجم

الاختبار الرابع

1. ① (جـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)
2. ١٠٠ $\sqrt{3}$ ث.جم ، ١٠٠ $\sqrt{3}$ ث.جم
3. أ = -١ ، ب = ١

الاختبار الخامس

1. ١٣٥° ، أثبت بنفسك.
2. ح = ٤ $\sqrt{2}$ نيوتن وتعمل فى إتجاه $\overrightarrow{أحـ}$

[illegible]

2. س = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ث.جم ، ص = $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ث.جم
3. ٦ $\sqrt{2}$ نيوتن ، ٦ $\sqrt{2}$ نيوتن.

إجابات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة والقياس

الاختبار الأول

1. ① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)
2. ① المستويان أ ب جـ د ، أ ب جـ هـ (يوجد إجابات أخرى)
   ② المستويان أ ب جـ د ، أ ب ب أ (يوجد إجابات أخرى)
   ③ المستقيمان $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ (يوجد إجابات أخرى)
   ④ $\overleftrightarrow{أب}$ ، المستوى أ ب جـ د (يوجد إجابات أخرى)
   ⑤ $\overleftrightarrow{أب}$

الاختبار الثانى

1. ① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)
2. ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم^2
   ② الحجم = $\frac{4000\sqrt{3}}{3}$ سم^3
3. المساحة الكلية = ٥٧٦ $\sqrt{3}$ سم^2

الاختبار الثالث

1. ① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

2. [illegible]
3. [illegible] سم

الاختبار الرابع

1. ① [illegible] ② (جـ) ③ [illegible] ④ (د)
2. [illegible]
3. ① المساحة الكلية = ٩٦ π سم^2
   ② الحجم = ٩٦ π سم^3

إجابات امتحان الكتاب المدرسى

1. ① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (ب)
2. (أ) أ = -١ ، ب = ١
   (ب) ١٠٠ $\sqrt{2}$ ث.جم ، ١٠٠ $\sqrt{2}$ ث.جم
3. (أ) س^2 + ص^2 - ٤ س + ٢ ص - ٤ = ٠
   (ب) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ث.جم
4. (أ) ٢٢,٩٥٩ سم
   (ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم
5. (أ) ح = $\sqrt{651}$ نيوتن ، هـ = ٩ ، ٤٠°
   (ب) ١٥ $\sqrt{2}$ ، ١٥ $\sqrt{2}$ نيوتن.

إجابات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

1. (ب)
2. (جـ)
3. [illegible]
4. (جـ)
5. (د)
6. بفرض $\overrightarrow{أب}$ فى اتجاه و س
   ∴ س = ٢ جتا ٠°
   + ٤ $\sqrt{3}$ جتا ٣٠°
   + ٨ جتا ٦٠°
   + ٢ $\sqrt{3}$ جتا ٩٠°
   + ٤ جتا ١٢٠°
   [illegible]

[illegible]

النموذج الثانى

١ (أ) ٢ (ب) ٣ (أ)

٤ (ب) ٥ (د)

٦
ح١ = ٢ ق حتا (ى/٢) = ١٢
∴ ق حتا (ى/٢) = ٦   (١)
، ح٢ = ٢ ق حتا ((١٨٠° − ى)/٢)
= ٦
∴ ق حا (ى/٢) = ٣   (٢)
بتربيع المعادلتين وجمعهما :
∴ ق² حتا² (ى/٢) + ق² حا² (ى/٢) = ٦² + ٣²
∴ ق² (حتا² (ى/٢) + حا² (ى/٢)) = ٤٥
∴ ق² = ٤٥
∴ ق = √٤٥ = ٣√٥ ث.كجم.

٧ (جـ) ٨ (أ) ٩ (د)

١٠ (جـ) ١١ (ب)

١٢
① فى Δ م ن هـ :
م ن = √((٢٥)² − (٢٠)²)
= ١٥ سم
∴ الارتفاع = ١٥ سم
② المساحة الجانبية
= ½ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى
= ½ × (٤ × ٤٠ × ٢٥) = ٢٠٠٠ سم²
③ المساحة الكلية = ٢٠٠٠ + (٤٠)² = ٣٦٠٠ سم²
④ الحجم = ⅓ × (٤٠)² × ١٥ = ٨٠٠٠ سم³

١٣ (د) ١٤ (جـ) ١٥ (جـ)

١٦
طول القوس أ ب
= م ب × θ°
= ٣٦ × (٢١٠/١٨٠) π
= ٤٢ π سم
∵ محيط قاعدة المخروط = ٤٢ π
∴ ٢ π نق = ٤٢ π
∴ نق = ٢١
∴ ع = √((٣٦)² − (٢١)²)
= ٣√٩٥ سم ≃ ٢٩,٢ سم

١٧ (أ) ١٨ (أ) ١٩ (ب)

٢٠ (أ) ٢١ (جـ) ٢٢ (ب)

٢٣ (أ) ٢٤ (أ)

النموذج الثالث

١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (ب)

٥
∵ (٦٠)² + (٨٠)² = (١٠٠)²
∴ Δ أ حـ ب قائم
الزاوية فى حـ
، باستخدام قاعدة لامى :
٢٠٠/حا ٩٠° = ش١/حا هـ١ = ش٢/حا هـ٢
، ∵ حا هـ١ = ب حـ/أ ب = ٨٠/١٠٠ = ٤/٥
، حا هـ٢ = حـ أ/ب أ = ٦٠/١٠٠ = ٣/٥

∴ ش١/(٤/٥) = ش٢/(٣/٥) = ٢٠٠/١
∴ ش١ = ٢٠٠ × ٤/٥ = ١٦٠ ث.جم
، ش٢ = ٢٠٠ × ٣/٥ = ١٢٠ ث.جم.

٦ (د) ٧ (جـ) ٨ (جـ)

٩ (ب)

١٠
نفرض أن :
و س هو اتجاه القوة الأولى
س = ٨ حتا صفر°
+ ٤√٣ حتا ٣٠°
+ ٦√٣ حتا ١٥٠°
+ ١٤ حتا ٢٤٠°
= ٨ × ١ + ٤√٣ × √٣/٢ + ٦√٣ × (−√٣/٢)
+ ١٤ × (−½) = −٢
ص = ٨ حا صفر + ٤√٣ حا ٣٠° + ٦√٣ حا ١٥٠°
+ ١٤ حا ٢٤٠° = ٨ × صفر + ٤√٣ × ½
+ ٦√٣ × ½ + ١٤ × (−√٣/٢) = −٢√٣
ح = −٢ س − ٢√٣ ص
ح = √((−٢)² + (−٢√٣)²) = ٤ نيوتن.
ظا هـ = −٢√٣/−٢ = √٣
، س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°
مقدار المحصلة = ٤ نيوتن وتصنع زاوية قياسها
٢٤٠° مع و س

١١ (أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ)

١٤ [illegible] ١٥ (ب)

١٦
∵ مركز الدائرة الأولى م١ (١ ، −٣)
، الدائرة الثانية :
س² + ص² − ٢ س + ٦ ص + ٢٤/٤ = ٠
∴ مركز الدائرة الثانية م٢ = (١ ، −٣)
∴ الدائرتان لهما نفس المركز.
∴ الدائرتان متحدتان المركز.
نق١ = √((١)² + (−٣)² − ١) = ٣ وحدة طول
نق٢ = √((١)² + (−٣)² − ٢٤/٤) = ٢,٥ وحدة طول

١٧ (ب) ١٨ (ب) ١٩ (د)

٢٠ (د) ٢١ (د) ٢٢ (جـ)

٢٣ (ب) ٢٤ (ب)

النموذج الرابع

١ (د) ٢ (ب) ٣ (جـ)

٤
من هندسة الشكل
حـ هـ = ٢√١٠ سم
∵ القوى متزنة.
∴ س = صفر
، ص = صفر
∴ ق حتا صفر + ٥ حتا هـ − ٦√١٠ حتا ى
+ ك حتا ٩٠° = صفر
∴ ق + ٥ × ٨/١٠ − ٦√١٠ × ٢/(٢√١٠) + ك × صفر
= صفر
∴ ق = ٢ نيوتن.

، ق حا صفر + ٥ حا هـ − ٦√١٠ حا ى + ك حا ٩٠°
= صفر
∴ صفر + ٥ × ٦/١٠ − ٦√١٠ × ٢/(٢√١٠) + ك × ١
= صفر
∴ ك = ١٥ نيوتن.

٥ (د) ٦ (د)

٧
طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٦ وحدات
، ارتفاعه = ٨ وحدات.
∴ حجم المخروط = ⅓ × π (٦)² × ٨
= ٩٦ π وحدة مكعبة.
، طول الراسم = √((٦)² + (٨)²) = ١٠ وحدات.
∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)
= π × ٦ (١٠ + ٦)
= ٩٦ π وحدة مربعة.

٨ (د) ٩ (ب) ١٠ (د)

١١ (أ) ١٢ (أ)

١٣
بفرض أن المركز (س ، ٠) ∋ محور السينات.
∴ المركز يقع على أبعاد متساوية من (١ ، ٣) ، (٢ ، −٤)
∴ √((س − ١)² + (٠ − ٣)²)
= √((س − ٢)² + (٠ − (−٤))²)
∴ √(س² − ٢ س + ١ + ٩) = √(س² − ٤ س + ٤ + ١٦)
∴ س² − ٢ س + ١٠ = س² − ٤ س + ٢٠
∴ ٢ س = ١٠   ∴ س = ٥
∴ المركز = (٥ ، ٠)
∴ نق = √((٥ − ١)² + (٠ − ٣)²) = ٥
∴ معادلة الدائرة هى (س − ٥)² + ص² = ٢٥

١٤ (أ) ١٥ (د) ١٦ (أ)

١٧ (جـ) ١٨ (جـ) ١٩ (ب)

٢٠ (جـ) ٢١ (جـ) ٢٢ (جـ)

٢٣ (د) ٢٤ (د)

النموذج الخامس

١ (د) ٢ (أ) ٣ (د)

٤ (ب) ٥ (جـ)

٦
∵ المساحة الكلية
= π نق (ل + نق)
∴ ٩٦ π = π × نق × (١٠ + نق)
∴ ٩٦ = نق × (١٠ + نق)
∴ نق² + ١٠ نق − ٩٦ = ٠
∴ نق = −١٦ (مرفوض) أ، نق = ٦ سم
∴ ع = √((١٠)² − (٦)²) = ٨ سم
∴ حجم المخروط = ⅓ π (٦)² × ٨   ٩٦ π سم³

٧
من الشكل :
Δ أ ب حـ يمثل مثلث القوى
أ ب = √((٢٠)² − (١٠)²)
= ١٠√٣
∴ ٢٠/(١٠√٣) = ق/١٠ = ش/٢٠
∴ ش = (٢٠ × ٢٠)/(١٠√٣) = ٢٠√٣ ثقل جم.
، ق = (٢٠ × ١٠)/(١٠√٣) = ١٠√٣ ثقل جم.

٨ (ب)

٩ (جـ)

١٠
اعتبر حـ ب ، حـ ء
هو المحوران و س ، و ص
∴ س = ٢ حتا صفر°
+ ٧√٥ حتا θ
+ ٤√٢ حتا ٤٥° + ٤ حتا ٩٠°
= ٢ + ٧√٥ × ١٠/(٥√٥) + ٤√٢ × ١/√٢
+ صفر = ٢ نيوتن.
، ص = ٢ حا صفر + ٧√٥ حا θ + ٤√٢ حا ٤٥°
+ ٤ حا ٩٠° = صفر + ٧√٥ × ٥/(٥√٥) + ٤√٢
× ١/√٢ + ٤ = ١٥ نيوتن.
∴ ح = √((٢)² + (١٥)²) = ٢٥ نيوتن.
، ظا هـ = ص/س = ١٥/٢٠ = ٣/٤
∴ θ = ٥٢َ ٣٦° مع القوى الأولى.

١١ (ب) ١٢ (د) ١٣ (ب)

١٤ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (د)

١٧ (د) ١٨ (د)

١٩ (جـ) ٢٠ (جـ) ٢١ (ب)

٢٢ (د) ٢٣ (ب) ٢٤ (د)

النموذج السادس

١ (جـ) ٢ (د) ٣ (د)

٤ (ب) ٥ (جـ)

٦ (جـ) ٧ (أ)

٨
∵ (أ ب)² = (ب حـ)² + (أ حـ)²
∴ ق (∠ أ حـ ب) = ٩٠°
∴ حـ ء = ½ أ ب = ٥٠ سم
∴ حـ ء = ء ب
∴ ق (∠ ب) = هـ١
، حـ ء = ء أ   ∴ ق (∠ أ) = هـ٢
∴ ش١/حا (٩٠° + هـ٢) = ش٢/حا (٩٠° + هـ١) = ١٥٠/حا ٩٠°
∴ ش١/حتا هـ٢ = ش٢/حتا هـ١ = ١٥٠/١
∴ ش١/(٣/٥) = ش٢/(٤/٥) = ١٥٠/١
∴ ش١ = ٩٠ ثقل جم ، ش٢ = ١٢٠ ثقل جم

٩ (د)

١٠
∵ حجم الهرم = ١٢٩٦
∴ ⅓ × (١٨)² × ع = ١٢٩٦
∴ ع = ١٢ سم
∴ الارتفاع الجانبى = √((١٢)² + (٩)²) = ١٥ سم
∴ المساحة الجانبية = ½ محيط القاعدة
× الارتفاع الجانبى = ½ × (٤ × ١٨) × ١٥
= ٥٤٠ سم²

١١ (أ) ١٢ (د) ١٣ (جـ)

١٤ (جـ) ١٥ (جـ)

١٦
الجسم الناشئ من
الدوران حول ب حـ
عبارة عن مخروطين
لهما نفس القاعدة ومتطابقان

∴ أ ء = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم

∴ حجم الجسم الناتج = ٢ ($\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع)

= ٢ × $\frac{١}{٣}$ × π × (٨)^٢ × ٦

= ٢٥٦ π سم^٣

١٧ (أ)	١٨ (جـ)	١٩ (جـ)	٢٠ (جـ)
٢١ (أ)	٢٢ (ب)	٢٣ (جـ)	٢٤ (جـ)

النموذج السابع

١ (جـ)	٢ (أ)	٣ (أ)	٤ (ب)
٥ (جـ)	٦ (ب)	٧ (أ)	

٨

∵ المساحة الجانبية = ٢٤٠

∴ $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة)

× الارتفاع الجانبي = ٢٤٠

وبفرض طول ضلع القاعدة = ل سم

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ ل × ١٢ = ٢٤٠

∴ ل = ١٠ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٥)^٢}$ = $\sqrt{١١٩}$ سم

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (١٠)^٢ × $\sqrt{١١٩}$

= $\frac{١٠٠}{٣}$ $\sqrt{١١٩}$ ≃ ٣٦٣٫٦ سم^٣

٩ (جـ)

١٠

∵ المستويان أملسان

∴ كلًّا من $ر_١$ ، $ر_٢$

عمودى على مستويهما

ويمران بمركز الكرة

وبتطبيق قاعدة لامى

∴ $\frac{ر_١}{جا ١٥٠°}$ = $\frac{ر_٢}{جا ٩٠°}$ = $\frac{٤٠٠}{جا ١٢٠°}$

∴ $ر_١$ = $\frac{٤٠٠ × جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°}$ = $\frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل كجم.

∴ $ر_٢$ = $\frac{٤٠٠ × جا ٩٠°}{جا ١٢٠°}$ = $\frac{٨٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ثقل كجم.

١١ (د)	١٢ (ب)

١٣

∵ Δ أ هـ ب قائم الزاوية فى ب

∴ أ هـ = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$

= ١٣ سم

∴ جا(د ب أ هـ) = $\frac{٥}{١٣}$

، جتا(د ب أ هـ) = $\frac{١٢}{١٣}$

، ∵ أ حـ قطر فى المربع أ ب حـ ء

∴ θ = ٤٥°

∴ س = ٢ جتا صفر° + ١٣ جتا (د ب أ هـ)

+ ٩ جتا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ٩ × صفر

+ ٤ $\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠

، ص = ٢ جا صفر° + ١٣ جا (د ب أ هـ)

+ ٩ جا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥°

= ٢ × صفر + ١٣ × $\frac{٥}{١٣}$ + ٩ × ١

+ ٤ $\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠

∴ $\overline{ح}$ = ١٠ $\overline{س}$ + ١٠ $\overline{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠)^٢}$ = ١٠ $\sqrt{٢}$ ثقل جم.

، ظا هـ = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١ ، ∵ س > ٠

∴ ص > ٠ ∴ هـ = ٤٥°

∴ $\overline{ح}$ يؤثر فى اتجاه $\overleftarrow{أ حـ}$

١٤ (جـ)	١٥ (ب)

١٦ (د)	١٧ (ب)	١٨ (ب)
١٩ (جـ)	٢٠ (جـ)	٢١ (جـ)
٢٢ (ب)	٢٣ (د)	٢٤ (جـ)

النموذج الثامن

١ (جـ)	٢ (د)	٣ (د)
٤ (ب)	٥ (د)	

٦

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٨ $\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ $\frac{٦}{٤}$ × س^٢ ظتا $\frac{π}{٦}$ = ٦ $\sqrt{٣}$

∴ س^٢ = ٤ ∴ س = ٢

∴ طول ضلع السداسى = ٢ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٧ (جـ)	٨ (أ)
٩ (د)	١٠ (د)

١١

س = ق جتا صفر

+ ٨٠ جتا ٦٠°

+ ك جتا ٩٠°

+ ٥٠ جتا ١٨٠°

+ ٨٠ $\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٨٠ × $\frac{١}{٢}$ + ك × صفر + ٥٠ × -١

+ ٨٠ $\sqrt{٣}$ × صفر = ق - ١٠

، ص = ق جا صفر + ٨٠ جا ٦٠° + ك جا ٩٠°

+ ٥٠ جا ١٨٠° + ٨٠ $\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٨٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ك × ١

+ ٥٠ × صفر + ٨٠ $\sqrt{٣}$ × -١ = ك - ٤٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\overline{ح}$ = (ق - ١٠) $\overline{س}$ + (ك - ٤٠ $\sqrt{٣}$) $\overline{ص}$ (١)

، ∵ ح = ٤٠ نيوتن فى اتجاه ٦٠° شمال شرق.

∴ $\overline{ح}$ = (٤٠ جتا ٦٠°) $\overline{س}$ + (٤٠ جا ٦٠°) $\overline{ص}$

= ٢٠ $\overline{س}$ + ٢٠ $\sqrt{٣}$ $\overline{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ق - ١٠ = ٢٠

∴ ق = ٣٠ نيوتن.

، ك - ٤٠ $\sqrt{٣}$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$

∴ ك = ٦٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٢ (د)	١٣ (أ)	١٤ (ب)
١٥ (ب)		

١٦

بالنسبة للدائرة $د_١$: $نق_١$ = $\sqrt{ك}$ ، $م_١$ = (-٢ ، -١١)

، بالنسبة للدائرة $د_٢$: $نق_٢$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ ، $م_٢$ = (٣ ، ١)

∴ المسافة بين المركزين $م_١$ $م_٢$

= $\sqrt{(٣ + ٢)^٢ + (١ + ١١)^٢}$

= ١٣ وحدة طول.

فى حالة أن الدائرتين متماستين من الخارج

∴ $م_١ م_٢$ = $نق_١$ + $نق_٢$ ∴ $\sqrt{ك}$ + ٤ = ١٣

∴ $\sqrt{ك}$ = ٩ ∴ ك = ٨١

، فى حالة أن الدائرتين متماستين من الداخل فإن :

$م_١ م_٢$ = | $نق_١$ - $نق_٢$ | ∴ | $\sqrt{ك}$ - ٤ | = ١٣

∴ $\sqrt{ك}$ - ٤ = ١٣

ومنها $\sqrt{ك}$ = ١٧ ومنها ك = ٢٨٩

أ، $\sqrt{ك}$ - ٤ = -١٣ ومنها $\sqrt{ك}$ = -٩ (مرفوض)

∴ قيم ك هى ٨١ أ، ٢٨٩

١٧ (د)	١٨ (د)	
١٩ (أ)	٢٠ (د)	٢١ (ب)
٢٢ (د)	٢٣ (ب)	٢٤ (ب)

النموذج التاسع

١ (جـ)	٢ (جـ)	٣ (ب)	٤ (د)
٥ (أ)	٦ (جـ)	٧ (د)	٨ (جـ)

٩

∵ أ حـ = ء أ = ٤ متر

∴ ق (د أ حـ ء) = ٤٥°

∴ حـ ء = ٤ $\sqrt{٢}$ متر

من Δ م حـ ن :

∴ م ن = ١ متر

، ق (د ن حـ م) = ٤٥° ، ق (د ن م حـ) = ٩٠°

∴ ن حـ = $\sqrt{٢}$ متر

∴ ء ن = ٤ $\sqrt{٢}$ - $\sqrt{٢}$ = ٣ $\sqrt{٢}$ متر

، من Δ أ م ن : أ ن = $\sqrt{١٠}$ متر

، ∵ Δ أ ن ء هو مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{\sqrt{١٠}}$ = $\frac{شـ}{٣\sqrt{٢}}$ = $\frac{٨}{٤}$

∴ ر = ٢ $\sqrt{١٠}$ ثقل كجم ، شـ = ٦ $\sqrt{٢}$ ثقل كجم.

١٠ (د)	١١ (ب)

١٢

∵ طول راسم المخروط

= ١٨ سم.

، ∵ محيط دائرة قاعدة

المخروط = طول القوس $\overset{\frown}{أ ب}$

= نق × هـ^{ء} = ١٨ × $\frac{٦٠° × π}{١٨٠°}$ = ٦ π

، ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

، ع = $\sqrt{ل^٢ - نق^٢}$ = $\sqrt{(١٨)^٢ - (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$

∴ حجم المخروط

= $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (٣)^٢ × ٣ $\sqrt{٣٥}$

≃ ١٦٧٫٢ سم^٣

١٣ (جـ)

١٤

س = ١٠ جتا صفر°

+ ٢٠ جتا ١٢٠°

+ ٣٠ جتا ٢٤٠°

= ١٠ + ٢٠ × $\frac{-١}{٢}$

+ ٣٠ × $\frac{-١}{٢}$ = -١٥

، ص = ١٠ جا صفر° + ٢٠ جا ١٢٠° + ٣٠ جا ٢٤٠°

= صفر + ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٣٠ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = -٥ $\sqrt{٣}$

∴ $\overline{ح}$ = -١٥ $\overline{س}$ - ٥ $\sqrt{٣}$ $\overline{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(-١٥)^٢ + (-٥\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-٥\sqrt{٣}}{-١٥}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ خط عمل المحصلة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

١٥ (ب)	١٦ (جـ)	١٧ (د)	١٨ (د)
١٩ (أ)	٢٠ (ب)	٢١ (جـ)	٢٢ (أ)
٢٣ (ب)	٢٤ (ب)		

النموذج العاشر

١ (د)	٢ (أ)	٣ (جـ)
٤ (أ)	٥ (أ)	

٦

الارتفاع الجانبى

= $\sqrt{(١٠\sqrt{٣})^٢ + (١٠)^٢}$

= ٢٠ سم.

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة)

× الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٠ = ٨٠٠ سم^٢

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (٢٠)^٢ × ١٠ $\sqrt{٣}$ = $\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم^٣

٧ (ب)	٨ (ب)	٩ (أ)
١٠ (جـ)	١١ (د)	

١٢

∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π (٢)^٢ × ١٢ = ١٦ π سم^٣

∴ حجم الماء المرتفع فى الإناء الأسطوانى = ١٦ π سم^٣

∴ ١٦ π = π نق^٢ × ١

∴ نق^٢ = ١٦ ∴ نق = ٤ سم

∴ طول قطر قاعدة الإناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

١٣ (ب)

١٤

س = ١٢ جتا صفر°

+ ٩ جتا ٩٠°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٧ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥°

+ ٧ جتا ٢٧٠°

= ١٢ + صفر - ٥ - ٧ + صفر = صفر

، ص = ١٢ جا صفر° + ٩ جا ٩٠° + ٥ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ ٧ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ٧ جا ٢٧٠°

= صفر + ٩ + ٥ - ٧ - ٧ = صفر

∴ $\overline{ح}$ = $\overline{صفر}$ ∴ المجموعة متزنة

١٥ (أ)	١٦ (أ)	١٧ (د)	١٨ (د)
١٩ (د)	٢٠ (أ)	٢١ (جـ)	٢٢ (جـ)
٢٣ (ب)	٢٤ (جـ)		

اجابات نماذج امتحانات بنظام اسئلة الاختيار من متعدد

النموذج الاول

١ (جـ)

٢ (ب)

الحل :

∵ المحصلة تنصف الزاوية بين خطى عمل القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

∴ $ق_١ = ق_٢$ ∴ ق = ٧ ث.كجم

٣ (جـ)

٤ (ب)

الحل :

$(٢ ق - ٥)^٢ + (ق + ٢)^٢ = (٣\sqrt{٥})^٢$

∴ $٤ ق^٢ - ٢٠ ق + ٢٥ + ق^٢ + ٤ ق + ٤ = ٤٥$

∴ $٥ ق^٢ - ١٦ ق - ١٦ = ٠$

∴ $(ق - ٤)(٥ ق + ٤) = ٠$

∴ ق = ٤ نيوتن أ ، ق = $\frac{-٤}{٥}$ (مرفوضة)

٥ (جـ)

٦ (أ)

الحل :

$٥ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص} + أ \overrightarrow{س} + ٦ \overrightarrow{ص} - ١٤ \overrightarrow{س}$

$+ ب \overrightarrow{ص} = (١٠\sqrt{٢} \text{ جتا } ١٣٥°) \overrightarrow{س}$

$+ (١٠\sqrt{٢} \text{ جا } ١٣٥° \overrightarrow{ص})$

∴ $(أ - ٩) \overrightarrow{س} + (ب + ٩) \overrightarrow{ص}$

$= -١٠ \overrightarrow{س} + ١٠ \overrightarrow{ص}$

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١ ، ب + ٩ = ١٠

∴ ب = ١ ∴ (أ ، ب) = (−١ ، ١)

٧ (د)

الحل :

$\overrightarrow{ق_١} = (٦٠ ، ٩٠°)$

، $\overrightarrow{ق_٢} = (٨٨ ، ٢١٠°)$

، $\overrightarrow{ق_٣} = (٦٠ ، ٣٣٠°)$

س = ٦٠ جتا ٩٠° + ٨٨ جتا ٢١٠°

+ ٦٠ جتا ٣٣٠° = $-١٤\sqrt{٣}$

، ص = ٦٠ جا ٩٠° + ٨٨ جا ٢١٠° + ٦٠ جا ٣٣٠°

= −١٤

∴ ح = $\sqrt{(-١٤\sqrt{٣})^٢ + (-١٤)^٢}$ = ٢٨ نيوتن

٨ (جـ)

٩ (أ)

الحل :

$\frac{ش_١}{جا هـ_١} = \frac{ش_٢}{جا هـ_٢} = \frac{٢٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{٨٠}{١٠٠}} = \frac{ش_٢}{\frac{٦٠}{١٠٠}} = \frac{٢٠٠}{١}$

∴ $ش_١ = \frac{٨٠}{١٠٠} \times ٢٠٠$

= ١٦٠ ث.جم

، $ش_٢ = \frac{٦٠}{١٠٠} \times ٢٠٠$ = ١٢٠ ث.جم

١٠ (جـ)

١١ (ب)

الحل :

من هندسة الشكل و

باستخدام قاعدة لامى نجد أن :

$\frac{ر_١}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_٢}{جا ١٢٠°}$

$= \frac{٢٤}{جا ٩٠°}$

∴ $ر_١$ = ٢٤ جا ١٥٠° = ١٢ نيوتن

، $ر_٢$ = ٢٤ جا ١٢٠° = $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن

١٢ (جـ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨) × ١٠ = ١٦٠ سم^٣

١٣ (ب)

الحل :

بقسمة المعادلة على ٤

∴ $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٢ ص - ٤ = ٠$

∴ ل = −٢ ، ك = ١ ، جـ = −٤

∴ نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ} = \sqrt{٤ + ١ + ٤}$ = ٣ وحدة طول

∴ طول قطر الدائرة = ٦ وحدة طول

١٤ (جـ)

١٥ (د)

الحل :

ل = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

١٦ (ب)

١٧ (د)

الحل :

$\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ × ٣ = ٤٩ π

∴ $نق^٢$ = ٤٩ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع = محيط الدائرة التى تمثل قاعدة المخروط = ٢ π نق = ٢ × π × ٧ = ١٤ π سم

١٨ (جـ)

١٩ (ب)

الحل :

$\frac{٢٢}{٧}$ نق × ٢٥ = ٥٥٠

∴ نق = ٧ سم

∴ ع = $\sqrt{٢٥^٢ - ٧^٢}$ = ٢٤ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ ع

= $\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ٢٤

= ١٢٣٢ سم^٣

٢٠ (جـ)

الحل :

بفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = س سم

، ارتفاع الهرم الجانبى = ل سم

المساحة الكلية للهرم = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

∴ ٧٠ = مساحة القاعدة + ٤٥

∴ مساحة القاعدة = ٢٥ سم^٢

∴ $س^٢$ = ٢٥ ∴ س = ٥ سم

، ∵ المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبى.

∴ ٤٥ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × ل

∴ ل = ٤٫٥ سم

∴ ع = $\sqrt{(٤٫٥)^٢ - (٢٫٥)^٢} = \sqrt{١٤}$ سم

٢١ (د)

الحل :

$س^٢ - ت^٢ ص^٢ - ٤٩ = ٠$

∴ $س^٢ + ص^٢ = ٤٩$ ∴ نق = ٧ وحدة طول

النموذج الثانى

١ (جـ)

٢ (أ)

الحل :

طول ضلع قاعدة الهرم = $\sqrt{١٠٠}$

= ١٠ سم

الإرتفاع الجانبى = $\sqrt{١٢^٢ + ٥^٢}$

= ١٣ سم

∴ المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ (١٠ × ٤) × ١٣

= ٢٦٠ سم^٢

٣ (د)

الحل :

$\overrightarrow{ح} = ٢ \overrightarrow{س} + ٤ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص} = ٦ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص}$

∴ $\| \overrightarrow{ح} \| = \sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ١٠ وحدة قوة

٤ (أ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٤}$ × ٦ × $٨^٢$ × ظتا $\frac{π}{٦}$) × ١٠

= $٣٢٠\sqrt{٣}$ سم^٣

٥ (جـ)

الحل :

ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ١٦ = ٢ ق جتا ٤٥°

∴ ق = $٨\sqrt{٢}$ نيوتن

∴ القيمة العظمى للمحصلة = $٨\sqrt{٢} + ٨\sqrt{٢}$

= $١٦\sqrt{٢}$ نيوتن

٦ (ب)

الحل :

عندما : ى = ٠° ∴ ح = ٦ + ٢ = ٨ نيوتن

، عندما : ى = ١٨٠° ∴ ح = ٦ − ٢ = ٤ نيوتن

، ∵ ى ∈ [٠ ، ١٨٠°] ∴ ح ∈ [٤ ، ٨]

٧ (ب)

الحل :

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك|

، ∵ ل = ٣ ، ك = −٤

∴ نق = |−٤| = ٤ وحدة طول

∴ جـ = $ل^٢ + ك^٢ - نق^٢$ = ٩ + ١٦ − ١٦ = ٩

٨ (جـ)

الحل :

$\frac{ر}{جا ٩٠°} = \frac{ق}{جا ١٥٠°}$

$= \frac{١٨}{جا ١٢٠°}$

∴ ر = $\frac{١٨ \text{ جا } ٩٠°}{جا ١٢٠°} = ١٢\sqrt{٣}$ وحدة قوة

، ق = $\frac{١٨ \text{ جا } ١٥٠°}{جا ١٢٠°} = ٦\sqrt{٣}$ وحدة قوة

∴ ق + ر = $١٢\sqrt{٣} + ٦\sqrt{٣} = ١٨\sqrt{٣}$ وحدة قوة

٩ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٩}$

= ٣ وحدة طول

، أب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ وحدة طول

١٠ (ب)

١١ (جـ)

١٢ (د)

الحل :

س = $٦\sqrt{٢}$ جتا ٠° + $٦\sqrt{٢}$ جتا ٩٠° + ١٢ جتا ١٣٥° = ٠

، ص = $٦\sqrt{٢}$ جا ٠° + $٦\sqrt{٢}$ جا ٩٠° + ١٢ جا ١٣٥°

= $١٢\sqrt{٢}$ وحدة قوة

∴ $\overrightarrow{ح} = ١٢\sqrt{٢} \overrightarrow{ص}$

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه الشمال

١٣ (أ)

الحل :

مقدار المركبة فى اتجاه $\overrightarrow{أجـ}$

= ١٠ جتا ٣٠° = $٥\sqrt{٣}$ نيوتن

، مقدار المركبة فى اتجاه $\overrightarrow{أو}$

= ١٠ جا ٣٠° = ٥ نيوتن

١٤ (ب)

الحل :

بفرض أن : $ق_١$ = ٤ ك ، $ق_٢$ = ٣ ك

، ح = $\sqrt{١٣}$ ك من وحدات القوة

، ∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا ى

∴ ١٣ $ك^٢$ = ١٦ $ك^٢$ + ٩ $ك^٢$ + ٢

× ٤ ك × ٣ ك × جتا ى

∴ −١٢ = ٢٤ جتا ى ∴ جتا ى = $\frac{-١}{٢}$

∴ ى = ١٢٠°

١٥ (جـ)

الحل :

بقسمة المعادلة على ٢

∴ $س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٨ ص = ٠$

∴ ل = −٣ ، ك = ٤

∴ م (مركز الدائرة) = (−٣ ، ٤)

١٦ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

م ب = ٢ + ٣ = ٥ سم

، ∵ م أ = ٣ سم ∴ أ ب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

، Δ م ب أ مثلث القوى ∴ $\frac{ش}{٥} = \frac{ر}{٣} = \frac{٤٠}{٤}$

∴ ش = ٥٠ نيوتن ، ر = ٣٠ نيوتن

∴ ش + ر = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ نيوتن

١٧ (أ)

الحل :

محصلة القوتين = $\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_١} - \overrightarrow{ق_٢} = ٢ \overrightarrow{ق_١}$

∴ قياس الزاوية بين $\overrightarrow{ق_١}$ ، ٢ $\overrightarrow{ق_١}$ تساوى صفر°

١٨ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$ = ٣ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٩ × ٤ = ١٢ π سم^٣

١٩ (جـ)

٢٠ (أ)

الحل :

مركز الدائرة م = (٠ ، ٠) ، ∵ م منتصف $\overline{أب}$

ويفرض أن ب (س ، ص)

∴ $\frac{س - ٢}{٢} = ٠$ ومنها س = ٢

، $\frac{ص + ٥}{٢} = ٠$ ومنها ص = −٥

∴ ب (٢ ، −٥)

٢١ (جـ)

النموذج الثالث

١ (أ)

٢ (د)

الحل :

∵ ع = ٣ سم ، ل = ٥ سم

∴ نق = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

= π × ٤ (٥ + ٤)

= ٣٦ π سم^٢

٣ (ب)

الحل :

جـ = ٤ + ١ − ٩ = −٤

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٢ ص - ٤ = ٠$

[٤] (ب)

الحل :

$\overrightarrow{ق_٣} = -(\overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}) = -(-١٠ ، -٢٠) = (١٠ ، ٣٠)$

[٥] (جـ)

الحل :

$ظا\,\theta = \frac{ق_٢ \,جا\, \alpha}{ق_١ + ق_٢ \,جتا\, \alpha}$ = ...

∴ θ = ٩٠°

∴ المحصلة عمودية على القوة الأولى.

[٦] (أ)

الحل :

$\frac{ق}{جا ١٣٥°} = \frac{ك}{جا ١٣٥°} = \frac{٤\sqrt{٢}}{جا ٩٠°}$

∴ $ق = ك = \frac{٤\sqrt{٢} \times جا ١٣٥°}{جا ٩٠°} = ٤$ نيوتن

[٧] (أ)

[٨] (د)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ٤ = ٤٨

∴ مساحة القاعدة = ٣٦ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

Δ م ح ك فيه : م ك = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

، المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ × ٥

= ٦٠ سم²

[٩] (د)

الحل :

نق = $\sqrt{١٧^٢ - ١٥^٢}$ = ٨ سم

[١٠] (ب)

[١١] (د)

الحل :

$|\overrightarrow{أ}| = \sqrt{٢^٢ + ٢^٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة طول

، ظا θ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ∴ θ = ٤٥°

∴ $\overrightarrow{أ} = (٢\sqrt{٢} ، ٤٥°)$

[١٢] (د)

الحل :

$ح = \sqrt{(٨\sqrt{٢})^٢ + ٨^٢ + ٢ \times ٨\sqrt{٢} \times ٨ \times جتا ١٣٥°}$

= ٨ نيوتن

[١٣] (ب)

[١٤] (ب)

الحل :

أ جـ = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$ = ١٠ سم

، ب ء = $\sqrt{٢^٢ + ٦^٢} = ٢\sqrt{١٠}$ سم

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ح س = ٠

∴ ... − ٦$\sqrt{١٠}$ ... + ك جتا ٩٠° = ٠

∴ ٣ + ٥ × ٠ − ٦$\sqrt{١٠}$ × $\frac{٣}{\sqrt{١٠}}$ + ك = ٠

∴ ٣ − ١٨ + ك = ٠ ∴ ك = ١٥

[١٥] (د)

الحل :

س حـ = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

Δ أ حـ ب مثلث القوى

∴ $\frac{ق_١}{٣} = \frac{ق_٢}{٤} = \frac{ق_٣}{٥}$

∴ ق₁ : ق₂ : ق₃ = ٣ : ٤ : ٥

[١٦] (ب)

[١٧] (د)

[١٨] (د)

الحل :

∵ ل = ٣٠ ، ... = ٦ ، ... = ٥

∴ نق = $\sqrt{(-٣)^٢ + ...}$ = ... = ٢$\sqrt{١٠}$ وحدة

∴ ... = ١٠$\sqrt{٢}$ سم

∴ مساحة سطح المجسم المنتظم

= ٥ × ($\frac{١}{٢}$ × ٢$\sqrt{١٠}$) × ...

= ٣٣٧٨ سم²

[١٩] (ب)

الحل :

$\frac{ق}{جا(١٨٠° - هـ)} = \frac{ك}{جا(٩٠° - هـ)}$

= $\frac{٨}{جا(٩٠° + هـ)}$

∴ $\frac{ق}{جا هـ} = \frac{ك}{١} = \frac{٨}{جتا هـ}$

∴ $\frac{ق}{٠٫٦} = \frac{ك}{١} = \frac{٨}{٠٫٨}$

∴ ق = $\frac{٨ \times ٠٫٦}{٠٫٨}$ = ٦ ث جم

∴ ق = ٦ × ٩٨٠ = ٥٨٨٠ داين

[٢٠] (د)

الحل :

مركز الدائرة م = (٣ ، −٣)

∴ نق = ... = ٥ وحدة طول

∴ م ب = $\sqrt{(٣ + ٩)^٢ + (-٣ - ٢)^٢}$

= ١٣ وحدة طول

∴ أ ب = $\sqrt{١٣^٢ - ٥^٢}$ = ١٢ وحدة طول

[٢١] (ب)

الحل :

ح س = ٨ جتا ٠° + ٤$\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° + ٥ جتا ٦٠°

= ...

ح ص = ٨ جا ٠° + ٤$\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° + ٥ جا ٦٠°

= ...

∴ ح = ... نيوتن

النموذج الرابع

[١] (د)

الحل :

$\overrightarrow{ح} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص} + \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

$= ٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$

∴ $|\overrightarrow{ح}| = \sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ نيوتن

[٢] (ب)

[٣] (د)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ ١٢ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٩ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = ٣ سم

[٤] (د)

الحل :

ق = $\frac{١٢ \,جا\, ٣٠°}{جا(٤٥° + ٣٠°)}$ = ٦ قتا ٧٥°

[٥] (أ)

[٦] (أ)

الحل :

ل = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$ = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم²

[٧] (جـ)

الحل :

س = ١٠$\sqrt{٢}$ جتا ١٢٠° + ١٠ جتا ٤٥° + ...

+ ١٠ جتا ٢١٥° = ١٠

، ص = ١٠$\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ١٠ جا ١٢٠° + ١٠ جا ٢٤٠°

+ ١٠$\sqrt{٢}$ جا ٢١٥° = ٠

∴ $\overrightarrow{ح} = ١٠\overrightarrow{س}$

∴ مقدار المحصلة = ١٠ نيوتن

[٨] (د)

[٩] (جـ)

الحل :

نق = ٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ١٠ π سم

[١٠] (جـ)

الحل :

$٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + أ\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ ...

$- ١٤\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ...

= ($١٠\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°) $\overrightarrow{س}$ + ($١٠\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°) $\overrightarrow{ص}$

∴ $(أ - ٩)\overrightarrow{س} + (ب + ٩)\overrightarrow{ص}$

$= -١٠\overrightarrow{س} + ١٠\overrightarrow{ص}$

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

∴ أ + ب = −١ + ١ = ٠

[١١] (د)

الحل :

طول حرف الهرم = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣ سم

المساحة الكلية للهرم المنتظم الوجوه

= مساحة الوجه الواحد × ٤

= ($\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٣ × جا ٦٠°) × ٤ = ٩$\sqrt{٣}$ سم²

[١٢] (أ)

الحل :

باستخدام قاعدة لامي :

$\frac{و}{جا ٩٠°} = \frac{\frac{١}{٢} و}{جا(١٨٠° - هـ)}$ ∴ $\frac{١}{١} = \frac{\frac{١}{٢}}{جا هـ}$

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

[١٣] (د)

الحل :

س = ١٥ جتا ٠° − ٥$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° − ٥$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ١٥ جتا ١٢٠° = ٠

، ص = ١٥ جا ٠° − ٥$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° − ٥$\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

+ ١٥ جا ١٢٠° = ٠

∴ ح = صفر نيوتن

[١٤] (ب)

[١٥] (أ)

الحل :

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

∴ ٩٦ π = π نق (١٠ + نق)

∴ نق² + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ (نق − ٦) (نق + ١٦) = ٠

∴ نق = ٦ سم أو نق = −١٦ (مرفوضة)

[١٦] (ب)

[١٧] (ب)

الحل :

$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٨$\sqrt{٣}$

∴ $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ × ٦ × س² × جا $\frac{\pi}{٣}$) × ٤ = ٨$\sqrt{٣}$

∴ س² = ٤ ∴ س = ٢

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

[١٨] (جـ)

الحل :

مقدار المركبة

في اتجاه الشرق

ق = ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

= $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٣}$ نيوتن

[١٩] (أ)

الحل :

نق = ٤ وحدة طول ، م = (−٤ ، ٤)

∴ جـ = ١٦ + ١٦ − ١٦ = ١٦

∴ معادلة الدائرة هي

س² + ص² + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

[٢٠] (ب)

[٢١] (جـ)

النموذج الخامس

[١] (ب)

[٢] (ب)

الحل :

∴ ح = $\sqrt{(ق\sqrt{٣})^٢ - ق^٢}$

= $\sqrt{٢}$ ق وحدة قوة

[٣] (د)

الحل :

س ص = $\sqrt{(٦٠)^٢ + (٤٥)^٢}$

= ٧٥ سم

وبتطبيق قاعدة لامي

$\frac{ش_١}{جا ...} = \frac{ش_٢}{جا ...} = \frac{١٥٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{٣}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٤}{٥}} = ١٥٠$

∴ ش₁ = ١٥٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٩٠ ث جم

، ش₂ = ١٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٢٠ ث جم

∴ ش₂ − ش₁ = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠ ث جم

[٤] (د)

الحل :

أ ب = $\sqrt{٣٠^٢ - ٢٤^٢}$ = ١٨ سم

Δ أ ب حـ مثلث القوى

∴ $\frac{٩٠}{١٨} = \frac{ش}{٣٠} = \frac{و}{٢٤}$

∴ ش = $\frac{٣٠ \times ٩٠}{١٨}$ = ١٥٠ ث جم

، و = $\frac{٢٤ \times ٩٠}{١٨}$ = ١٢٠ ث جم

∴ ش − و = ١٥٠ − ١٢٠ = ٣٠ ث جم

٥ (أ)

الحل :

∵ Δ هـ م ب ∽ Δ ...

ق (∠ هـ م ب) = ٩٠°

∴ ب هـ = $\sqrt{٣٠^2 + ٤٠^2}$ = ٥٠ سم

∴ س_ = ٢٥ جتا ٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

+ ش جتا ٩٠° + ٢٥ جتا (٩٠° + هـ)

= ٢٥ + ١٠ + ٠ − ٢٥ جا هـ

= ٣٥ − ٢٥ × $\frac{٣}{٥}$ = ٢٠

، ص_ = ٢٥ جا ٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ش جا ٩٠° + ٢٥ جا (٩٠ + هـ)

= ٠ + ١٠ + ش + ٢٥ جتا هـ

= ١٠ + ش + ٢٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ٣٠ + ش

∴ $\sqrt{(٢٠)^2 + (٣٠ + ش)^2}$ = ٥٠

∴ $(٣٠ + ش)^2$ = ٢١٠٠

∴ ٣٠ + ش = ٤٠ ومنها ش = ١٠ ث.جم

أو ٣٠ + ش = −٤٠ ∴ ش = −٧٠ (مرفوض)

٦ (د)

٧ (جـ)

الحل :

بتطبيق قاعدة لامي :

∴ $\frac{ش}{جا ١٥٠°} = \frac{١٠٠}{جا ١٢٠°}$

∴ ش = $\frac{١٠٠ × جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°} = \frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ نيوتن

٨ (ب)

الحل :

$\frac{ح_١}{ح_٢} = \frac{\sqrt{ق^2 + ٢ق^2}}{\sqrt{ق^2 + ٢ق^2 + ٢ × ق × \sqrt{٢} ق × جتا ١٥٠°}}$

$= \frac{\sqrt{٣ ق^2}}{\sqrt{٣ق^2 - ٢ق^2}} = \frac{\sqrt{٣} ق}{ق} = \sqrt{٣}$

∴ ح_١ = $\sqrt{٣}$ ح_٢

٩ (د)

الحل :

ح = ٢ ص

، س_ = ش جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠°

+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ك جتا ٢٧٠°

= ش + ٠ − ٤ − ٥ + ٠ = ش − ٩

، ص_ = ش جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ك جا ٢٧٠°

= ٠ + ٦ + ٤ − ٥ − ك = ٥ − ك

∴ ح = (ش − ٩) س + (٥ − ك) ص

∴ ش − ٩ = ٠ ومنها ش = ٩ نيوتن

، ٥ − ك = ٢ ومنها

ك = ٣ نيوتن

∴ ش − ك = ٩ − ٣ = ٦ نيوتن

١٠ (جـ)

الحل :

$(٢ش - ٥)^2 + (ش + ٢)^2 = (٢\sqrt{٥})^2$

∴ ٤ ش² − ٢٠ ش + ٢٥ + ش² + ٤ ش + ٤ − ٢٠ = ٠

∴ ٥ ش² − ١٦ ش − ١٦ = ٠

∴ (ش − ٤) (٥ ش + ٤) = ٠

∴ ش = ٤ نيوتن أو ش = $\frac{-٤}{٥}$ (مرفوضة)

١١ (جـ)

الحل :

من هندسة الشكل

وبتطبيق قاعدة لامي

∴ $\frac{ش_١}{جا (١٨٠° - هـ)}$

$= \frac{ش_٢}{جا ٩٠°} = \frac{و}{جا (٩٠° + هـ)}$

∴ $\frac{ش_١}{جا هـ} = \frac{ش_٢}{١} = \frac{و}{جتا هـ}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{١} = \frac{و}{\frac{٣}{٥}}$

∴ ش_١ = $\frac{\frac{٤}{٥} و}{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٤}{٣}$ و

، ش_٢ = $\frac{و}{\frac{٣}{٥}}$ = $\frac{٥}{٣}$ و

∴ ش_١ + ش_٢ = $\frac{٤}{٣}$ و + $\frac{٥}{٣}$ و = ٣ و ث.كجم

١٢ (أ)

١٣ (د)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{٣٦}{٤}$ = ٩ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × ٩² × ١٠ = ٢٧٠ سم³

١٤ (ب)

الحل :

نق = $\sqrt{٢٦^2 - ٢٤^2}$ = ١٠ سم

∴ مساحة القاعدة = π نق²

= π × ١٠²

= ١٠٠ π سم²

١٥ (ب)

الحل :

حجم نصف الكرة = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٤}{٣}$ π نق³

= $\frac{٢}{٣}$ π نق³ وحدة حجم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

∴ $\frac{١}{٣}$ π نق² ع = $\frac{٢}{٣}$ π نق³

∴ ع = ٢ نق

١٦ (أ)

الحل :

نق = $\frac{١}{٣}\sqrt{ل^2 - (\frac{١}{٢} ل)^2}$

= $\frac{\sqrt{٣}}{٦}$ ل

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثي المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه داخل الهرم}}$

= $\frac{\frac{١}{٣} × \frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^2 × ع}{\frac{١}{٣} × π × نق^2 × ع} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^2}{π × (\frac{\sqrt{٣}}{٦} ل)^2} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٤} ل^2}{π × \frac{١}{١٢} ل^2}$

= $\frac{٣\sqrt{٣}}{π}$

١٧ (ب)

الحل :

طول الحرف = $\frac{١٨}{٦}$ = ٣ سم

حجم الهرم الثلاثي المنتظم الرباعي الأوجه

= $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ ل³ = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢}$ × ٢٧ = $\frac{٩\sqrt{٢}}{٤}$ سم³

١٨ (د)

الحل :

نق = $\frac{|٣ × ١ + ٤ × ٢ + ٩|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٢٠}{٥}$ = ٤ وحدة طول

، ل = −١ ، ك = −٢ ∴ جـ = ١ + ٤ − ١٦ = −١١

معادلة الدائرة هي :

س² + ص² − ٢ س − ٤ ص − ١١ = ٠

١٩ (ب)

الحل :

د_١ : (س + ٢)² + ص² = ١

∴ م_١ = (−٢ ، ٠) ، نق_١ = ١ وحدة طول

د_٢ : س² + ص² − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠

∴ م_٢ = (١ ، ٤) ، جـ = −١٩

∴ نق_٢ = $\sqrt{١ + ١٦ + ١٩}$ = ٦ وحدة طول

، ∵ م_١ م_٢ = $\sqrt{(-٢ - ١)^2 + (٠ - ٤)^2}$ = ٥ وحدة

∴ م_١ م_٢ = نق_٢ − نق_١

∴ الدائرتان متماستان من الداخل

٢٠ (جـ)

الحل :

معادلة الدائرة هي : س² + ص² = ١٦

∴ نق = $\sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

∴ مساحة سطح المضلع = $\frac{١٢}{٢}$ × ٤² × جا $(\frac{٣٦٠°}{١٢})$

= ٤٨ وحدة مربعة

٢١ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

أ ب = $\sqrt{٤ نق^2 - نق^2}$

= $\sqrt{٣}$ نق وحدة طول

تطبيقات
الرياضيات

الجزء الخاص بالإجابات

موقع التفوق
altFwok.com

2022
المعاصر
إعداد نخبة من خبراء التعليم

الصف الثانى الثانوى
القسم العلمى
الفصل الدراسى الأول

إجابات تمارين

الاستاتيكا

إجابات تمرين تراكمى على المتجهات

١

① (جـ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)	⑤ (جـ)
⑥ (ب)	⑦ (د)	⑧ (د)	⑨ (جـ)	⑩ (جـ)
⑪ (أ)	⑫ (جـ)	⑬ (د)	⑭ (ب)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (أ)	⑱ (أ)		

٢

$\overrightarrow{\text{١٨ ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{٤٥ ى}}$ ، $\overrightarrow{\text{−٥٠ ى}}$

٣

$\overrightarrow{\text{أحـ}}$ ، ٢ $\overrightarrow{\text{ءم}}$ (أو $\overrightarrow{\text{ءب}}$) ، $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{م ب}}$

إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين 1

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (د)	② (جـ)	③ (د)	④ (جـ)	⑤ (جـ)
⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)	⑨ (ب)	⑩ (جـ)
⑪ (ب)	⑫ (ب)	⑬ (أ)	⑭ (أ)	⑮ (جـ)
⑯ (د)	⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (د)	⑳ (د)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (جـ)	㉔ (جـ)	㉕ (جـ)
㉖ (د)	㉗ (ب)	㉘ (أ)	㉙ (جـ)	㉚ (د)
㉛ (جـ)	㉜ (أ)	㉝ (أ)	㉞ (ب)	㉟ (جـ)
㊱ (ب)	㊲ (ب)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (د)
㊶ (د)	㊷ (جـ)	㊸ (أ)	㊹ (أ)	㊺ (ب)
㊻ (جـ)	㊼ (د)	㊽ (د)	㊾ (ب)	㊿ (جـ)
٥١ (جـ)				

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

ع = $\sqrt{(٨)^٢ + (١٥)^٢}$ = ١٧ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{١٥}{٨}$ ∴ هـ ≃ ٦١° ٥٥َ ٣٩ً

٢

بفرض أن : $ق_١ > ق_٢$

∴ $ق_١ + ق_٢ = ١٧$ ، $ق_١ - ق_٢ = ٧$

وبالجمع : ∴ $٢ ق_١ = ٢٤$

∴ $ق_١ = ١٢$ ث.كجم ، $ق_٢ = ٥$ ث.كجم

٣

ى = ٣٠° × ٢ = ٦٠° ∴ ٤ $\sqrt{٣}$ = ٢ ق جتا ٣٠°

∴ ق = ٤ ث.كجم

٤

بفرض مقداري القوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ نيوتن

∴ $(٥٠)^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢$ ∴ $ق_١^٢ + ق_٢^٢ = ٢٥٠٠$ (١)

، ∵ ظا هـ = $\frac{ق_٢}{ق_١}$ ∴ $\frac{ق_٢}{ق_١}$ = ظا ٣٠°

∴ $\frac{ق_٢}{ق_١} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ $ق_١ = \sqrt{٣}\, ق_٢$ (٢)

∴ $ق_١^٢ = ٣ ق_٢^٢$ (٣)

وبالتعويض من (٣) في (١)

∴ $٣ ق_٢^٢ + ق_٢^٢ = ٢٥٠٠$ ∴ $٤ ق_٢^٢ = ٢٥٠٠$

∴ $ق_٢^٢ = \frac{٢٥٠٠}{٤} = ٦٢٥$

∴ $ق_٢$ = ٢٥ نيوتن وبالتعويض في (٢)

∴ $ق_١ = ٢٥\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ مقدارا القوتين $٢٥\sqrt{٣}$ ، ٢٥ نيوتن

٥

$(٣٦)^٢ = (٣٠)^٢ + (١٦)^٢ + ٢ × ٣٠ × ١٦ ×$ جتا ى

∴ جتا ى = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

٦

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ ٨ + ١٦ جتا ى = صفر

∴ جتا ى = $\frac{-٨}{١٦} = -\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

٧

$(٣\sqrt{٧})^٢ = (٩)^٢ + (٦)^٢ + ٢ × ٩ × ٦$ جتا ى

∴ جتا ى = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

، ظا هـ = $\frac{\text{٦ جا ١٢٠°}}{\text{٩ + ٦ جتا ١٢٠°}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ ≃ ٤٠° ٥٣َ ٣٦ً

٨

$ح = \sqrt{(١٥)^{٢} + (١٨)^{٢} + ٢ \times ١٥ \times ١٨ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$= ٣\sqrt{٢١}$ ث.كجم

، $\text{طا هـ} = \frac{١٨ \text{ جا } ١٢٠°}{١٥ + ١٨ \text{ جتا } ١٢٠°}$

$= \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

∴ هـ ≃ ٦٨° ٥٦َ ٥٤ً

شمال — غرب — شرق — جنوب — ١٨ ث.كجم — ١٥ ث.كجم — ٣٠°

٩

ى = ١٢٠° ، هـ = ٣٠°

$\text{طا } ٣٠° = \frac{ق \text{ جا } ١٢٠°}{١٢ + ق \text{ جتا } ١٢٠°}$

$∴ \frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{ق \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{١٢ + ق \times \frac{-١}{٢}}$

∴ $\frac{٣}{٢}$ ق = ١٢ − $\frac{١}{٢}$ ق ∴ ق = ٦ ث.كجم

، $ح = \sqrt{١٢^{٢} + ٦^{٢} + ٢ \times ١٢ \times ٦ \times \text{جتا } ١٢٠°}$

∴ ح = ٦$\sqrt{٣}$ ث.كجم

شمال — غرب — شرق — جنوب — (١٢) — (ق) — (ح) — ٦٠° — ٣٠°

حل آخر :

∵ المحصلة عمودية على القوة الثانية

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{-ق}{١٢}$ ∴ ق = ٦ ث.كجم

∴ $ح = \sqrt{(١٢)^{٢} - (٦)^{٢}} = ٦\sqrt{٣}$ ث.كجم

١٠

بفرض أن $ق_١$ هي القوة الصغرى

، $ق_٢$ الكبرى

، ∵ المحصلة عمودية على $ق_١$

∴ $ق_١$ + ٣٠ جتا ى = ٠

∴ $ق_١ = ٣٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٥\sqrt{٣}$ ث.كجم

، $ح = \sqrt{(١٥\sqrt{٣})^{٢} + (٣٠)^{٢} + ٢ \times ١٥\sqrt{٣} \times ٣٠ \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢}}$

= ١٥ ث.كجم

١١

① $ح = \sqrt{(٥\sqrt{٢})^{٢} + (٥)^{٢} + ٢ \times ٥\sqrt{٢} \times ٥ \text{ جتا } ٤٥°}$

∴ ح = ٥$\sqrt{٥}$ نيوتن

، $\text{طا هـ} = \frac{٥ \text{ جا } ٤٥°}{٥\sqrt{٢} + ٥ \text{ جتا } ٤٥°} = \frac{١}{٣}$

هـ ≃ ١٨° ٢٦َ ٦ً مع القوة الأولى

② $ح = \sqrt{٣^{٢} + (٣\sqrt{٢})^{٢} + ٢ \times ٣ \times ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°}$

∴ ح = ٣$\sqrt{٥}$ نيوتن

، $\text{طا هـ} = \frac{٣\sqrt{٢} \text{ جا } ٤٥°}{٣ + ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°} = \frac{١}{٢}$

هـ ≃ ٢٦° ٣٣َ ٥٤ً مع القوة الأولى

③ $ح = \sqrt{(١٥٠)^{٢} + (١٥٠)^{٢} + ٢ \times ١٥٠ \times ١٥٠ \text{ جتا } ١٢٠°}$

∴ ح = ١٥٠ نيوتن

حل آخر :

ح = ٢ × ١٥٠ × جتا ٦٠° = ١٥٠ نيوتن

، المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

١٢

$(٤\sqrt{٣})^{٢} = ق^{٢} + (٤)^{٢} + ٢ \times ق \times ٤ \text{ جتا } ١٢٠°$

∴ $ق^{٢}$ − ٤ق − ٣٢ = ٠

∴ (ق + ٤) (ق − ٨) = ٠ ∴ ق = ٨ نيوتن

، $\text{طا هـ} = \frac{٤ \text{ جا } ١٢٠°}{٨ + ٤ \text{ جتا } ١٢٠°} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٣٠°

١٣

∵ المحصلة عمودية على القوة الأولى

∴ $\sqrt{٣}$ ق + ٢ ق جتا ى = صفر

∴ جتا ى = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ ى = ١٥٠°

، عند ق = ١٥

∴ $ح = \sqrt{(١٥\sqrt{٣})^{٢} + (٣٠)^{٢} + ٢ \times ١٥\sqrt{٣} \times ٣٠ \text{ جتا } ١٥٠°}$

= ١٥ نيوتن

١٤

∵ المحصلة عمودية على القوة الثانية

∴ $ح^{٢} = ق_١^{٢} - ق_٢^{٢}$ ∴ ٢ = ٨ − $ق_٢^{٢}$

∴ $ق_٢^{٢}$ = ٦ ∴ $ق_٢ = \sqrt{٦}$ نيوتن

∵ $ق_٢ + ق_١$ جتا ى = ٠ ∴ $\sqrt{٦} + ٢\sqrt{٢}$ جتا ى = ٠

∴ جتا ى = $\frac{-\sqrt{٦}}{٢\sqrt{٢}} = -\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ ى = ١٥٠°

١٥

∵ $\text{طا } ٣٠° = \frac{ق \text{ جا } ١٢٠°}{١٦ + ق \text{ جتا } ١٢٠°}$ ∴ $\frac{١}{\sqrt{٣}} = \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} ق}{١٦ - \frac{١}{٢} ق}$

∴ ١٦ − $\frac{١}{٢}$ ق = $\frac{٣}{٢}$ ق ∴ ٢ ق = ١٦

∴ ق = ٨ ث.كجم

، $ح = \sqrt{(١٦)^{٢} + (٨)^{٢} + ٢ \times ١٦ \times ٨ \text{ جتا } ١٢٠°}$

= ٨$\sqrt{٣}$ ث.كجم

١٦

محصلة القوتين الأولى والثانية

$= \sqrt{(٥)^{٢} + (١٠)^{٢} + ٢ \times ٥ \times ١٠ \text{ جتا } ٦٠°}$

= ٥$\sqrt{٧}$ نيوتن

∴ القيمة العظمى لمحصلة القوى الثلاث

= ٥$\sqrt{٧}$ + ٤$\sqrt{٧}$ = ٩$\sqrt{٧}$ نيوتن

، القيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاث

= ٥$\sqrt{٧}$ − ٤$\sqrt{٧}$ = $\sqrt{٧}$ نيوتن

١٧

① ∵ $(٣ ق)^{٢}$

$= (٣ق)^{٢} + (٢ق)^{٢} + ٢ \times ٣ق \times ٢ق$ جتا هـ

∴ ٩$ق^{٢}$ = ١٣$ق^{٢}$ + ١٢$ق^{٢}$ جتا هـ

∴ جتا هـ = $-\frac{١}{٣}$ ∴ هـ ≃ ١٠٩° ٢٨َ ١٦ً

② ∵ المحصلة = ق = ٣ق − ٢ق

∴ الزاوية بين القوتين قياسها ١٨٠°

③ ∵ المحصلة = ٥ ق = ٢ق + ٣ق

∴ الزاوية بين القوتين قياسها صفر

④ $(\sqrt{١٣} ق)^{٢}$

$= (٣ق)^{٢} + (٢ق)^{٢} + ٢ \times ٢ق \times ٣ق$ جتا هـ

∴ ١٣$ق^{٢}$ = ١٣$ق^{٢}$ + ١٢$ق^{٢}$ جتا هـ

∴ جتا هـ = صفر ∴ هـ = ٩٠°

١٨

① ∵ اتجاه المحصلة عمودي على القوة الثانية

∴ ق + ٢ جتا ١٢٠° = ٠ ∴ ق = ١ نيوتن

② ∵ $\text{طا } ٤٥° = \frac{٢ \text{ جا } ١٢٠°}{ق + ٢ \text{ جتا } ١٢٠°}$ ∴ $\sqrt{٣}$ = ق − ١

∴ ق = ($\sqrt{٣}$ + ١) نيوتن

١٩

∵ ح ∈ [٢ ، ١٠]

∴ أصغر قيمة للمحصلة = ٢ نيوتن

∴ $ق_١ - ق_٢ = ٢$ (١)

، أكبر قيمة للمحصلة = ١٠ نيوتن

∴ $ق_١ + ق_٢ = ١٠$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ ٢ $ق_١$ = ١٢

∴ $ق_١$ = ٦ نيوتن ∴ $ق_٢$ = ٤ نيوتن

∴ $ح = \sqrt{٦^{٢} + ٤^{٢} + ٢ \times ٦ \times ٤ \text{ جتا } ١٢٠°}$

= ٢$\sqrt{٧}$ نيوتن

٢٠

بفرض القوتين ق ، ق + ٣

، ∵ المحصلة عمودية على القوة الصغرى

∴ ق + (ق + ٣) جتا ى = صفر ∴ جتا ى = $\frac{-ق}{ق + ٣}$

، ∵ المحصلة = ٣ $\sqrt{٣}$

∴ ٢٧ = $ق^{٢} + (ق + ٣)^{٢} + ٢ × ق × (ق + ٣) × \frac{-ق}{ق + ٣}$

∴ ٢٧ = $ق^{٢} + ق^{٢} + ٦ ق + ٩ - ٢ ق^{٢}$

∴ ق = ٣ ∴ القوتان مقداراهما ٣ ، ٦ نيوتن

، جتا ى = $\frac{-٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$ ∴ ى = ١٢٠°

٢١

بفرض القوتين $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$

* فى الحالة الأولى : ١٠ = $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢}$ (١)
* فى الحالة الثانية :

١٣ = $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} × \frac{١}{٢}$ وبالتعويض من (١)

∴ ١٣ = ١٠ + $ق_{١} ق_{٢}$ ∴ $ق_{١} ق_{٢}$ = ٣

∴ $ق_{٢} = \frac{٣}{ق_{١}}$ وبالتعويض فى (١)

∴ ١٠ = $ق_{١}^{٢} + \frac{٩}{ق_{١}^{٢}}$ ∴ ١٠ $ق_{١}^{٢} = ق_{١}^{٤} + ٩$

∴ $ق_{١}^{٤} - ١٠ ق_{١}^{٢} + ٩ = ٠$

∴ $(ق_{١}^{٢} - ٩)(ق_{١}^{٢} - ١) = ٠$

∴ القوتان هما ١ ، ٣ نيوتن

٢٢

$ح_{١} = ٢ ق جتا \frac{ى}{٢} = ١٢$

∴ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ = ٦ (١)

، $ح_{٢} = ٢ ق جتا \left(\frac{١٨٠° - ى}{٢}\right) = ٦$

منها ق جا $\frac{ى}{٢}$ = ٣ (٢)

بتربيع كل من المعادلتين وجمعهما

∴ $ق^{٢} جتا^{٢} \frac{ى}{٢} + ق^{٢} جا^{٢} \frac{ى}{٢} = ٦^{٢} + ٣^{٢}$

∴ $ق^{٢} \left(جتا^{٢} \frac{ى}{٢} + جا^{٢} \frac{ى}{٢}\right) = ٤٥$

∴ ق = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ ث.كجم

٢٣

فى الحالة الأولى : $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ جتا ١٢٠°

∴ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ق_{١} ق_{٢}$ (١)

وفى الحالة الثانية يصبح قياس الزاوية بين اتجاهى $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ هو ٦٠°

∴ ٣ $ح^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ق_{١} ق_{٢}$ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢) :

∴ ٣ $(ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ق_{١} ق_{٢}) = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ق_{١} ق_{٢}$

∴ ٢ $ق_{١}^{٢} + ٢ ق_{٢}^{٢} - ٤ ق_{١} ق_{٢} = ٠$

∴ $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١} ق_{٢} = ٠$

∴ $(ق_{١} - ق_{٢})^{٢} = ٠$ ∴ $ق_{١} = ق_{٢}$

∴ $\overrightarrow{ح_{١}}$ فى الحالة الأولى تصنع مع $\overrightarrow{ق_{١}}$ زاوية قياسها ٦٠°

، $\overrightarrow{ح_{٢}}$ فى الحالة الثانية تصنع مع $\overrightarrow{ق_{١}}$ زاوية قياسها ٣٠° من الجهة الأخرى.

∴ قياس الزاوية بين المحصلتين = ٩٠°

٢٤

$\overrightarrow{ق_{١}}$ = (٤ ، ٠°) ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ = (ق ، ى°) ، $\overrightarrow{ح}$ = (١٠ ، ٦٠°)

$\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_{١}} + \overrightarrow{ق_{٢}}$

∴ (١٠ جتا ٦٠° ، ١٠ جا ٦٠°) = (٤ جتا ٠° ، ٤ جا ٠°) + (ق جتا ى ، ق جا ى)

∴ (٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$) = (٤ ، ٠) + (ق جتا ى ، ق جا ى)

∴ ق جتا ى + ٤ = ٥ ∴ ق جتا ى = ١ (١)

، ق جا ى = ٥ $\sqrt{٣}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

∴ ظا ى = ٥ $\sqrt{٣}$

∴ جا ى = $\frac{٥ \sqrt{٣}}{\sqrt{٧٦}}$

وبالتعويض فى (٢) :

∴ ق × $\frac{٥ \sqrt{٣}}{\sqrt{٧٦}}$ = ٥ $\sqrt{٣}$

∴ ق = $\sqrt{٧٦}$ = ٢ $\sqrt{١٩}$ نيوتن.

<u>حل آخر :</u>

بتطبيق قاعدة جيب التمام نجد أن :

$ق^{٢} = (١٠)^{٢} + (٤)^{٢}$

− ٢ × ٤ × ١٠ × جتا ٦٠° = ٧٦

∴ ق = ٢ $\sqrt{١٩}$ نيوتن.

٢٥

بفرض أن : $ق_{١} > ق_{٢}$ ∴ $ق_{١} - ق_{٢} = ١٥$

∴ $ق_{١} = ١٥ + ق_{٢}$ (١)

، $(٣٥)^{٢} = ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢} × \frac{-١}{٢}$

∴ ١٢٢٥ = $(١٥ + ق_{٢})^{٢} + ق_{٢}^{٢} - (١٥ + ق_{٢}) ق_{٢}$

∴ ١٢٢٥ = ٢٢٥ + $ق_{٢}^{٢}$ + ٣٠ $ق_{٢}$ + $ق_{٢}^{٢}$ − ١٥ $ق_{٢}$ − $ق_{٢}^{٢}$

∴ $ق_{٢}^{٢} + ١٥ ق_{٢} - ١٠٠٠ = ٠$

∴ $(ق_{٢} + ٤٠)(ق_{٢} - ٢٥) = ٠$

∴ القوتان هما ٤٠ ، ٢٥ نيوتن

٢٦

$ق_{١} + ق_{٢} = ٤$ ∴ $ق_{١} = ٤ - ق_{٢}$ (١)

، ١٣ = $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ جتا ٦٠°

وبالتعويض من (١) :

∴ ١٣ = $(٤ - ق_{٢})^{٢} + ق_{٢}^{٢} + (٤ - ق_{٢}) ق_{٢}$

∴ ١٣ = ١٦ − ٨ $ق_{٢}$ + $ق_{٢}^{٢}$ + $ق_{٢}^{٢}$ + ٤ $ق_{٢}$ − $ق_{٢}^{٢}$

∴ $ق_{٢}^{٢} - ٤ ق_{٢} + ٣ = ٠$

∴ $(ق_{٢} - ١)(ق_{٢} - ٣) = ٠$

∴ القوتان هما : ١ ، ٣ نيوتن

٢٧

بفرض القوتين $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ حيث $ق_{١} < ق_{٢}$

∴ $ق_{١} + ق_{٢}$ = ٤٠ ومنها $ق_{١}$ = ٤٠ − $ق_{٢}$ (١)

، ∵ المحصلة = ٢٠ ث.كجم

∴ ٤٠٠ = $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ جتا ى (٢)

، ∵ المحصلة عمودية على القوة الصغرى

∴ $ق_{١} + ق_{٢}$ جتا ى = ٠

∴ جتا ى = $\frac{-ق_{١}}{ق_{٢}}$ وبالتعويض فى (٢)

∴ ٤٠٠ = $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١} ق_{٢} × \frac{ق_{١}}{ق_{٢}}$

∴ ٤٠٠ = $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ٢ ق_{١}^{٢}$

∴ ٤٠٠ = $ق_{٢}^{٢} - ق_{١}^{٢}$ وبالتعويض من (١)

∴ ٤٠٠ = $ق_{٢}^{٢} - (٤٠ - ق_{٢})^{٢}$

∴ ٤٠٠ = $ق_{٢}^{٢}$ − ١٦٠٠ + ٨٠ $ق_{٢}$ − $ق_{٢}^{٢}$

∴ ٢٠٠٠ = ٨٠ $ق_{٢}$ ∴ $ق_{٢}$ = ٢٥ ث.كجم

وبالتعويض فى (١) :

∴ $ق_{١}$ = ١٥ ث.كجم ، جتا ى = $\frac{-١٥}{٢٥} = \frac{-٣}{٥}$

٢٨

$ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} = ٢٥$ (١)

، ∵ $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} + ٢ ق_{١} ق_{٢}$ جتا ١٢٠° = ١٣

∴ $ق_{١}^{٢} + ق_{٢}^{٢} - ق_{١} ق_{٢} = ١٣$ (٢)

وبطرح (٢) من (١) ∴ $ق_{١} ق_{٢} = ١٢$

∴ $ق_{١} = \frac{١٢}{ق_{٢}}$ وبالتعويض فى (١)

∴ $\left(\frac{١٢}{ق_{٢}}\right)^{٢} + ق_{٢}^{٢} = ٢٥$ ∴ $\frac{١٤٤}{ق_{٢}^{٢}} + ق_{٢}^{٢} = ٢٥$

∴ $ق_2^4 - 25 ق_2^2 + 144 = 0$

∴ $(ق_2^2 - 9)(ق_2^2 - 16) = 0$ ، ∵ $ق_1 > ق_2$

∴ $ق_1 = 4$ ثقل كجم ، $ق_2 = 3$ ثقل كجم

29

$ح_1 = 2ق$ جتا $60° = ق$

، $ح_2 = 2(2ق)$ جتا $30° = 2\sqrt{3}ق$

، ∵ $ح_2 - ح_1 = 11$ ∴ $2\sqrt{3}ق - ق = 11$

∴ $ق = \frac{11}{2\sqrt{3} - 1}$ ∴ $ق = 1 + 2\sqrt{3}$

30

الحالة الأولى :

$(\sqrt{5}ق(م+1))^2$

$= ق^2 + (2ق)^2 + 2 \times ق \times 2ق$ جتا ى

∴ $5ق^2(م^2 + 2م + 1) - 5ق^2 = 4ق^2$ جتا ى

∴ $5ق^2 م(م+2) = 4ق^2$ جتا ى (1)

الحالة الثانية :

$(\sqrt{5}ق(م-1))^2$

$= ق^2 + (2ق)^2 + 2 \times ق \times 2ق \times$ جتا $(90° - ى)$

∴ $5ق^2(م^2 - 2م + 1) - 5ق^2 = 4ق^2$ جا ى

∴ $5ق^2 م(م-2) = 4ق^2$ جا ى (2)

بقسمة (2) ÷ (1) :

$\frac{5ق^2 م(م-2)}{5ق^2 م(م+2)} = \frac{4ق^2 \text{ جا ى}}{4ق^2 \text{ جتا ى}}$ ∴ ظا ى $= \frac{م-2}{م+2}$

ثالثاً مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

1

(1) (د) (2) (د) (3) (ب) (4) (د)

(5) (أ) (6) (ب) (7) (جـ) (8) (د)

(9) (أ) (10) (د) (11) (جـ)

إرشادات لحل رقم **1**

(1) ∵ القيمة العظمى = $ق_1 + ق_2$

، والقيمة الصغرى = $ق_1 - ق_2$ حيث $ق_1 > ق_2$

∴ $\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2} = \frac{7}{3}$

∴ $3ق_1 + 3ق_2 = 7ق_1 - 7ق_2$

∴ $4ق_1 = 10ق_2$ ∴ $\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

∴ النسبة بين القوتين = 5 : 2

(2) ∵ $ق_1 : ق_2 : ح = 4 : 3 : \sqrt{13}$

∴ $ق_1 = 4م$ ، $ق_2 = 3م$ ، $ح = \sqrt{13}م$

∴ $(\sqrt{13}م)^2 = (4م)^2 + (3م)^2 + 2(4م)(3م)$ جتا ى

∴ جتا ى $= \frac{13م^2 - 16م^2 - 9م^2}{24م^2} = \frac{-1}{2}$

∴ قياس الزاوية بين القوتين = جتا$^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = 120°$

(3) ∵ المحصلة ⊥ $ق_1$

∴ $ق_1 + ق_2$ جتا ى = صفر

∴ جتا ى $= \frac{-ق_1}{ق_2}$

∴ قياس الزاوية بين القوتين = جتا$^{-1}\left(\frac{-ق_1}{ق_2}\right)$

(4) ∵ قياس الزاوية بين القوتين = 90°

وإذا تساوت القوتين فإن المحصلة تنصف الزاوية

، ∵ القوتين غير متساويتين

∴ المحصلة تميل أكثر ناحية القوة الأكبر

∴ قياس الزاوية θ بين القوة الأكبر والمحصلة لابد وأن تكون أقل من 45°

(5) بتمثيل القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ بمتوازى الأضلاع كما بالشكل

∴ $\overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أء}$

$= \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{ح}$

، $\overrightarrow{ق_1} + (-\overrightarrow{ق_2}) = \overrightarrow{أب} + (-\overrightarrow{أء}) = \overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أء}$

$= \overrightarrow{ءب} = \overrightarrow{ح'}$

∵ $\overrightarrow{ح}$ ، $\overrightarrow{ح'}$ يمثلان بقطرى المتوازى

∴ فى حالة تعامدهما يكون الشكل معيناً

∴ أب = أء منها $ق_1 = ق_2$

(6) $ح^2 = ق^2 + (4)^2 + 2(ق)(4)$ جتا $120°$

∴ $ح^2 = ق^2 - 4ق + 16$

∴ $ح^2 = (ق-2)^2 + 12$

∴ $ح = \sqrt{(ق-2)^2 + 12}$

∴ أصغر قيمة للمحصلة تكون عندما ق = 2

(7) كلما زادت القوة $ق_2$ كلما اقتربت المحصلة من القوة الأكبر التى تتضاعف وبالتالى تزداد الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الثانية أى أن $\theta_2 > \theta_1$

(8) ∵ $ق^2 = ق^2 + 3ق^2 + 2(ق)(ق\sqrt{3})$ جتا ى

∴ جتا ى $= \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ∴ ى $= 150°$

، ∵ ظا هـ$_1$ $= \frac{ق\sqrt{3} \text{ جا } 150°}{ق + ق\sqrt{3} \text{ جتا } 150°} = -\sqrt{3}$

∴ هـ$_1$ $= 120°$

وبالتالى هـ$_2$ $= 150° - 120° = 30°$

∴ هـ$_1$ = 4 هـ$_2$

(9) ∵ $3 \le ق_1 \le 12$ ∴ $9 \le ق_1^2 \le 144$ (1)

، $4 \le ق_2 \le 16$ ∴ $16 \le ق_2^2 \le 256$ (2)

بجمع (1) ، (2) ∴ $25 \le ق_1^2 + ق_2^2 \le 400$

∴ $5 \le ح \le 20$

(10) ∵ $1 \le ق_1 \le 9$ ، $3 \le ق_2 \le 7$

∴ $4 \le ق_1 + ق_2 \le 16$ (1)

∴ $1 \le ق_1 \le 9$ ، $-7 \le -ق_2 \le -3$

∴ $-6 \le ق_1 - ق_2 \le 6$

∴ $0 \le |ق_1 - ق_2| \le 6$ (2)

من (1) ، (2) يستنتج أن $0 \le ح \le 16$

(11) ∵ $5 \le ق_1 \le 20$

، $12 \le ق_2 \le 31$

∴ $17 \le ق_1 + ق_2 \le 46$

وتتحقق عندما θ = صفر

، $ق_2^2 - (13)^2 \le ق_1^2 - ق_2^2 \le$ [illegible]

∴ $169 \le ق_1^2 - ق_2^2 \le 841$

∴ $13 \le \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2} \le 29$

وتتحقق عندما $\theta = \frac{\pi}{2}$

∴ $13 \le ح \le 46$

عندما $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

2

فى الحالة الأولى

نفرض أن القوتين ق ، 2ق بينهما زاوية قياسها ى

∴ ظا هـ $= \frac{2ق \text{ جا ى}}{ق + 2ق \text{ جتا ى}}$

∴ ظا هـ $= \frac{2 \text{ جا ى}}{1 + 2 \text{ جتا ى}}$ (1)

، فى الحالة الثانية القوة الأولى تصبح ق − [illegible]

القوة الثانية = [illegible]

∴ ظا هـ = [illegible] (2)

من (1) ، (2) ∴ [illegible]

$\therefore \frac{1}{1+2\,\text{جتا ى}} = \frac{2\,\text{ق}}{\text{ق}+4+4\,\text{ق جتا ى}}$

$\therefore \text{ق} + 4 + 4\,\text{ق جتا ى} = 2\,\text{ق} + 4\,\text{ق جتا ى}$

$\therefore \text{ق} + 4 = 2\,\text{ق}$ $\therefore \text{ق} = 4$ ثقل.كجم

∴ في الحالة الأولى :

القوة الأولى مقدارها ٤ ث.كجم

، القوة الثانية مقدارها ٨ ث.كجم

، $\text{ح}_1 = \sqrt{16 + 64 + 2 \times 4 \times 8\,\text{جتا ى}}$

$= 4\sqrt{5 + 4\,\text{جتا ى}}$

، في الحالة الثانية :

القوة الأولى مقدارها ٨ ث.كجم

، القوة الثانية مقدارها ١٦ ث.كجم

، $\text{ح}_2 = \sqrt{64 + 256 + 2 \times 8 \times 16\,\text{جتا ى}}$

$= 8\sqrt{5 + 4\,\text{جتا ى}}$

$\therefore \frac{\text{ح}_1}{\text{ح}_2} = \frac{4\sqrt{5+4\,\text{جتا ى}}}{8\sqrt{5+4\,\text{جتا ى}}} = \frac{1}{2}$

3

الحالة الأولى :

$\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\text{ق}_2\,\text{جتا ى}$ (١)

الحالة الثانية :

$3\,\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\text{ق}_2\,\text{جتا}\,(180^\circ - \text{ى})$

$\therefore 3\,\text{ح}^2 = \text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 - 2\,\text{ق}_1\text{ق}_2\,\text{جتا ى}$ (٢)

وبضرب (١) × ٣ ثم طرح (٢) من (١) :

$\therefore \text{صفر} = 2\,\text{ق}_1^2 + 2\,\text{ق}_2^2 + 8\,\text{ق}_1\text{ق}_2\,\text{جتا ى}$

$\therefore \text{جتا ى} = \frac{-\text{ق}_1^2 - \text{ق}_2^2}{4\,\text{ق}_1\text{ق}_2}$ (٣)

وبفرض هـ١ زاوية ميل ح على القوة ق١

$\therefore \text{طا هـ}_1 = \frac{\text{ق}_2\,\text{جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتا ى}}$

وبفرض هـ٢ زاوية ميل ح $\sqrt{3}$ على ق١

$\therefore \text{طا هـ}_2 = \frac{\text{ق}_2\,\text{جا}\,(180^\circ - \text{ى})}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتا}\,(180^\circ - \text{ى})}$

$\therefore \text{طا هـ}_2 = \frac{\text{ق}_2\,\text{جا ى}}{\text{ق}_1 - \text{ق}_2\,\text{جتا ى}}$

، $\because \text{هـ}_1 + \text{هـ}_2 = 90^\circ$ $\therefore \text{طا هـ}_1 = \text{ظتا هـ}_2$

$\therefore \frac{\text{ق}_2\,\text{جا ى}}{\text{ق}_1 + \text{ق}_2\,\text{جتا ى}} = \frac{\text{ق}_1 - \text{ق}_2\,\text{جتا ى}}{\text{ق}_2\,\text{جا ى}}$

$\therefore \text{ق}_2^2\,\text{جا}^2\,\text{ى} = \text{ق}_1^2 - \text{ق}_2^2\,\text{جتا}^2\,\text{ى}$

$\therefore \text{ق}_2^2\,(\text{جا}^2\,\text{ى} + \text{جتا}^2\,\text{ى}) = \text{ق}_1^2$ $\therefore \text{ق}_2^2 = \text{ق}_1^2$

وبالتعويض في (٣) : $\therefore \text{جتا ى} = \frac{-2\,\text{ق}_1^2}{4\,\text{ق}_1^2} = -\frac{1}{2}$

$\therefore \text{ى} = 120^\circ$

حل آخر :

$\because$ أ ء = أ هـ = ب حـ

= ب و

∴ في △ حـ أ و :

$\because \text{ق}(\angle\,\text{حـ أ و}) = 90^\circ$

، ∵ $\overline{\text{أ ب}}$ متوسط خارج من رأس القائمة

$\therefore \text{أ ب} = \frac{1}{2}\,\text{حـ و} = \text{حـ ب} = \text{ب و}$

$\therefore \text{ق}_1 = \text{ق}_2$

، $\because \text{طا}\,(\angle\,\text{حـ و أ}) = \frac{\text{ح}}{\text{ح}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \text{ق}(\angle\,\text{حـ و أ}) = 30^\circ$ $\therefore \text{ق}(\angle\,\text{أ حـ و}) = 60^\circ$

∴ △ أ ب حـ متساوي الأضلاع

$\therefore \text{ق}(\angle\,\text{أ حـ ب}) = \text{ق}(\angle\,\text{حـ أ ب}) = \text{ق}(\angle\,\text{حـ أ ء})$

$= 60^\circ$

$\therefore \text{ق}(\angle\,\text{ى}) = 120^\circ$

إجابات تمارين 2

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (حـ)	② (ء)	③ (ء)	④ (ء)	⑤ (حـ)
⑥ (أ)	⑦ (حـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)	⑩ (ب)
⑪ (أ)	⑫ (حـ)	⑬ (ب)	⑭ (أ)	⑮ (ء)
⑯ (حـ)	⑰ (حـ)	⑱ (حـ)	⑲ (حـ)	⑳ (أ)
㉑ (أ)	㉒ (ب)	㉓ (حـ)	㉔ (ب)	㉕ (ب)
㉖ (ب)	㉗ (حـ)	㉘ (حـ)	㉙ (حـ)	㉚ (ء)

ثانياً الأسئلة المقالية

1

$\text{ق}_1 = \frac{600\,\text{جا}\,45^\circ}{\text{جا}\,75^\circ} \approx 439.2$ ث.جم

، $\text{ق}_2 = \frac{600\,\text{جا}\,30^\circ}{\text{جا}\,75^\circ} \approx 310.6$ ث.جم

2

المركبة في اتجاه الشمال = ١٠٠ جا ٤٥°

= ٥٠ $\sqrt{2}$ ث.جم

، المركبة في اتجاه الغرب = ١٠٠ جتا ٤٥°

= ٥٠ $\sqrt{2}$ ث.جم

3

$\text{ق}_1 = \frac{12\,\text{جا}\,90^\circ}{\text{جا}\,135^\circ} = 12\sqrt{2}$ ث.كجم

، $\text{ق}_2 = \frac{12\,\text{جا}\,45^\circ}{\text{جا}\,135^\circ} = 12$ ث.كجم

4

$\text{ق}_1 = 160\,\text{جا}\,60^\circ$

$= 80\sqrt{3}$ ث.جم

، $\text{ق}_2 = 160\,\text{جا}\,30^\circ$

$= 80$ ث.جم

5

$\text{ق}_1 = 300\,\text{جتا}\,60^\circ = 150$

، $\text{ق}_2 = 300\,\text{جا}\,60^\circ = 150\sqrt{3}$

6

$\text{ق}_1 = 18\,\text{جتا}\,60^\circ = 9$ نيوتن

، $\text{ق}_2 = 18\,\text{جا}\,60^\circ = 9\sqrt{3}$ نيوتن

7

$\text{ق} = \frac{9\,\text{جا}\,[illegible]}{\text{جا}\,[illegible]}$

$= 3\sqrt{3}$ نيوتن

٨

ش١ = ٨٠ جتا ٦٠° = ٤٠ نيوتن

، ش٢ = ٨٠ جتا ٣٠° = ٤٠ √٣ نيوتن

٩

∵ ظا ى = − ١/√٣

∴ ى = ١٥٠°

∵ ش٢ = ح جا ٩٠° / جا ١٥٠°

∴ ح = ٣٠ جا ١٥٠° / جا ٩٠° = ١٥ نيوتن

، ش٢ = ١٥ جا ٦٠° / جا ١٥٠° = ١٥ √٣ نيوتن

١٠

∵ ق١ = ق جا ٩٠° / جا ١٥٠°

∴ ق = ٤٠ جا ١٥٠° / جا ٩٠°

= ٢٠ نيوتن

، ق٢ = ٢٠ جا ٦٠° / جا ١٥٠° = ٢٠ √٣ نيوتن

شمال

جنوب

شرق

غرب

١١

ش١ = ٤٢ جتا ٦٠°

= ٢١ نيوتن

، ش٢ = ٤٢ جا ٦٠°

= ٢١ √٣ نيوتن

١٢

ش١ = ٦٠ جا هـ = ٦٠ × ٣/٥ = ٣٦ نيوتن

، ش٢ = ٦٠ جتا هـ = ٦٠ × ٤/٥ = ٤٨ نيوتن

١٣

ش١ = ١٢٠ جا ٤٨° / جا (٤٨° + ٩٠°) = ١٣٣,٢٧ ث.جم

ش٢ = ١٢٠ جا ٩٠° / جا (٤٨° + ٩٠°) = ١٧٩,٣٤ ث.جم

١٤

(٣٠)² = (١٥ √٣)² + (ش٢)²

∴ ش٢ = ١٥ نيوتن

١٥

ش١ = ش٢ = ٢٠ جا ٨٥° / جا (٨٥° + ٨٥°) = ١١٤,٧٤ نيوتن

– عندما يقل قياس الزاوية مع الأفقى عن ٥° فإن مقدار مركبة الوزن فى اتجاهى الحبلين يزداد إلى أن يصبح لا نهائيًا عندما تكون الحبال أفقية.

١٦

ش١ = ٣٩٠ جا هـ

= ١٥٠ ث.جم

١٣٠ سم

ش٢ = ٣٩٠ جتا هـ

= ٣٦٠ ث.جم

١٣

١٢

١٧

ش١ فى اتجاه أب

∴ ش١ = ٥٠٠٠ × جا ٣٠° / جا ٧٥° = ٢٥٨٨,٢ نيوتن

، ش٢ فى اتجاه أجـ

ش٢ = ٥٠٠٠ جا ٤٥° / جا ٧٥° = ٣٦٦٠,٢ نيوتن

إجابات التمارين 3

• ملاحظة هامة : سوف نحل مسائل هذا التمرين باستخدام الزوايا القطبية ولكن يمكن للطالب استخدام تحليل القوى فى اتجاهين متعامدين

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د) ⑤ (د)

⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (أ) ⑩ (جـ)

⑪ (د) ⑫ (جـ) ⑬ (د) ⑭ (د)

⑮ أولاً : (ب) ثانيًا : (جـ) ⑯ (ب) ⑰ (جـ)

⑱ (د) ⑲ (أ) ⑳ (أ) ㉑ (جـ) ㉒ (ب)

㉓ (أ) ㉔ (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① س = ٢٧ جتا ٠° + ١٨ جتا ٩٠° + ١٢ √٢ جتا ١٣٥°
+ ١٥ √٢ جتا ٢٢٥° + ٩ جتا ٢٧٠°

= ٢٧ × ١ + ١٨ × ٠ + ١٢ √٢ × − ١/√٢
+ ١٥ √٢ × − ١/√٢ + ٩ × ٠ = صفر

، ص = ٢٧ جا ٠° + ١٨ جا ٩٠° + ١٢ √٢ جا ١٣٥°
+ ١٥ √٢ جا ٢٢٥° + ٩ جا ٢٧٠°

= ٢٧ × ٠ + ١٨ × ١ + ١٢ √٢ × ١/√٢
+ ١٥ √٢ × −١/√٢ + ٩ × −١ = ٦

∴ ح = ٦ ص ∴ ح = ٦ نيوتن

∴ مقدار المحصلة ٦ نيوتن وتعمل فى اتجاه و ص

② س = ٤ جتا ٦٠° + ٢ √٣ جتا ٢٧٠° + ٢ √٣ جتا ٣٣٠°

= ٤ × ١/٢ + ٢ √٣ × ٠ + ٢ √٣ × √٣/٢

= ٥

، ص = ٤ جا ٦٠° + ٢ √٣ جا ٢٧٠° + ٢ √٣ جا ٣٣٠°

= ٤ × √٣/٢ + ٢ √٣ × −١ + ٢ √٣ × −١/٢

= −٢ √٣

∴ ح = ٥ س − ٢ √٣ ص

∴ ح = √((٥)² + (−٢ √٣)²) = √٣٧ نيوتن

، ظا هـ = −٢ √٣ / ٥ ∴ هـ = ٣٢٥° ١٧'

∴ مقدار المحصلة √٣٧ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ١٧' ٣٢٥° مع و س

٢



نعتبر و س هو اتجاه القوة الأولى

∴ س = ١ × جتا ٠° + ٢ × جتا ٦٠° + √٣ × جتا ٩٠°

= ١ + ٢ × ١/٢ + √٣ × صفر = ٢

، ص = ١ × جا ٠° + ٢ × جا ٦٠° + √٣ × جا ٩٠°

= ١ × صفر + ٢ × √٣/٢ + √٣ = ٢ √٣

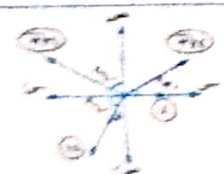
∴ ح = ٢ س + ٢ √٣ ص

∴ ح = √((٢)² + (٢ √٣)²) = ٤ نيوتن

، ظا هـ = ٢ √٣ / ٢ = √٣ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن وتعمل فى اتجاه [illegible]

٣



بفرض و س فى اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٨ جتا ٠° + ٤ √٣ جتا ٣٠° + ٦ √٣ جتا ١٥٠° + ١٤ جتا ٢٤٠° = ٨ × ١ + ٤ √٣ × √٣/٢

+ ٦ √٣ × (−√٣/٢) + ١٤ × (−١/٢)

= ٨ + ٦ − ٩ − ٧ = −٢

، ص = ٨ جا ٠° + ٤ √٣ جا ٣٠° + ٦ √٣ جا ١٥٠° + ١٤ جا ٢٤٠°

= ٨ × ٠ + ٤ √٣ × ١/٢ + ٦ √٣ × ١/٢

+ ١٤ × (−√٣/٢) = −٢ √٣

∴ ح = −٢ س − ٢ √٣ ص

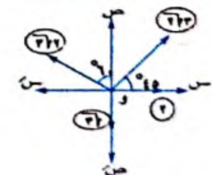
∴ ح = √((−٢)² + (−٢ √٣)²) = ٤ نيوتن

، طا هـ = −٢ √٣ / −٢ = √٣

، ∵ س ، ص سالبتان ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة ٤ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع و س أي في اتجاه القوة الرابعة

٤



نعتبر و س في اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٣ √٢ جتا ٤٥° + ٢ √٣ جتا ١٥٠° + √٣ جتا ٢٧٠° = ٢ × ١ + ٣ √٢ × ١/√٢

+ ٢ √٣ × −√٣/٢ + √٣ × صفر = ٢

، ص = ٢ جا ٠° + ٣ √٢ جا ٤٥° + ٢ √٣ جا ١٥٠° + √٣ جا ٢٧٠° = ٢ × صفر + ٣ √٢ × ١/√٢

+ ٢ √٣ × ١/٢ + √٣ × −١ = ٣

∴ ح = ٢ س + ٣ ص

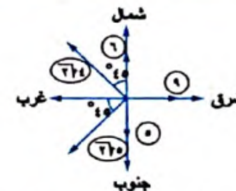
∴ ح = √((٢)² + (٣)²) = √١٣ نيوتن

، طا هـ = ٣/٢ ∴ هـ ≈ ٥٦° ١٩َ

∴ مقدار المحصلة √١٣ نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٥٦° ١٩َ مع و س

أي بين القوتين الثانية والثالثة وتصنع زاوية قياسها ١١° ١٩َ مع القوة الثانية

٥



∵ س = ٩ جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠° + ٤ √٢ جتا ١٣٥° + ٥ √٢ جتا ٢٢٥° + ٥ جتا ٢٧٠° = ٩ × ١

+ ٦ × صفر + ٤ √٢ × −١/√٢ + ٥ √٢ × −١/√٢

+ ٥ × صفر = صفر

، ص = ٩ جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤ √٢ جا ١٣٥°

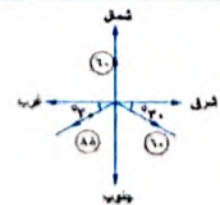
+ ٥ √٢ جا ٢٢٥° + ٥ جا ٢٧٠°

= ٩ × صفر + ٦ × ١ + ٤ √٢ × ١/√٢

+ ٥ √٢ × −١/√٢ + ٥ × −١ = صفر

∴ ح = ٠ ∴ المجموعة متزنة

٦



∵ س = ٦٠ جتا ٩٠° + ٨٨ جتا ٢١٠° + ٦٠ جتا ٣٣٠°

= ٦٠ × صفر + ٨٨ × −√٣/٢ + ٦٠ × √٣/٢

= −١٤ √٣

، ص = ٦٠ جا ٩٠° + ٨٨ جا ٢١٠° + ٦٠ جا ٣٣٠°

= ٦٠ × ١ + ٨٨ × −١/٢ + ٦٠ × −١/٢ = −١٤

∴ ح = −١٤ √٣ س − ١٤ ص

∴ ح = √((−١٤ √٣)² + (−١٤)²) = ٢٨ ث جم

، طا هـ = −١٤ / −١٤ √٣ = ١/√٣

، ∵ س ، ص سالبتان ∴ هـ = ٢١٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٨ ث جم وفي اتجاه ٣٠° جنوب الغرب

٧



∵ س = ٤ جتا ٠° + ٢ جتا ٦٠° + ٥ جتا ١٢٠° + ٣ √٣ جتا ٢١٠° = ٤ × ١ + ٢ × ١/٢

+ ٥ × −١/٢ + ٣ √٣ × −√٣/٢ = −٢

، ص = ٤ جا ٠° + ٢ جا ٦٠° + ٥ جا ١٢٠° + ٣ √٣ جا ٢١٠° = ٤ × صفر + ٢ × √٣/٢

+ ٥ × √٣/٢ + ٣ √٣ × −١/٢ = ٢ √٣

∴ ح = −٢ س + ٢ √٣ ص

∴ ح = √((٢)² + (٢ √٣)²) = ٤ نيوتن

، طا هـ = ٢ √٣ / −٢ = −√٣

، ∵ س < ٠ ، ص > ٠ ∴ هـ = ١٢٠°

٨



نعتبر و س في اتجاه القوة الأولى

∴ س = ٢ ق جتا ٠° + ٣ ق جتا ١٢٠° + ٤ ق جتا ٢٤٠°

= ٢ ق × ١ + ٣ ق × −١/٢

+ ٤ ق × −١/٢ = −١ ١/٢ ق

، ص = ٢ ق جا ٠° + ٣ ق جا ١٢٠° + ٤ ق جا ٢٤٠°

= ٢ ق × صفر + ٣ ق × √٣/٢ + ٤ ق × −√٣/٢

= −√٣/٢ ق

∴ ح = −١ ١/٢ ق س − √٣/٢ ق ص

∴ ح = √((−٣/٢ ق)² + (−√٣/٢ ق)²) = √٣ ق نيوتن

، طا هـ = −√٣/٢ × ٢/−٣ = √٣/٣ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ المحصلة مقدارها √٣ ق نيوتن واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٢١٠° مع و س

أي بين القوتين ٢ ق ، ٤ ق وعمودية على القوة ٣ ق

٩



نفرض و س في اتجاه القوة الثالثة

∴ س = ... جتا ... + ... جتا ... + ... جتا ...

= ٣ ٥ × صفر + ... × −√٣/٢ + ... × √٣/٢

= ٣ √٣ ...

، ص = ٢٥ جا ٩٠° + ١٥ جا ٢١٠° + ٢٠ جا ٣٣٠°

= ٢٥ × ١ + ١٥ × $\frac{-١}{٢}$ + ٢٠ × $\frac{-١}{٢}$ = ٧,٥

∴ $\overline{ح}$ = ٢,٥ $\sqrt{٣}$ $\overline{س}$ + ٧,٥ $\overline{ص}$

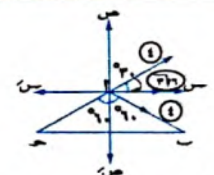
∴ ح = $\sqrt{(٢,٥\sqrt{٣})^٢ + (٧,٥)^٢}$ = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{٧,٥}{٢,٥\sqrt{٣}}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ المحصلة مقدارها ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن واتجاهها يصنع مع $\overline{و س}$ زاوية قياسها ٦٠°

أي بين $\overline{م أ}$ ، $\overline{م ب}$ وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع $\overline{م أ}$

١٠



بفرض $\overleftrightarrow{ص ص'}$ محور تماثل Δ أ ب حـ

، نقطة أ تنطبق على نقطة و

∴ س = ٦ $\sqrt{٣}$ جتا ٠° + ٤ جتا ٣٠° + ٤ جتا ٣٣٠°

= ٦ $\sqrt{٣}$ × ١ + ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

+ ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

، ص = ٦ $\sqrt{٣}$ جا ٠° + ٤ جا ٣٠° + ٤ جا ٣٣٠°

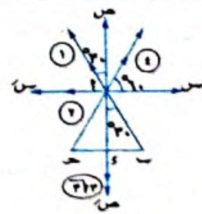
= ٦ $\sqrt{٣}$ × صفر + ٤ × $\frac{١}{٢}$ + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = صفر

∴ $\overline{ح}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ $\overline{س}$

∴ ح = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overline{و س}$

أي في اتجاه $\overline{حـ ب}$

١١



بفرض $\overleftrightarrow{ص ص'}$ محور تماثل Δ أ ب حـ ، نقطة أ تنطبق على نقطة و

∴ س = ٤ جتا ٦٠° + جتا ١٢٠° + ٢ جتا ١٨٠°

+ ٣ $\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٢}$ + ٢ × −١

+ ٣ $\sqrt{٣}$ × صفر = − $\frac{١}{٢}$

، ص = ٤ جا ٦٠° + جا ١٢٠° + ٢ جا ١٨٠°

+ ٣ $\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

= ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ × صفر

+ ٣ $\sqrt{٣}$ × −١ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\overline{ح}$ = − $\frac{١}{٢}$ $\overline{س}$ − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ $\overline{ص}$

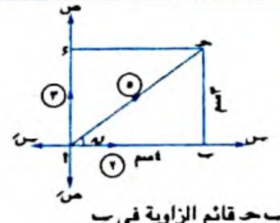
∴ ح = $\sqrt{(-\frac{١}{٢})^٢ + (-\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢}$ = ١ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ × −٢ = $\sqrt{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة ١ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overline{أ حـ}$

١٢



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ أ حـ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ سم

∴ جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٥ جتا هـ + ٣ جتا ٩٠°

= ٢ × ١ + ٥ × $\frac{٤}{٥}$ + ٣ × صفر = ٦

، ص = ٢ جا ٠° + ٥ جا هـ + ٣ جا ٩٠°

= ٢ × صفر + ٥ × $\frac{٣}{٥}$ + ٣ × ١ = ٦

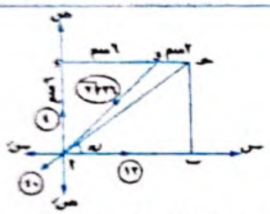
∴ $\overline{ح}$ = ٦ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(٦)^٢ + (٦)^٢}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{٦}{٦}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ المحصلة مقدارها ٦ $\sqrt{٢}$ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع $\overline{أ ب}$

١٣



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ أ حـ = $\sqrt{٨^٢ + ٦^٢}$ = ١٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ٣٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

+ ٤ جتا ٩٠° + ٤٠ جتا (١٨٠° + هـ)

= ١٢ × ١ + ٣٦ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ × ٠ + ٤٠ × $\frac{-٤}{٥}$ = ٦

، ص = ١٢ جا ٠° + ٣٦ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ٤ جا ٩٠° + ٤٠ جا (١٨٠° + هـ)

= ١٢ × ٠ + ٣٦ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ × ١ + ٤٠ × $\frac{-٣}{٥}$ = ٦

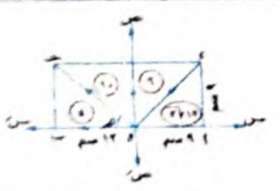
∴ $\overline{ح}$ = ٦ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$

∴ ح = $\sqrt{٦^٢ + ٦^٢}$ = ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن

، ظا هـ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ مقدار المحصلة ٦ $\sqrt{٢}$ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٤٥° مع $\overline{أ ب}$

١٤



∵ Δ أ ء و متساوي الساقين وقائم الزاوية في أ

∴ ق (∠ أ ء و) = ٤٥°

، ∵ Δ و ب حـ قائم الزاوية في ب

∴ و حـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٩)^٢}$ = ١٥ سم

∴ جتا هـ = $\frac{١٢}{١٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ ، جا هـ = $\frac{٩}{١٥}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ١٢ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٦ جتا ٩٠°

+ ١٠ جتا (١٨٠° − هـ) + ٤ جتا ١٨٠°

= ١٢ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٦ × صفر + ١٠ × $\frac{-٤}{٥}$

+ ٤ × −١ = صفر

، ص = ١٢ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥° + ٦ جا ٩٠°

+ ١٠ جا (١٨٠° − هـ)

+ ٤ جا ١٨٠° = ١٢ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

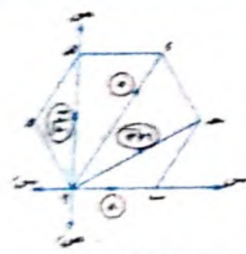
+ ٦ × ١ + ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ٤ × صفر = ٢٤

∴ $\overline{ح}$ = ٢٤ $\overline{ص}$ ∴ ح = ٢٤ ث.كجم

∴ مقدار المحصلة ٢٤ ث.كجم وتعمل في اتجاه $\overline{و ص}$

أي في اتجاه $\overline{ب حـ}$

١٥



بفرض $\overline{أ ب}$ في اتجاه $\overline{و س}$

س = ٨ جتا ٠° + ٦ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٥ جتا ٦٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

= ٨ × ١ + ٦ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ × $\frac{١}{٢}$ + ٤ $\sqrt{٣}$ × ٠

= $\frac{٣٩}{٢}$

، ص = ٨ جا ٠° + ٦$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٥ جا ٦٠°

+ ٤$\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

= ٨ × ٠ + ٦$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٥ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٤$\sqrt{٣}$ × ١

= $\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}$

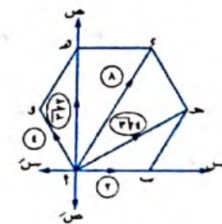
∴ ح = $\frac{٣٩}{٢}$ س + $\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}$ ص

∴ ح = $\sqrt{(\frac{٣٩}{٢})^٢ + (\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢})^٢}$ = $\sqrt{٦٥١}$ نيوتن

∴ ظا هـ = $\frac{١٩}{٣٩}\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٩َ ٤٠°

أى أن المحصلة بين أحـ ، أء وتصنع زاوية قياسها ٩َ ٤٠° مع أب

١٦



بفرض أب فى اتجاه و س

∴ س = ٢ جتا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ × ١ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$

× ٠ + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤$\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ ٢$\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°

= ٢ × ٠ + ٤$\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢$\sqrt{٣}$

× ١ + ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠$\sqrt{٣}$

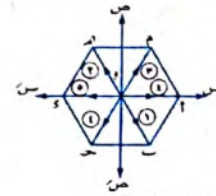
∴ ح = ١٠ س + ١٠$\sqrt{٣}$ ص

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$ = ٢٠ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة ٢٠ ث.كجم واتجاهها يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع أب

١٧



بفرض و أ فى اتجاه و س

∴ س = ٤ جتا ٠° + ٣ جتا ٦٠° + ٢ جتا ١٢٠°

+ ٥ جتا ١٨٠° + ٤ جتا ٢٤٠° + جتا ٣٠٠°

= ٤ × ١ + ٣ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ × $\frac{-١}{٢}$

+ ٥ × -١ + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = -٢

، ص = ٤ جا ٠° + ٣ جا ٦٠° + ٢ جا ١٢٠°

+ ٥ جا ١٨٠° + ٤ جا ٢٤٠° + جا ٣٠٠°

= ٤ × صفر + ٣ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

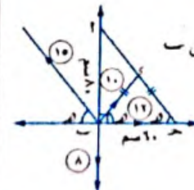
+ ٥ × صفر + ٤ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = صفر

∴ ح = -٢ س

∴ مقدار المحصلة ٢ ث.جم وتعمل فى اتجاه و سَ

أى فى اتجاه و ء

١٨



فى Δ أ ب حـ القائم الزاوية فى ب

أحـ = $\sqrt{(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢}$

= ١٠٠ سم

∴ جا هـ = $\frac{٨٠}{١٠٠}$ = $\frac{٤}{٥}$

، جتا هـ = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ١٢ جتا ٠° + ١٠ جتا هـ

+ ١٥ جتا (١٨٠° - هـ) + ٨ جتا ٢٧٠°

= ١٢ × ١ + ١٠ × $\frac{٣}{٥}$ + ١٥ × $\frac{-٣}{٥}$

+ ٨ × صفر = ٩

، ص = ١٢ جا ٠° + ١٠ جا هـ

+ ١٥ جا (١٨٠° - هـ) + ٨ جا ٢٧٠°

= ١٢ × صفر + ١٠ × $\frac{٤}{٥}$ + ١٥ × $\frac{٤}{٥}$

+ ٨ × -١ = ١٢

∴ ح = ٩ س + ١٢ ص

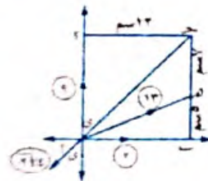
∴ ح = $\sqrt{(٩)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٥ نيوتن

، ظا ى = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$

، ∵ ظا ى = ظا هـ ، س > ٠ ، ص > ٠

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه ب ء

١٩



∵ Δ أ هـ ب قائم الزاوية فى ب

∴ أهـ = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

∴ جا (∠ب أ هـ) = $\frac{٥}{١٣}$ ، جتا (∠ب أ هـ) = $\frac{١٢}{١٣}$

، ∵ أحـ قطر فى المربع أ ب حـ ء

∴ ى = ٤٥°

∴ س = ٢ × جتا ٠° + ١٣ × جتا (∠ب أ هـ)

+ ٩ × جتا ٩٠° + ٤$\sqrt{٢}$ × جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ٩ × صفر

+ ٤$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠

، ص = ٢ × جا ٠° + ١٣ × جا (∠ب أ هـ)

+ ٩ × جا ٩٠° + ٤$\sqrt{٢}$ × جا ٢٢٥°

= ٢ × صفر + ١٣ × $\frac{٥}{١٣}$ + ٩ × ١

+ ٤$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠

∴ ح = ١٠ س + ١٠ ص

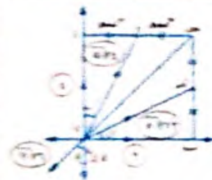
∴ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠)^٢}$ = ١٠$\sqrt{٢}$ ث.جم

، ظا هـ = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١

، ∵ س > ٠ ، ص > ٠

∴ المحصلة تعمل فى اتجاه أحـ

٢٠



∵ أحـ قطر فى المربع

∴ ق(∠حـ أ ء) = ٤٥°

، ∵ Δ أ ب هـ قائم الزاوية فى ب

∴ أهـ = $\sqrt{(٦)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣$\sqrt{٥}$ سم

∴ جا ى = $\frac{٣}{٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ ، جتا ى = $\frac{٦}{٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

، فى Δ أ و ء القائم الزاوية فى ء

أو = $\sqrt{٣^٢ + ٦^٢}$ = ٣$\sqrt{٥}$ سم

∴ جا ر = $\frac{٦}{٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ ، جتا ر = $\frac{٣}{٣\sqrt{٥}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٥}}$

∴ س = ٢ جتا ٠° + ١٢$\sqrt{٥}$ جتا ى

+ ٤$\sqrt{٥}$ جتا (٩٠° - ر) + [illegible]

+ ٦$\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° = ٢ × ١

+ ١٢$\sqrt{٥}$ × $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ + ٤$\sqrt{٥}$ × $\frac{١}{\sqrt{٥}}$ + ٤ × صفر

+ ٦$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ٢٤

، ص = ٢ جا ٠° + ١٢√٥ جا ى
+ ٤√٥ جا (٩٠° − ى) + ٤ جا ٩٠°
+ ٦√٢ جا ٢٢٥° = ٢ × ٠ + ١٢√٥ × ١/√٥
+ ٤√٥ × ٢/√٥ + ٤ × ١ + ٦√٢ × −١/√٢ = ١٨
∴ ح⃗ = ٢٤ س⃗ + ١٨ ص⃗
∴ ح = √((٢٤)² + (١٨)²) = ٣٠ ث.كجم
، ظا ه = ١٨/٢٤ = ٣/٤
، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ه ≃ ٣٦° ٥٢َ ١٢ً
∴ المحصلة مقدارها ٣٠ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٣٦° ٥٢َ ١٢ً مع أب⃗

٢١

∵ القوى متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠
∴ ٤ جتا ٠° + ٤√٢ جتا (د أ ب هـ) + ق جتا ٩٠°
+ ١٠√٢ جتا ٢٢٥° = ٠
∴ ٤ × ١ + ٤√٢ جتا (د أ ب هـ) + ق × صفر
+ ١٠√٢ × −١/√٢ = ٠
∴ ٤ + ٤√٢ جتا (د أ ب هـ) − ١٠ = ٠
∴ جتا (د أ ب هـ) = ٦/(٤√٢) = √٢/٢
∴ ق(د أ ب هـ) = ٣٠°
، ٤ جا ٠° + ٤√٢ جا ٣٠° + ق جا ٩٠°
+ ١٠√٢ جا ٢٢٥° = ٠
∴ ٤ × ٠ + ٤√٢ × ١/٢ + ق × ١ + ١٠√٢ × −١/√٢ = ٠
∴ ٢√٣ + ق − ١٠ = ٠
∴ ق = ١٠ − ٢√٣ = ٢ (٥ − √٣) ث.كجم

٢٢

* تعتبر القوة التي مقدارها ٥ ث.كجم تعمل في اتجاه و س⃗
، ∵ القوى متزنة ∴ س = ص = ٠
∴ س = ٥ جتا ٠° + ٤ جتا ٦٠° + ق جتا ١٢٠°
+ ٣ جتا ١٨٠° + ك جتا ٢٤٠° + ٧ جتا ٣٠٠° = ٠
∴ ٥ × ١ + ٤ × ١/٢ + ق × −١/٢ + ٣ × −١ + ك
× −١/٢ + ٧ × ١/٢ = ٠
∴ ق + ك = ١٥ (١)
، ص = ٥ جا ٠° + ٤ جا ٦٠° + ق جا ١٢٠°
+ ٣ جا ١٨٠° + ك جا ٢٤٠° + ٧ جا ٣٠٠° = ٠
∴ ٥ × ٠ + ٤ × √٣/٢ + ق × √٣/٢ + ٣ × ٠
+ ك × −√٣/٢ + ٧ × −√٣/٢ = ٠
∴ ق − ك = ٣ (٢) بحل المعادلتين (١) ، (٢)
∴ ق = ٩ ث.كجم ، ك = ٦ ث.كجم

٢٣

∵ س = ق جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠°
+ ٤√٢ جتا ١٣٥°
+ ٥√٢ جتا ٢٢٥°
+ ك جتا ٢٧٠°
= ق × ١ + ٦ × صفر
+ ٤√٢ × −١/√٢ + ٥√٢ × −١/√٢
+ ك × صفر = ق − ٩

، ص = ق جا ٠° + ٦ جا ٩٠°
+ ٤√٢ جا ١٣٥° + ٥√٢ جا ٢٢٥°
+ ك جا ٢٧٠°
= ق × صفر + ٦ × ١ + ٤√٢ × ١/√٢
+ ٥√٢ × −١/√٢ + ك × −١ = ٥ − ك
∴ ح⃗ = (ق − ٩) س⃗ + (٥ − ك) ص⃗
، ∵ محصلة القوى = ٢ نيوتن في اتجاه الشمال
∴ (ق − ٩) = صفر ∴ ق = ٩ نيوتن
، ٥ − ك = ٢ ∴ ك = ٣ نيوتن

٢٤

بفرض أن الزاوية القطبية للقوة ق قياسها ه
∴ س = ق جتا ه + ٤√٣ جتا ٩٠°
+ ١٢√٣ جتا ١٥٠° + ٣٦ جتا ٣٠٠°
= ق جتا ه + ٤√٣ × صفر
+ ١٢√٣ × −√٣/٢ + ٣٦ × ١/٢ = ق جتا ه
، ص = ق جا ه + ٤√٣ جا ٩٠°
+ ١٢√٣ جا ١٥٠° + ٣٦ جا ٣٠٠°
= ق جا ه + ٤√٣ × ١ + ١٢√٣ × ١/٢
+ ٣٦ × −√٣/٢ = ق جا ه − ٨√٣
∴ ح⃗ = ق جتا ه س⃗ + (ق جا ه − ٨√٣) ص⃗
، ∵ المحصلة = ٨ ث.جم وتعمل في اتجاه الشرق
∴ ق جتا ه = ٨ (١) ، ق جا ه = ٨√٣ (٢)
وبقسمة (٢) على (١) ∴ ظا ه = ٨√٣/٨ = √٣
، ∵ جتا ه > ٠ ، جا ه > ٠
∴ ه تقع في الربع الأول ∴ ه = ٦٠°
وبالتعويض في (١) : ∴ ق جتا ٦٠° = ٨
∴ ق = ١٦ ث.جم

٢٥

∵ س = ق جتا ٠° + ٨ جتا ٦٠°
+ ك جتا ٩٠°
+ ٥ جتا ١٨٠°
+ ٨√٣ جتا ٢٧٠°
= ق × ١ + ٨ × ١/٢ + ك × صفر
+ ٥ × −١ + ٨√٣ × صفر = ق − ١
، ص = ق جا ٠° + ٨ جا ٦٠° + ك جا ٩٠°
+ ٥ جا ١٨٠° + ٨√٣ جا ٢٧٠° = ق × صفر
+ ٨ × √٣/٢ + ك × ١ + ٥ × صفر
+ ٨√٣ × −١ = ك − ٤√٣
∴ ح⃗ = (ق − ١) س⃗ + (ك − ٤√٣) ص⃗ (١)
، ∵ ح = ٤ نيوتن في اتجاه ٦٠° شمال الشرق
∴ ح⃗ = ٤ جتا ٦٠° س⃗ + ٤ جا ٦٠° ص⃗
= ٢ س⃗ + ٢√٣ ص⃗ (٢)
من (١) ، (٢) : ∵ ق − ١ = ٢
∴ ق = ٣ نيوتن ، ك − ٤√٣ = ٢√٣
∴ ك = ٦√٣ نيوتن

٢٦

∵ س = ٢٥ جتا ى + ق جتا ٩٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٢٥ جتا ١٨٠° = ٢٥ × $\frac{٣}{٥}$ + ق × ٠ + ١٠ $\sqrt{٢}$

× $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ + ٢٥ × -١ = ١٥ - ١٠ - ٢٥ = -٣٠

، ص = ٢٥ جا ى + ق جا ٩٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ ٢٥ جا ١٨٠° = ٢٥ × $\frac{٤}{٥}$ + ق × ١ + ١٠ $\sqrt{٢}$

× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢٠ + ق + ١٠ = ٣٠ + ق

، ∵ ح² = س² + ص²

∴ (٥٠)² = (-٣٠)² + (٣٠ + ق)²

∴ ٢٥٠٠ = ٩٠٠ + ٩٠٠ + ٦٠ ق + ق²

∴ ٢٥٠٠ = ١٨٠٠ + ٦٠ ق + ق²

∴ ق² + ٦٠ ق - ٧٠٠ = ٠

∴ (ق + ٧٠) (ق - ١٠) = ٠

∴ ق = ١٠ ثقل جرام

٢٧

① ∵ س = ق جتا ٠° + ك جتا ١٢٠°

+ ٥ $\sqrt{٣}$ جتا ٢١٠° + ٧ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٣٠° = صفر

∴ ق × ١ + ك × -$\frac{١}{٢}$ + ٥ $\sqrt{٣}$ × -$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

+ ٧ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = صفر

∴ ق - $\frac{١}{٢}$ ك + ٣ = ٠ (١)

، ص = ق جا ٠° + ك جا ١٢٠°

+ ٥ $\sqrt{٣}$ جا ٢١٠° + ٧ $\sqrt{٣}$ جا ٣٣٠° = صفر

∴ ق × ٠ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٥ $\sqrt{٣}$ × -$\frac{١}{٢}$

+ ٧ $\sqrt{٣}$ × -$\frac{١}{٢}$ = صفر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٦ $\sqrt{٣}$ ∴ ك = ١٢ نيوتن

ومن (١) : ق = ٣ نيوتن.

② ∵ س = ٦ $\sqrt{٣}$ جتا ٠° + ق جتا ١٥٠°

+ ك جتا ٢١٠° = ٠

∴ ٦ $\sqrt{٣}$ × ١ + ق × -$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ك × -$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= صفر

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٦ $\sqrt{٣}$

∴ ق + ك = ١٢ (١)

، ص = ٦ $\sqrt{٣}$ جا ٠°

+ ق جا ١٥٠°

+ ك جا ٢١٠° = ٠

∴ ٦ $\sqrt{٣}$ × ٠ + ق

× $\frac{١}{٢}$ + ك × -$\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ ق - $\frac{١}{٢}$ ك = ٠

∴ ق - ك = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ق = ٦ ك = ٦

③ ∵ س = ق جتا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ك جتا ١٢٠°

+ ١٢ جتا ٢٤٠° = ٠

∴ ق × ١ + ٤ $\sqrt{٣}$

× $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ٠

+ ك × -$\frac{١}{٢}$ + ١٢ × -$\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ق - $\frac{١}{٢}$ ك = ٠ (١)

، ص = ق جا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠°

+ ك جا ١٢٠° + ١٢ جا ٢٤٠° = ٠

∴ ق × ٠ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ١

+ ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ١٢ × -$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ٢ $\sqrt{٣}$

∴ ك = ٤ ومن (١) : ∴ ق = ٢

٢٨

∵ س = ق جتا ٠° + ٣ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠° + $\sqrt{٣}$ جتا ٢٧٠°

= ق × ١ + ٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

+ ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ + $\sqrt{٣}$ × صفر = ق

، ص = ق جا ٠° + ٣ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جا ١٥٠° + $\sqrt{٣}$ جا ٢٧٠°

= ق × صفر + ٣ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$

+ $\sqrt{٣}$ × -١ = ٣

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ق $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

∴ (٣ $\sqrt{٢}$)² = ق² + ٣² ∴ ق² = ٩

∴ ق = ٣ نيوتن ∴ $\overrightarrow{ح}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

، ظا هـ = $\frac{٣}{٣}$ = ١ ∴ هـ = ٤٥°

∴ الزاوية بين خط عمل المحصلة والقوة الأولى قياسها ٤٥°

٢٩

∵ س = ٤ جتا ٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ق جتا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

+ ك جتا ١٢٠°

= ٤ × ١ + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ق × $\frac{١}{٢}$

+ ٢ $\sqrt{٣}$ × صفر + ك × -$\frac{١}{٢}$

= ٧ + $\frac{١}{٢}$ ق - $\frac{١}{٢}$ ك

، ص = ٤ جا ٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ق جا ٦٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ك جا ١٢٠°

= ٤ × صفر + ٢ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$

+ ق × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ١ + ك × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣ $\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك

∴ $\overrightarrow{ح}$ = (٧ + $\frac{١}{٢}$ ق - $\frac{١}{٢}$ ك) $\overrightarrow{س}$

+ (٣ $\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك) $\overrightarrow{ص}$ (١)

، ∵ المحصلة تساوي ٢٠ ث.كجم في اتجاه أء

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ٢٠ جتا ٦٠° $\overrightarrow{س}$ + ٢٠ جا ٦٠° $\overrightarrow{ص}$

= ١٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٧ + $\frac{١}{٢}$ ق - $\frac{١}{٢}$ ك = ١٠

∴ ق - ك = ٦ (٣)

، ٣ $\sqrt{٣}$ + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ق + ك = ١٤ (٤)

، بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ٢ ق = ٢٠

∴ ق = ١٠ ث.كجم ومنها ك = ٤ ث.كجم

٣٠

∵ هـ قياس زاوية حادة ، جا هـ = $\frac{٤}{٥}$

∴ جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٤ ق جتا (٩٠° - هـ) + ٢ ك جتا (٩٠° + هـ)

+ ٣ ق جتا (١٨٠° + هـ) + ك جتا (٣٦٠° - هـ)

$=$ ٤ ق جا هـ − ٢ ك جا هـ

− ٢ ق جتا هـ + ك جتا هـ

$=$ ٤ ق × $\frac{٤}{٥}$ − ٢ ك × $\frac{٤}{٥}$ − ٢ ق × $\frac{٣}{٥}$

+ ك × $\frac{٣}{٥}$ = ٢ ق − ك

، ص = ٤ ق جا (٩٠° − هـ) + ٢ ك جا (٩٠° + هـ)

+ ٢ ق جا (١٨٠° + هـ) + ك جا (٣٦٠° − هـ)

$=$ ٤ ق جتا هـ + ٢ ك جتا هـ − ٢ ق جا هـ

− ك جا هـ = ٤ ق × $\frac{٣}{٥}$ + ٢ ك × $\frac{٣}{٥}$

− ٢ ق × $\frac{٤}{٥}$ − ك × $\frac{٤}{٥}$ = $\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٢}{٥}$ ك

∴ $\overrightarrow{ح}$ = (٢ ق − ك) $\overrightarrow{س}$ + ($\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٢}{٥}$ ك) $\overrightarrow{ص}$ (١)

، ∵ $\overrightarrow{ح}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° $\overrightarrow{ص}$

$=$ − ٨ $\overrightarrow{س}$ + ٨ $\overrightarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ ٢ ق − ك = −٨ (٣)

، $\frac{٤}{٥}$ ق + $\frac{٢}{٥}$ ك = ٨

أى ٢ ق + ك = ٢٠ (٤)

بجمع (٣) ، (٤) : ∴ ٤ ق = ١٢

∴ ق = ٣ نيوتن ومن (٣) : ∴ ك = ١٤ نيوتن

٣١

∵ $\overrightarrow{ح}$ = (٥ + أ − ١٤) $\overrightarrow{س}$ + (٣ + ٦ + ب) $\overrightarrow{ص}$

$=$ (أ − ٩) $\overrightarrow{س}$ + (٩ + ب) $\overrightarrow{ص}$ (١)

، ∵ ح = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°)

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° $\overrightarrow{س}$

+ ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° $\overrightarrow{ص}$

$=$ −١٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\overrightarrow{ص}$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ٩ + ب = ١٠ ∴ ب = ١

إجابات تمارين 4

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

(١) (ب)	(٢) (ب)	(٣) (ب)	(٤) (جـ)	(٥) (جـ)
(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (جـ)	(٩) (جـ)	(١٠) (د)
(١١) (جـ)	(١٢) (أ)	(١٣) (جـ)	(١٤) (ب)	(١٥) (ب)
(١٦) (أ)	(١٧) (ب)	(١٨) (أ)	(١٩) (د)	(٢٠) (د)
(٢١) (د)	(٢٢) (د)	(٢٣) (ب)	(٢٤) (جـ)	(٢٥) (أ)
(٢٦) (جـ)	(٢٧) (د)	(٢٨) (ب)	(٢٩) (أ)	(٣٠) (ب)
(٣١) (ب)	(٣٢) (د)	(٣٣) (أ)	(٣٤) (ب)	(٣٥) (جـ)
(٣٦) (ب)				

ثانياً الأسئلة المقالية

١

∵ القوى تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة فى اتجاه دورى واحد

∴ القوى متزنة

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

∴ $\frac{ق_١}{٣} = \frac{ق_٢}{٤} = \frac{٧٥}{٥}$ ∴ $ق_١ = \frac{٣ \times ٧٥}{٥}$ = ٤٥ نيوتن

، $ق_٢ = \frac{٤ \times ٧٥}{٥}$ = ٦٠ نيوتن

٢

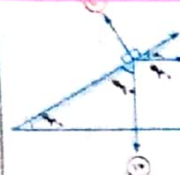
بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{٦٠}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{ك}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°}$

∴ ق = ٣٠ نيوتن.

، ك = ٣٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

٣



بتطبيق قاعدة لامى :

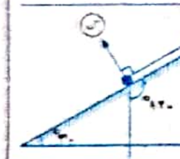
$\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{ر}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{١٢}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ $\frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ر}{١} = \frac{١٢}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ق = $\frac{١٢ \times \frac{١}{٢}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ ث كجم

، ر = $\frac{١٢}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ ث كجم

٤



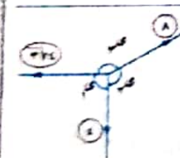
بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{٣٦}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{و}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{ر}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ و = $\frac{٣٦ \text{ جا } ٩٠°}{\text{جا } ١٥٠°}$ = ٧٢ نيوتن

، ر = $\frac{٣٦ \text{ جا } ١٢٠°}{\text{جا } ١٥٠°}$ = ٣٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٥



∵ القوى الثلاثة متزنة

∴ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ تساوى فى المقدار $ق_١$

∴ $(٨)^٢ = (٤\sqrt{٣})^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٤\sqrt{٣} \times ٤$ جتا $ى_١$

∴ ٦٤ = ٦٤ + ٣٢ $\sqrt{٣}$ جتا $ى_١$

∴ جتا $ى_١$ = صفر ∴ $ى_١$ = ٩٠°

، محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ تساوى فى المقدار $ق_٣$

∴ $(٤\sqrt{٣})^٢ = (٨)^٢ + (٤)^٢ + ٢ \times ٨ \times ٤$ جتا $ى_٢$

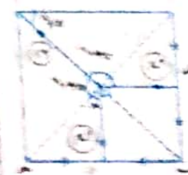
∴ ٤٨ = ٨٠ + ٦٤ جتا $ى_٢$

∴ جتا $ى_٢$ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ $ى_٢$ = ١٢٠°

∴ $ى_٣$ = ٣٦٠° − (٩٠° + ١٢٠°) = ١٥٠°

∴ قياسات الزوايا هى ٩٠° ، ١٢٠° ، ١٥٠°

٦



من هندسة الشكل :

∴ ق (∠ هـ م ج) = ٩٠°

، ق (∠ ء م هـ) = ق (∠ ء م ج) [illegible]

$=$ ١٣٥°

وبتطبيق قاعدة لامى

∴ $\frac{ش_١}{\text{جا } ١٣٥°} = \frac{ش_٢}{\text{جا } ١٣٥°} = \frac{٤٢}{\text{جا } ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{ش_٢}{\frac{١}{\sqrt{٢}}} = \frac{٤٢}{١}$

∴ $ش_١ = ش_٢ = ٤٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = ٢١ $\sqrt{٢}$ ث جم

٧



من هندسة الشكل

، وبتطبيق قاعدة لامى

∴ $\frac{ش_١}{\text{جا } ١٣٠°} = \frac{ش_٢}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{١٠}{\text{جا } ١١٠°}$

∴ $ش_١ = \frac{١٠ \times \text{جا } ١٣٠°}{\text{جا } ١١٠°}$ = ٨,١٥ نيوتن

، $ش_٢ = \frac{١٠ \times \text{جا } ١٢٠°}{\text{جا } ١١٠°}$ = ٩,٢١٦ نيوتن

٨



من هندسة الشكل :

$\overline{وء} \perp \overline{أب}$ ، ء منتصف $\overline{أب}$

∴ $(وء)^٢ = (٢٠)^٢ - (١٦)^٢$ = ١٤٤

∴ وء = ١٢ سم

، ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ، برسم $\overline{ءهـ} \parallel \overline{ءب}$

∴ هـ منتصف $\overline{أو}$ ، ءهـ = $\frac{١}{٢}$ و ب

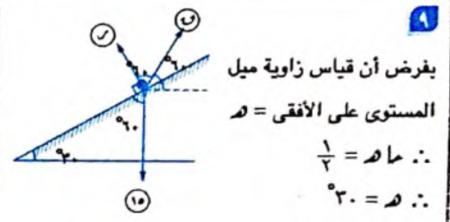
∴ هـ ء = ١٠ سم ، ءهـ = ١٠ سم

∴ △ ء و هـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{١٠٠}{ءو} = \frac{ش_١}{هـو} = \frac{ش_٢}{ءهـ}$ ∴ $\frac{١٠٠}{١٢} = \frac{ش_١}{١٠} = \frac{ش_٢}{١٠}$

∴ $ش_١ = ش_٢ = \frac{١٠٠ \times ١٠}{١٢}$ = [illegible] ث كجم

9



بفرض أن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي = ه

$\therefore$ حا ه $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ ه $= 30°$

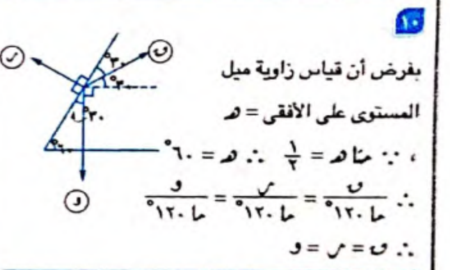
وبتطبيق قاعدة لامي :

$\therefore \frac{ق}{حا 150°} = \frac{ر}{حا 150°} = \frac{15}{حا 60°}$

$\therefore \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ر}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore ق = ر = \frac{15 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\sqrt{3}$ ث.كجم

10



بفرض أن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي = ه

، $\because$ حا ه $= \frac{1}{2}$ $\therefore$ ه $= 30°$

$\therefore \frac{ق}{حا 120°} = \frac{ر}{حا 120°} = \frac{و}{حا 120°}$

$\therefore$ ق = ر = و

11

$\because (60)^2 + (80)^2 = (100)^2$

$\therefore \Delta$ أ ب ح قائم الزاوية في ح

، من قاعدة لامي : $\therefore \frac{200}{حا 90°} = \frac{ش_1}{حا ه_1} = \frac{ش_2}{حا ه_2}$

، $\because$ حا $ه_1 = \frac{ب ح}{أ ب} = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

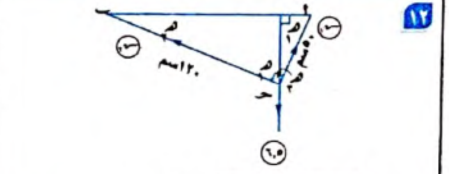
، حا $ه_2 = \frac{أ ح}{أ ب} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$

$\therefore \frac{200}{1} = \frac{ش_1}{\frac{4}{5}} = \frac{ش_2}{\frac{3}{5}}$

$\therefore ش_1 = 200 \times \frac{4}{5} = 160$ ث جم

، $ش_2 = 200 \times \frac{3}{5} = 120$ ث جم

12



أ ب $= \sqrt{(50)^2 + (120)^2} = 130$ سم

، من قاعدة لامي : $\therefore \frac{6.5}{حا 90°} = \frac{ش_1}{حا ه_1} = \frac{ش_2}{حا ه_2}$

، $\because$ حا $ه_1 = \frac{ب ح}{أ ب} = \frac{120}{130} = \frac{12}{13}$

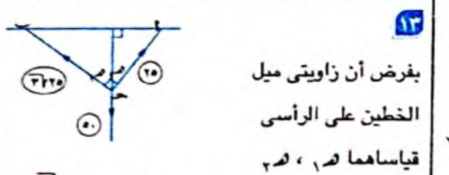
، حا $ه_2 = \frac{أ ح}{أ ب} = \frac{50}{130} = \frac{5}{13}$

$\therefore \frac{6.5}{1} = \frac{ش_1}{\frac{12}{13}} = \frac{ش_2}{\frac{5}{13}}$

$\therefore ش_1 = 6.5 \times \frac{12}{13} = 6$ نيوتن

، $ش_2 = 6.5 \times \frac{5}{13} = 2.5$ نيوتن

13



بفرض أن زاويتي ميل الخطين على الرأسي قياساهما $ه_1$ ، $ه_2$

ومن قاعدة لامي : $\therefore \frac{50}{حا 90°} = \frac{25}{حا ه_1} = \frac{25\sqrt{3}}{حا ه_2}$

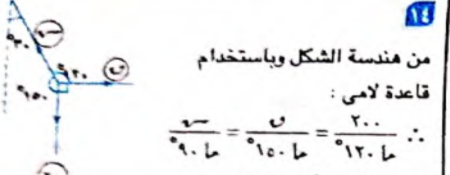
$\therefore$ حا $ه_1 = \frac{25 \times حا 90°}{50} = \frac{1}{2}$ $\therefore ه_1 = 30°$

، حا $ه_2 = \frac{25\sqrt{3} \times حا 90°}{50} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore ه_2 = 60°$

$\therefore$ زاويتا ميل الخطين على الرأسي قياساهما $30°$ ، $60°$

14



من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامي :

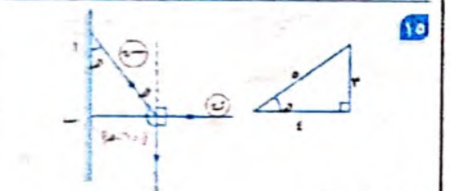
$\therefore \frac{200}{حا 120°} = \frac{ق}{حا 150°} = \frac{ش}{حا 90°}$

$\therefore \frac{200}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{1}$

$\therefore ق = \frac{200 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{200\sqrt{3}}{3}$ ث جم

، $ش = \frac{200 \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{400\sqrt{3}}{3}$ ث جم

15



من قاعدة لامي :

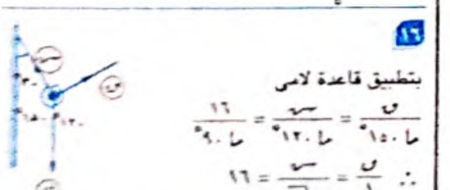
$\therefore \frac{60}{حا (90° + ه)} = \frac{ق}{حا (180° - ه)} = \frac{ش}{حا 90°}$

$\therefore \frac{60}{جتا ه} = \frac{ق}{حا ه} = \frac{ش}{1}$ $\therefore \frac{60}{\frac{4}{5}} = \frac{ق}{\frac{3}{5}} = \frac{ش}{1}$

$\therefore ق = \frac{\frac{3}{5} \times 60}{\frac{4}{5}} = 45$ ثقل جم

، $ش = \frac{60}{\frac{4}{5}} = 75$ ثقل جم

16



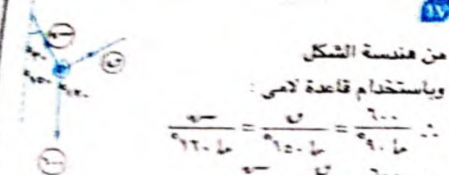
بتطبيق قاعدة لامي :

$\frac{ق}{حا 150°} = \frac{ش}{حا 120°} = \frac{16}{حا 90°}$

$\therefore \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16$

$\therefore$ ق = 8 نيوتن ، ش $= 8\sqrt{3}$ نيوتن

17



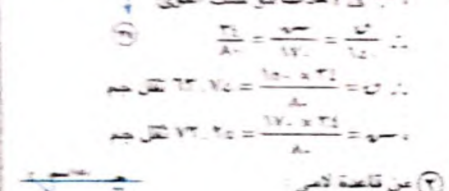
من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامي :

$\therefore \frac{600}{حا 90°} = \frac{ق}{حا 150°} = \frac{ش}{حا 120°}$

$\therefore \frac{600}{1} = \frac{ق}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\therefore$ ق = 300 ث جم ، ش $= 300\sqrt{3}$ ث جم

18



(1) $\because$ أ ح $= \sqrt{(170)^2 - (80)^2}$

$= 150$ سم

، $\because \Delta$ أ ح ب هو مثلث القوى

$\therefore \frac{ق}{150} = \frac{ش}{170} = \frac{34}{80}$

$\therefore ق = \frac{34 \times 150}{80} = 63.75$ ثقل جم

، $ش = \frac{34 \times 170}{80} = 72.25$ ثقل جم

(2) من قاعدة لامي

$\therefore \frac{34}{حا 90°} = \frac{ق}{حا ه}$

$= \frac{ش}{حا (90° - ه)}$

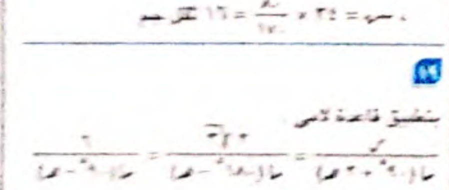
$\therefore \frac{34}{1} = \frac{ق}{حا ه} = \frac{ش}{جتا ه}$

$\therefore \frac{34}{1} = \frac{ق}{\frac{150}{170}} = \frac{ش}{\frac{80}{170}}$

$\therefore ق = 34 \times \frac{150}{170} = 30$ ثقل جم

، $ش = 34 \times \frac{80}{170} = 16$ ثقل جم

19



بتطبيق قاعدة لامي :

$\frac{ر}{حا (90° + ه)} = \frac{3\sqrt{3}}{حا (180° - ه)} = \frac{6}{حا (90° - ه)}$

$\therefore \frac{ر}{حا 2 ه} = \frac{3\sqrt{3}}{حا ه} = \frac{6}{جتا ه}$

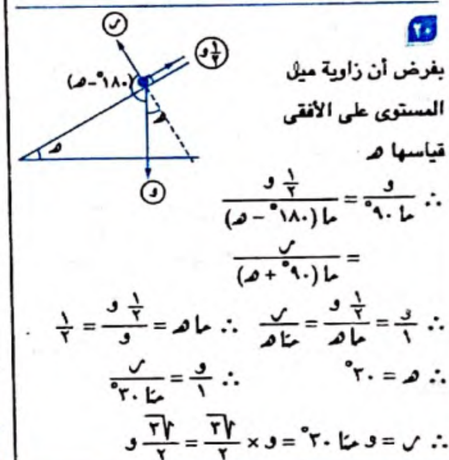
، ∵ $\frac{2\sqrt{3}}{\text{جا هـ}} = \frac{6}{\text{جتا هـ}}$

∴ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $\text{ظا هـ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ $\text{هـ} = 30^\circ$

∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جتا } 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{جا } 30^\circ}$ ∴ ر = $2\sqrt{3}$ نيوتن



٢٠

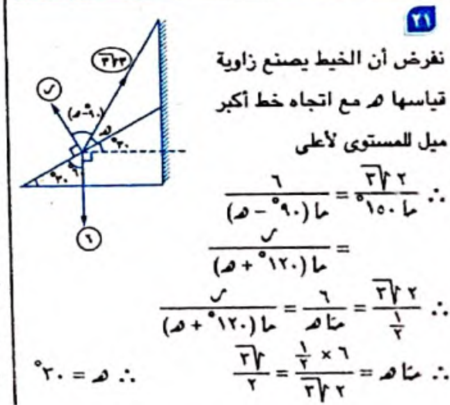
بفرض أن زاوية ميل المستوى على الأفقي قياسها هـ

∴ $\frac{\text{و}}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\text{ و}}{\text{جا}(180^\circ - \text{هـ})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(90^\circ + \text{هـ})}$

∴ $\frac{\text{و}}{1} = \frac{\frac{1}{2}\text{ و}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}}$ ∴ $\text{جا هـ} = \frac{\frac{1}{2}\text{ و}}{\text{و}} = \frac{1}{2}$

∴ $\text{هـ} = 30^\circ$ ∴ $\frac{\text{و}}{1} = \frac{\text{ر}}{\text{جتا } 30^\circ}$

∴ $\text{ر} = \text{و جتا } 30^\circ = \text{و} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{ و}$



٢١

نفرض أن الخيط يصنع زاوية قياسها هـ مع اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

∴ $\frac{2\sqrt{3}}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{6}{\text{جا}(90^\circ - \text{هـ})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(120^\circ + \text{هـ})}$

∴ $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(120^\circ + \text{هـ})}$

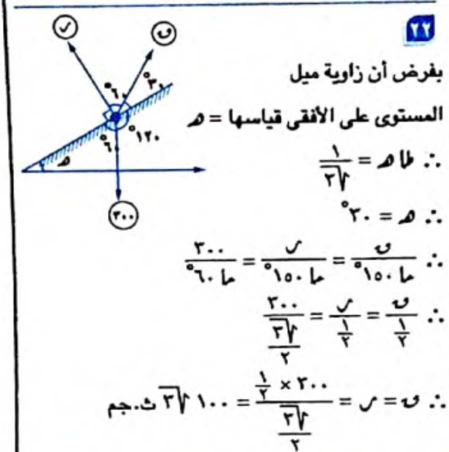
∴ $\text{جتا هـ} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ $\text{هـ} = 30^\circ$

∴ قياس الزاوية التي يصنعها الخيط مع المستوى = 30°

، ∵ $\frac{2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا}(120^\circ + 30^\circ)}$

∴ $\text{ر} = \frac{2\sqrt{3} \times \text{جا } 150^\circ}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{3}$ ث.كجم



٢٢

بفرض أن زاوية ميل المستوى على الأفقي قياسها = هـ

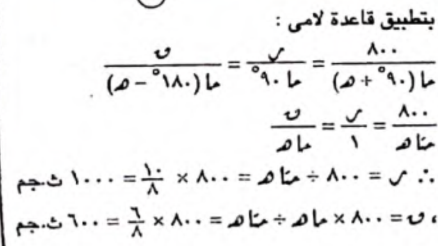
∴ $\text{ظا هـ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $\text{هـ} = 30^\circ$

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{300}{\text{جا } 60^\circ}$

∴ $\frac{\text{ق}}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ر}}{\frac{1}{2}} = \frac{300}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

∴ $\text{ق} = \text{ر} = \frac{300 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 100\sqrt{3}$ ث.جم



٢٣

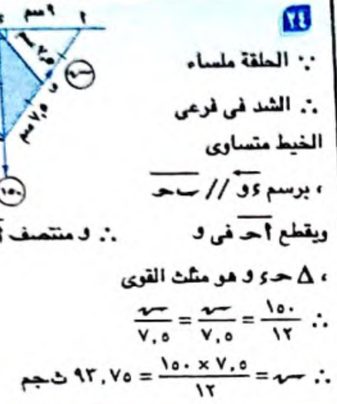
بتطبيق قاعدة لامي :

$\frac{800}{\text{جا}(90^\circ + \text{هـ})} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{\text{ق}}{\text{جا}(180^\circ - \text{هـ})}$

$\frac{800}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{ر}}{1} = \frac{\text{ق}}{\text{جا هـ}}$

∴ $\text{ر} = 800 \div \text{جتا هـ} = 800 \times \frac{10}{8} = 1000$ ث.جم

، $\text{ق} = 800 \times \text{جا هـ} \div \text{جتا هـ} = 800 \times \frac{6}{8} = 600$ ث.جم



٢٤

∵ الحلقة ملساء

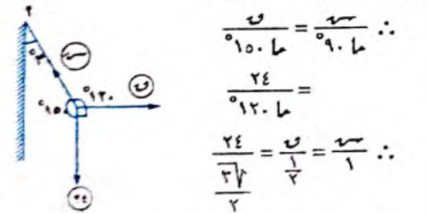
∴ الشد في فرعي الخيط متساوي

، برسم $\overleftrightarrow{\text{ء و}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ ويقطع $\overline{\text{أ حـ}}$ في و   ∴ و منتصف $\overline{\text{أ حـ}}$

، △ حـ ء و هو مثلث القوى

∴ $\frac{150}{12} = \frac{\text{ش}}{7.5} = \frac{\text{ش}}{7.5}$

∴ $\text{ش} = \frac{150 \times 7.5}{12} = 93.75$ ث.جم



٢٥

① ∵ $\text{أ ب} = \sqrt{(130)^2 - (50)^2} = 120$ سم

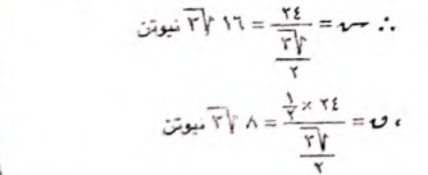
، من هندسة الشكل نجد أن :

△ أ ب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ش}}{130} = \frac{\text{ق}}{50} = \frac{24}{120}$

∴ $\text{ش} = \frac{24 \times 130}{120} = 26$ نيوتن

، $\text{ق} = \frac{24 \times 50}{120} = 10$ نيوتن



② باستخدام قاعدة لامي :

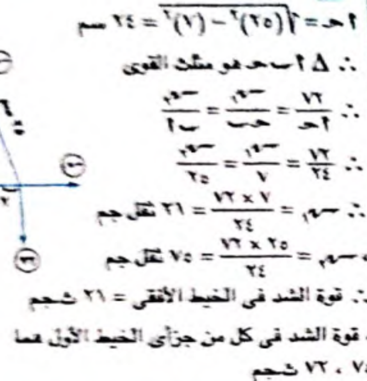
∴ $\frac{\text{ش}}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{\text{ق}}{\text{جا } 150^\circ}$

$= \frac{24}{\text{جا } 120^\circ}$

∴ $\frac{\text{ش}}{1} = \frac{\text{ق}}{\frac{1}{2}} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

∴ $\text{ش} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16\sqrt{3}$ نيوتن

، $\text{ق} = \frac{24 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}$ نيوتن



٢٦

$\text{أ حـ} = \sqrt{(25)^2 - (7)^2} = 24$ سم

∴ △ أ ب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{72}{\text{أ حـ}} = \frac{\text{ش}_1}{\text{حـ ب}} = \frac{\text{ش}_2}{\text{أ ب}}$

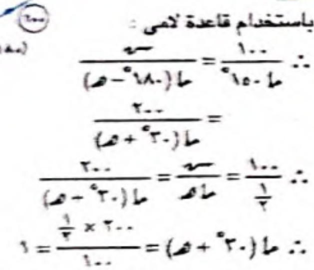
∴ $\frac{72}{24} = \frac{\text{ش}_1}{7} = \frac{\text{ش}_2}{25}$

∴ $\text{ش}_1 = \frac{72 \times 7}{24} = 21$ ثقل جم

، $\text{ش}_2 = \frac{72 \times 25}{24} = 75$ ثقل جم

∴ قوة الشد في الخيط الأفقي = ٢١ ث.جم

، قوة الشد في كل من جزأي الخيط الأول هما ٧٢ ، ٧٥ ث.جم



٢٧

باستخدام قاعدة لامي :

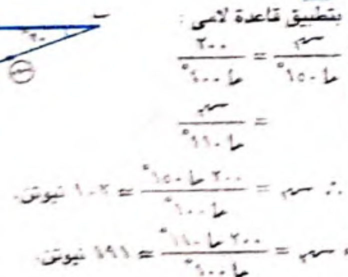
∴ $\frac{100}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا}(180^\circ - \text{هـ})} = \frac{200}{\text{جا}(30^\circ + \text{هـ})}$

∴ $\frac{100}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ش}}{\text{جا هـ}} = \frac{200}{\text{جا}(30^\circ + \text{هـ})}$

∴ $\text{جا}(30^\circ + \text{هـ}) = \frac{200 \times \frac{1}{2}}{100} = 1$

∴ $30^\circ + \text{هـ} = 90^\circ$ ∴ $\text{هـ} = 60^\circ$

∴ $\text{ش} = \frac{100 \times \text{جا } 60^\circ}{\frac{1}{2}} = 100\sqrt{3}$ ث.جم



٢٨

بتطبيق قاعدة لامي :

$\frac{\text{ش}_1}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{200}{\text{جا } 100^\circ} = \frac{\text{ش}_2}{\text{جا } 110^\circ}$

∴ $\text{ش}_1 = \frac{200 \text{ جا } 150^\circ}{\text{جا } 100^\circ} \approx 102$ نيوتن

، $\text{ش}_2 = \frac{200 \text{ جا } 110^\circ}{\text{جا } 100^\circ} \approx 191$ نيوتن

٢٩

من هندسة الشكل وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{\text{سـ}}{\text{جا } ١١٥^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا } ١٤٠^\circ} = \frac{٨٠}{\text{جا } ١٠٥^\circ}$$

∴ سـ ≃ ٧٥ نيوتن ، و ≃ ٥٣ نيوتن.

٣٠

سـ$_1$ = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

، سـ$_2$ = ٢٠ ث.كجم

وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{٢٠}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{هـ})} = \frac{\text{ك}}{\text{جا}(١٢٠^\circ - \text{هـ})}$$

$$\therefore \text{جتا هـ} = \frac{٢٠\sqrt{٣} \times \text{جا } ١٥٠^\circ}{٢٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\therefore \text{هـ} = ٣٠^\circ \text{ ، ك} = \frac{٢٠ \times \text{جا } ٩٠^\circ}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = ٤٠ \text{ ث.كجم}$$

ثالثًا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

سـ$_2$ = ٣٠٠ ث.جم

وباستخدام قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{\text{سـ}_1}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{٣٠٠}{\text{جا}(١٨٠^\circ - \text{هـ})} = \frac{٤٠٠}{\text{جا}(٩٠^\circ + \text{هـ})}$$

$$\therefore \frac{\text{سـ}_1}{١} = \frac{٣٠٠}{\text{جا هـ}} = \frac{٤٠٠}{\text{جتا هـ}}$$

$$\therefore \frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{٣٠٠}{٤٠٠} = \frac{٣}{٤}$$

∴ ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ هـ ≃ ٣٦° ٥٢َ

∴ زاوية ميل $\overline{\text{أب}}$ على الرأسى قياسها ≃ ٣٦° ٥٢َ

$$\therefore \frac{\text{سـ}_1}{١} = \frac{٣٠٠}{\frac{٣}{٥}} \quad \therefore \text{سـ}_1 = ٥٠٠ \text{ ث.جم}$$

٢

∵ القوى التى مقاديرها سـ$_1$ ، سـ$_3$ ، ك المتلاقية فى نقطة حـ متزنة

وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{\text{سـ}_1}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{\text{سـ}_3}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{\text{ك}}{\text{جا } ١٢٠^\circ}$$

$$\therefore \frac{\text{سـ}_1}{١} = \frac{\text{سـ}_3}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ك}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} \quad (١)$$

، ∵ القوى التى مقاديرها سـ$_2$ ، سـ$_3$ ، ٢٠ المتلاقية فى نقطة ء متزنة ، وبتطبيق قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{٢٠}{\text{جا } ١٥٠^\circ} = \frac{\text{سـ}_3}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{\text{سـ}_2}{\text{جا } ٩٠^\circ}$$

$$\therefore \frac{٢٠}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{سـ}_3}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}} = \frac{\text{سـ}_2}{١}$$

$$\therefore \text{سـ}_3 = \frac{٢٠ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٢٠\sqrt{٣} \text{ ث.كجم}$$

$$\text{، سـ}_2 = \frac{٢٠ \times ١}{\frac{١}{٢}} = ٤٠ \text{ ث.كجم}$$

وبالتعويض فى (١) :

$$\therefore \frac{\text{سـ}_1}{١} = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{\frac{١}{٢}} = \frac{\text{ك}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$$

∴ سـ$_1$ = ٤٠ $\sqrt{٣}$ ث.كجم

$$\text{، ك} = \frac{٢٠\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{١}{٢}} = ٦٠ \text{ ث.كجم}$$

٣

بفرض طول الحبل ٢ ل متر

• عند تثبيت الحبل من الموضعين أ ، ب

∴ ٢٠ = ٢ سـ$_1$ جتا هـ

$$\therefore \text{سـ}_1 = \frac{١٠}{\text{جتا هـ}} = ١٠ \times \frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{ل}^2 - ٤}} \quad (١)$$

• عند تثبيت الحبل من الموضعين حـ ، ء

∴ ٢٠ = ٢ سـ$_2$ جتا ى

$$\therefore \text{سـ}_2 = \frac{١٠}{\text{جتا ى}} = ١٠ \times \frac{\text{ل}}{\sqrt{\text{ل}^2 - ١}} \quad (٢)$$

من (١) ، (٢) : ∴ سـ$_1$ > سـ$_2$

أى أن : الشد فى الحبل فى حالة التعليق من أ ، ب أكبر منه فى حالة التعليق من حـ ، ء

إجابات تمارين 5

أولًا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ أولًا : (د) ثانيًا : (أ) ⑩ (ب) ⑪ (ب)

⑫ (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

Δ م أ ب مثلث القوى

حيث م أ = ٣٠ + ٢٠ = ٥٠ سم ، ب م = ٣٠ سم

∴ أ ب = ٤٠ سم (فيثاغورس)

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{ب م}} = \frac{\text{سـ}}{\text{أ م}} = \frac{٢٠٠}{\text{ب أ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}}{٣٠} = \frac{\text{سـ}}{٥٠} = \frac{٢٠٠}{٤٠}$$

$$\therefore \text{ر} = ٢٠٠ \times \frac{٣٠}{٤٠}$$

= ١٥٠ ثقل جم

$$\text{، سـ} = ٢٠٠ \times \frac{٥٠}{٤٠} = ٢٥٠ \text{ ثقل جم}$$

٢

∵ الحائط أملس

∴ $\overline{\text{ر}}$ ⊥ الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overline{\text{سـ}}$ يمر بالنقطة م

بتطبيق قاعدة لامى

$$\therefore \frac{\text{سـ}}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{١٠\sqrt{٣}}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{\text{ر}}{\text{جا } ١٥٠^\circ}$$

∴ سـ = ٢٠ ثقل جرام ، ر = ١٠ ثقل جرام

٣

∵ الحائط أملس ∴ $\overline{\text{ر}}$ ⊥ الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة ∴ $\overline{\text{سـ}}$ يمر بالنقطة م

∴ Δ أ ب م هو مثلث القوى

حيث أ م = ٢ نق

، م ب = نق ، أ ب = $\sqrt{٣}$ نق

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

$$\therefore \frac{\text{سـ}}{٢ \text{ نق}} = \frac{\text{ر}}{\text{نق}} = \frac{١٥}{\sqrt{٣} \text{ نق}}$$

∴ سـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ر = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ الضغط على الحائط = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٤

∵ الحائطان أملسان

∴ $\overline{\text{ر}_1}$ ، $\overline{\text{ر}_2}$ عموديان على الحائطين ويمران بمركز الكرة ،

بتطبيق قاعدة لامى

$$\therefore \frac{\text{ر}_1}{\text{جا } ١٢٠^\circ} = \frac{\text{ر}_2}{\text{جا } ٩٠^\circ} = \frac{٤٠}{\text{جا } ١٥٠^\circ}$$

∴ ر$_1$ (رد فعل المستوى الرأسى) = ٤٠ $\sqrt{٣}$ ثقل كجم

، ر$_2$ (رد فعل المستوى المائل) = ٨٠ ثقل كجم

٥

∵ المجموعة متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تقاطع ش١ ، ش٢ وهي حـ

∵ أحـ = $\frac{1}{2}$ أب

، د أحـ ب قائمة

∴ ق (د ب) = ٣٠°

∴ ق (د أ) = ق (د أحـ ء) = ٦٠°

∴ بتطبيق قاعدة لامي يكون :

$\frac{ش_1}{جا ١٥٠°} = \frac{ش_2}{جا ١٢٠°} = \frac{٣٠}{جا ٩٠°}$

∴ ش١ = ٣٠ × $\frac{1}{2}$ = ١٥ ثقل كجم.

، ش٢ = ٣٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٥ $\sqrt{3}$ ثقل كجم.

٦

∵ الشدين في الخيطين يتقاطعان عند نقطة التعليق

∴ خط عمل الوزن يجب أن يمر بنفس النقطة كما موضح بالرسم

، ∵ (أحـ)^2 + (بحـ)^2 = ١٦٩٠٠

، (أب)^2 = ١٦٩٠٠

∴ ق (د أحـ ب) = ٩٠°

∴ جا هـ١ = $\frac{١٢}{١٣}$ ، جا هـ٢ = $\frac{٥}{١٣}$

وبتطبيق قاعدة لامي :

∴ $\frac{ش_1}{جا هـ_1} = \frac{ش_2}{جا هـ_2} = \frac{٢٦}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{١٢}{١٣}} = \frac{ش_2}{\frac{٥}{١٣}}$ = ٢٦

∴ ش١ = ٢٤ نيوتن ، ش٢ = ١٠ نيوتن

٧

∵ مجموعة القوى متزنة ∴ ر يمر بالنقطة هـ

∵ ء منتصف أب ، ءهـ // أحـ

∴ هـ منتصف بحـ

، بحـ = ٦٠ $\sqrt{2}$ سم (فيثاغورس)

، Δ أهـ حـ

مثلث القوى حيث

أهـ = $\frac{1}{2}$ بحـ = ٣٠ $\sqrt{2}$ سم

، هـ حـ = ٣٠ $\sqrt{2}$ سم

، أحـ = ٦٠ سم

∴ $\frac{ر}{٣٠\sqrt{2}} = \frac{ش}{٣٠\sqrt{2}} = \frac{٤٠}{٦٠}$

∴ ر = ش = ٢٠ $\sqrt{2}$ نيوتن

٨

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر يمر بالنقطة هـ

∵ ءهـ // أحـ

∴ هـ منتصف بحـ

∴ أهـ ⊥ بحـ

∴ أهـ = ٤٠ سم (فيثاغورث)

، هـ حـ = ٤٠ $\sqrt{3}$ سم ، أحـ = ٨٠ سم

Δ أهـ حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{٤٠} = \frac{ش}{٤٠\sqrt{3}} = \frac{٢٤}{٨٠}$

∴ ر = ٤٠ × $\frac{٢٤}{٨٠}$ = ١٢ ثقل كجم.

، ش = ٤٠ $\sqrt{3}$ × $\frac{٢٤}{٨٠}$ = ١٢ $\sqrt{3}$ ثقل كجم.

٩

∵ القضيب مماس للكرة

، رد الفعل عمودي على القضيب

∴ ر١ ، ر٢ يمران بمركز الكرة

وبتطبيق قاعدة لامي :

∴ $\frac{ر_1}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_2}{جا ١٥٠°} = \frac{٦٠}{جا ٦٠°}$

∴ ر١ = ر٢ = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن.

∴ ض١ = ض٢ = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن.

١٠

∵ Δ م أ ب هو مثلث القوى

∴ $\frac{٥٠}{أم} = \frac{٢٥}{م ب} = \frac{و}{أب}$

∴ $\frac{أم}{م ب} = \frac{٥٠}{٢٥}$ = ٢

∴ أم = ٢ × ١٢ = ٢٤ سم

∴ طول الخيط حـ أ = ٢٤ - ١٢ = ١٢ سم

، من Δ م أ ب القائم الزاوية في ب

يكون أب = ١٢ $\sqrt{3}$ سم.

∴ $\frac{٢٥}{١٢} = \frac{و}{١٢\sqrt{3}}$ ∴ و = ٢٥ $\sqrt{3}$ نيوتن

١١

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تقاطع ش١ ، ش٢ وهي حـ

∵ الحبلين متعامدان

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية

∴ طول الحبل الآخر = ٦٤ سم

∴ جا هـ١ = $\frac{٤٨}{٨٠} = \frac{٣}{٥}$ ، جا هـ٢ = $\frac{٦٤}{٨٠} = \frac{٤}{٥}$

وبتطبيق قاعدة لامي : ∴ $\frac{ش_1}{جا هـ_1} = \frac{ش_2}{جا هـ_2} = \frac{١٢}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{٣}{٥}} = \frac{ش_2}{\frac{٤}{٥}}$ = ١٢ ∴ ش١ = ٧٫٢ نيوتن

، ش٢ = ٩٫٦ نيوتن

١٢

رد فعل الحائط الأملس يكون عموديًا على الحائط (ر١)

، وزن السلم يؤثر رأسيًا لأسفل وتلاقيا في نقطة (ء)

∴ رد فعل الأرض لابد وأن يمر بالنقطة (ء)

[illegible]

، من Δ ء م ب القائم الزاوية في م

يكون ب ء = [illegible] (فيثاغورس)

∵ Δ م ب ء هو مثلث القوى وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ [illegible]

∴ [illegible]

∴ ر١ = ١٥ ثقل كجم ، ر٢ = ٣٩ ثقل كجم

١٣

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر يمر بنقطة هـ

بحـ = ١٠٠ سم (فيثاغورس)

$\frac{ب ء}{ب أ} = \frac{ب هـ}{ب حـ} = \frac{هـ ء}{حـ أ}$

∴ $\frac{٢}{٣} = \frac{ب هـ}{١٠٠} = \frac{هـ ء}{٨٠}$

∴ ب هـ = $\frac{٢٠٠}{٣}$ سم ، هـ ء = $\frac{١٦٠}{٣}$ سم

∴ هـ حـ = $\frac{١٠٠}{٣}$ سم

من Δ أ ء هـ أهـ = $\frac{٢٠\sqrt{٧٣}}{٣}$ سم (فيثاغورس)

∴ Δ أهـ حـ هو مثلث القوى

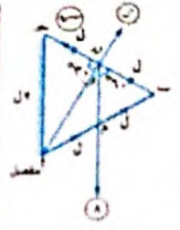
وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{\frac{٢٠\sqrt{٧٣}}{٣}} = \frac{ش}{\frac{١٠٠}{٣}} = \frac{١٦}{٨}$

∴ ر = $\frac{٤}{٣}$ $\sqrt{٧٣}$ ثقل كجم

، ش = $\frac{٢٠}{٣}$ = ٦ $\frac{٢}{٣}$ ثقل كجم

١٤



∵ القضيب متزن تحت تأثير ٣ قوى متلاقية في النقطة ن

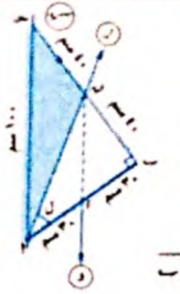
وباستخدام قاعدة لامي ينتج أن :

$\frac{\text{٨}}{\text{جا ٩٠°}} = \frac{\text{ش}}{\text{جا ١٥٠°}} = \frac{\text{ر}}{\text{جا ١٢٠°}}$

∴ $\frac{\text{٨}}{\text{١}} = \frac{\text{ش}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \frac{\text{ر}}{\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}}$

∴ ش = ٤ ثقل كجم ، ر = ٤ $\sqrt{\text{٣}}$ ثقل كجم

١٥



∵ مجموعة القوى متزنة

، الوزن (و)

، الشد (ش) تلاقيا في (ن)

∴ رد فعل المفصل لابد وأن يمر بالنقطة (ن)

، ∵ ءن // أحـ ، ء منتصف أب

∴ ن منتصف بحـ

∴ Δ أنحـ هو مثلث القوى حيث

نحـ = ٤٠ سم ، حـ أ = ١٠٠ سم

، ∵ (أحـ)$^{\text{٢}}$ = ١٠٠٠٠ ، (أب)$^{\text{٢}}$ + (بحـ)$^{\text{٢}}$ = ١٠٠٠٠

∴ ق (∠ب) = ٩٠° ∴ Δ نبأ قائم الزاوية

∴ أن = $\sqrt{(\text{٤٠})^{\text{٢}} + (\text{٦٠})^{\text{٢}}}$ = ٢٠ $\sqrt{\text{١٣}}$ سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى :

∴ $\frac{\text{ر}}{\text{٢٠}\sqrt{\text{١٣}}} = \frac{\text{ش}}{\text{٤٠}} = \frac{\text{و}}{\text{١٠٠}}$

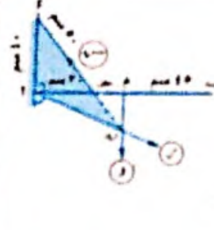
∴ ش = $\frac{\text{٢}}{\text{٥}}$ و ثقل كجم ، ر = $\frac{\sqrt{\text{١٣}}}{\text{٥}}$ و ثقل كجم

ونفرض أن ل هي زاوية ميل رد الفعل على القضيب

∴ في Δ نبأ القائم الزاوية في ب يكون

طا ل = $\frac{\text{٤٠}}{\text{٦٠}} = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ ∴ ق (∠ل) = ٣٣° ٤١َ

١٦



في Δ أءحـ

أء = $\sqrt{(\text{٥٠})^{\text{٢}} - (\text{٣٠})^{\text{٢}}}$

= ٤٠ سم

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر يمر بنقطة ن

ΔΔ حـ أء ، حـ م ن متشابهان لتساوي قياسات زواياهما

∴ $\frac{\text{حـ أ}}{\text{حـ م}} = \frac{\text{أء}}{\text{ن م}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{حـ ن}}$ ∴ $\frac{\text{٣٠}}{\text{١٥}} = \frac{\text{٤٠}}{\text{م ن}} = \frac{\text{٥٠}}{\text{حـ ن}}$

∴ م ن = ٢٠ سم ، حـ ن = ٢٥ سم

∴ ء ن = ٥٠ + ٢٥ = ٧٥ سم

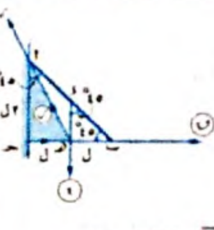
من Δ أ م ن يكون أن = ٥ $\sqrt{\text{٩٧}}$ سم (فيثاغورس)

، ∵ Δ أنء هو مثلث القوى

∴ $\frac{\text{ش}}{\text{٧٥}} = \frac{\text{ر}}{\text{٥}\sqrt{\text{٩٧}}} = \frac{\text{و}}{\text{٤٠}}$

∴ ش = $\frac{\text{١٥}}{\text{٨}}$ و ثقل كجم ، ر = $\frac{\sqrt{\text{٩٧}}}{\text{٨}}$ و ثقل كجم

١٧



∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر يمر بنقطة هـ

، بفرض أحـ = ٢ ل

∴ بحـ = ٢ ل

∴ هـ حـ = ل ، أهـ = $\sqrt{\text{٥}}$ ل (فيثاغورس)

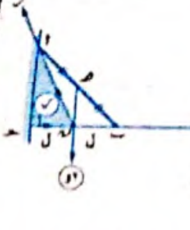
، ∵ Δ أهـ حـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{\text{٤}}{\text{٢ ل}} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{\text{٥}}\text{ ل}} = \frac{\text{ق}}{\text{ل}}$

∴ ق = ٢ ث.كجم ، ر = ٢ $\sqrt{\text{٥}}$ ث.كجم

١٨



بفرض وزن الساق ٢ و

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ر يمر بنقطة ن

∴ Δ أنحـ هو مثلث القوى

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{\text{٢ و}}{\text{أحـ}} = \frac{\text{ر}}{\text{أن}}$ ∴ أحـ = ٢ ل

، ∵ هـ منتصف أب ، هـ ن // أحـ

∴ ن منتصف بحـ ∴ بحـ = ٢ ل

∴ ق (∠بأحـ) = ٤٥°

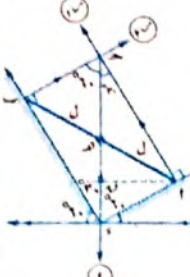
∴ الساق تميل على الرأسي بزاوية قياسها ٤٥°

، من Δ أنحـ أن = $\sqrt{\text{٥}}$ ل (فيثاغورس)

∴ $\frac{\text{و}}{\text{ل}} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{\text{٥}}\text{ ل}}$ ∴ ر = $\sqrt{\text{٥}}$ و

∴ رد الفعل = $\frac{\sqrt{\text{٥}}}{\text{٢}}$ وزن الساق

١٩



∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الوزن يمر بنقطة تلاقي ردي الفعل حـ

، ∵ الزاوية بين المستويين قائمة

وكلاً من ردي الفعل عمودي على المستوى الخارج منه

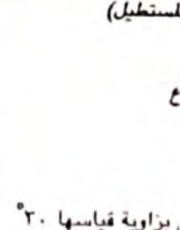
∴ أءبحـ مستطيل ∴ ق (∠أحـب) = ٩٠°

، بتطبيق قاعدة لامي :

∴ $\frac{\text{٤}}{\text{جا ٩٠°}} = \frac{\text{ر}_{\text{١}}}{\text{جا ١٢٠°}} = \frac{\text{ر}_{\text{٢}}}{\text{جا ١٥٠°}}$

∴ ر$_{\text{١}}$ = ٢ $\sqrt{\text{٣}}$ نيوتن ، ر$_{\text{٢}}$ = ٢ نيوتن

∴ ض$_{\text{١}}$ = ٢ $\sqrt{\text{٣}}$ نيوتن ، ض$_{\text{٢}}$ = ٢ نيوتن



، ∵ هـ أ = هـ ء (من خواص المستطيل)

، ق (∠أءهـ) = ٦٠°

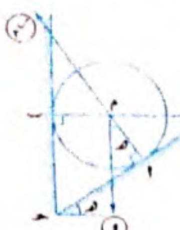
∴ Δ أهـ ء متساوي الأضلاع

∴ ق (∠هـ أء) = ٦٠°

∴ ق (∠هـ أن) = ٣٠°

∴ القضيب يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°

٢٠



ر$_{\text{١}}$ عمودي على بحـ

، ر$_{\text{٢}}$ عمودي على حـ أ وتلاقيا في م الذي يؤثر عنده وزن الكرة (و)

وبتطبيق قاعدة لامي ينتج أن :

$\frac{\text{ر}_{\text{١}}}{\text{جا (١٨٠° - هـ)}} = \frac{\text{ر}_{\text{٢}}}{\text{جا ٩٠°}} = \frac{\text{و}}{\text{جا (٩٠° + هـ)}}$

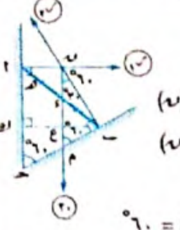
∴ $\frac{\text{ر}_{\text{١}}}{\text{جا هـ}} = \text{ر}_{\text{٢}} = \frac{\text{و}}{\text{جتا هـ}}$ ∴ $\frac{\text{ر}_{\text{١}}}{\frac{\text{٤}}{\text{٥}}} = \text{ر}_{\text{٢}} = \frac{\text{و}}{\frac{\text{٣}}{\text{٥}}}$

∴ ر$_{\text{١}}$ = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ و ثقل كجم ، ر$_{\text{٢}}$ = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ و ثقل كجم

∴ الضغط على الحائط = $\frac{\text{٤}}{\text{٣}}$ و ثقل كجم

، الضغط على المستوى المائل = $\frac{\text{٥}}{\text{٣}}$ و ثقل كجم

٢١



∵ مجموعة القوى متزنة

، ر$_{\text{١}}$ ، ر$_{\text{٢}}$ يتلاقيان في نقطة (ن)

∴ وزن القضيب يمر بالنقطة (ن)

، ∵ ن م // أحـ

∴ ق (∠ن م ب) = ق (∠حـ) = ٦٠°

∴ في Δ ن م ب : ق(∠ب) = ٩٠°

، ق(∠م) = ٦٠°   ∴ ق(∠م ن ب) = ٣٠°

وبتطبيق قاعدة لامي ينتج أن :

$$\frac{\text{ر}_1}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{\text{ر}_2}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{20}{\text{جا } 120^\circ}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}_1}{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ر}_2}{1} = \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

∴ $\text{ر}_1 = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ ثقل كجم ، $\text{ر}_2 = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ ثقل كجم

وبرسم $\overline{\text{ب ك}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$ ∴ $\overline{\text{ب ع}} \perp \overline{\text{ن م}}$

وبفرض أن ب ع = ل   ∴ ب ن = ٢ ل

، ن ع = $\sqrt{3}$ ل   ∴ أ ك = $\sqrt{3}$ ل

، ∴ ب ك = ٢ ل

∴ $\text{ظا}(\angle \text{ب أ ك}) = \text{ظا هـ} = \frac{\text{ب ك}}{\text{أ ك}} = \frac{2\text{ل}}{\sqrt{3}\text{ل}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

∴ ق(∠هـ) ≃ ٤٩ ٦°

٢٢

∵ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠ء أ حـ)

= ق(∠حـ ب ء) = ٩٠°

∴ الشكل أ حـ ب ء مستطيل

القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى

، ء هي نقطة تلاقي القوى

، بفرض قياس زاوية ميل المستوى الذي يستند عليه الطرف أ على الأفقي هي هـ_1 ، الذي يستند عليه الطرف ب هي هـ_2

وباستخدام قاعدة لامي :

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{جا}(90^\circ + \text{هـ}_1)} = \frac{4}{\text{جا}(90^\circ + \text{هـ}_2)} = \frac{8}{\text{جا } 90^\circ}$$

∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جتا هـ}_1} = \frac{4}{\text{جتا هـ}_2} = 8$ ∴ $\text{جتا هـ}_2 = \frac{1}{2}$

∴ $\text{ق}(\angle \text{هـ}_2) = 60^\circ$ ∴ $\text{ق}(\angle \text{هـ}_1) = 30^\circ$

∴ ر = ٨ جتا ٣٠° = ٤ $\sqrt{3}$ نيوتن

∴ الضغط على المستوى عند أ = ٤ $\sqrt{3}$ نيوتن

٢٣

∵ المستوى المائل أملس

∴ رد فعل المستوى عند أ

يكون عموديًا على المستوى

لذلك فهو يمر بمركز الكرة (م)

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ الشد في الخيط يمر بالنقطة (م)

في Δ م أ ب : ∵ ق(∠أ) = ٩٠° ، م أ = $\frac{1}{2}$ ب م

∴ هـ = ٣٠°

∴ ق(∠م ب أ) = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقي

∴ الخيط $\overline{\text{م ب}}$ يكون أفقيًا وبتطبيق قاعدة لامي ينتج أن :

$$\frac{\text{ر}}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{12\sqrt{3}}{\text{جا } 120^\circ}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}}{1} = \frac{\text{ش}}{\frac{1}{2}} = \frac{12\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$ ∴ ر = ٢ ش = ٢٤

∴ الشد في الخيط (ش) = ١٢ ثقل كجم.

، رد فعل المستوى (ر) = ٢٤ ثقل كجم.

٢٤

بفرض وزن القضيب (٢ و) ووزن الثقل (و)

∵ مجموعة القوى متزنة

∴ $\overleftrightarrow{\text{ر}}$ يمر بنقطة تلاقي وزن القضيب والشد في الخيط وهي ء

، ∵ ن منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ء}} // \overline{\text{أ حـ}}$

∴ ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ أ ب = أ حـ   ∴ $\overline{\text{أ ء}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

وبتطبيق قاعدة لامي :

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{جا}(180^\circ - \text{ى})} = \frac{2\text{و}}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(90^\circ + \text{ى})}$$

∴ $2\text{و} = \frac{\text{و}}{\text{جتا ى}}$ ∴ جتا ى = $\frac{1}{2}$ ∴ ى = ٦٠°

∴ ق(∠ب حـ أ) = ٦٠° ، ∵ أ ب = أ حـ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ب أ حـ) = ٦٠°   ∴ ق(∠ب أ هـ) = ٣٠°

∴ زاوية ميل القضيب على الأفقي قياسها ٣٠°

٢٥

∵ الحائط أملس

∴ $\overleftrightarrow{\text{ر}}$ عمودي على الحائط

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ خط عمل الشد يمر بنقطة تلاقي رد الفعل والوزن وهي (و)

من Δ أ و ن القائم الزاوية في و

و ن = $\frac{1}{2}$ أ ن = ١٠ سم

∴ ∠ و ن أ خارجة عن المثلث المتساوي الساقين و ن حـ حيث و ن = ن حـ = ١٠ سم

∴ ق(∠حـ و ن) = ٣٠°

وبتطبيق قاعدة لامي : ∴ $\frac{\text{ر}}{\text{جا } 150^\circ} = \frac{\text{ش}}{\text{جا } 90^\circ} = \frac{12}{\text{جا } 120^\circ}$

∴ ر = ٤ $\sqrt{3}$ نيوتن ، ش = ٨ $\sqrt{3}$ نيوتن

٢٦

∵ أ حـ = أ ء = ٤ متر

∴ ق(∠أ حـ ء) = ٤٥°

∴ حـ ء = ٤ $\sqrt{2}$ متر

من Δ م حـ ن : م ن = ١ متر ، ن حـ = $\sqrt{2}$ متر

∴ ء ن = ٤ $\sqrt{2}$ − $\sqrt{2}$ = ٣ $\sqrt{2}$ متر

، من Δ أ م ن : أ ن = $\sqrt{10}$ متر (فيثاغورس)

وحيث إن Δ أ ن ء هو مثلث القوى

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\sqrt{10}} = \frac{\text{ش}}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{4}$$

∴ ر = ٢ $\sqrt{10}$ ثقل كجم ، ش = ٦ $\sqrt{2}$ ثقل كجم

٢٧

∵ الجسم متزن   ∴ ح س = ٠ ، ح ص = ٠

∴ ق جتا ى + ر جتا ٩٠° + ١٠٠ جتا (٢٧٠° − هـ) = ٠

∴ ق × $\frac{12}{13}$ + ر × ٠ + ١٠٠ × (− جا هـ) = ٠

∴ $\frac{12}{13}$ ق − ١٠٠ × $\frac{3}{5}$ = ٠

∴ ق = ٦٥ نيوتن

، ق جا ى + ر جا ٩٠° + ١٠٠ جا (٢٧٠° − هـ) = ٠

∴ ٦٥ × $\frac{5}{13}$ + ر × ١ + ١٠٠ × (− جتا هـ) = ٠

∴ ٢٥ + ر − ١٠٠ × $\frac{4}{5}$ = ٠   ∴ ر = ٥٥ نيوتن

٢٨

∵ الجسم متزن ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ٥٠ جتا ٠° + ٢٠ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ر جتا ٩٠° + و جتا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥٠ × ١ + ٢٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ر × صفر − و × $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ ٥٠ + ٣٠ − $\frac{١}{٢}$ و = ٠ ∴ و = ١٦٠ نيوتن

، ٥٠ جا ٠° + ٢٠ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ر جا ٩٠° + و جا ٢٤٠° = ٠

∴ ٥٠ × صفر + ٢٠ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ر × ١ − ١٦٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ ١٠ $\sqrt{٣}$ + ر − ٨٠ $\sqrt{٣}$ = ٠ ∴ ر = ٧٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٢٩

△ أ ب حـ فيه :

ق(∠ب) = ٩٠° ، أحـ + ب حـ = ٤٠

∴ أحـ = ٤٠ − ب حـ

، ∵ (أحـ)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ (٤٠ − ب حـ)^{٢} = (٢٠)^{٢} + (ب حـ)^{٢}

∴ ١٦٠٠ − ٨٠ ب حـ + (ب حـ)^{٢} = ٤٠٠ + (ب حـ)^{٢}

∴ ٨٠ ب حـ = ١٢٠٠

∴ ب حـ = ١٥ سم ، أحـ = ٢٥ سم

، ∵ الحلقة ملساء

∴ الشد في $\overline{\text{حـ أ}}$ = الشد في $\overline{\text{حـ ب}}$ = ش

، ∵ الحلقة متزنة ∴ س = ٠ ، ص = ٠

∴ ش جتا (٩٠° − هـ) + ش جتا ٩٠°

+ ق جتا ١٨٠° + ٤٠٠ جتا ٢٧٠° = ٠

∴ ش جا هـ + ش × ٠ + ق × (−١) + ٤٠٠ × ٠ = ٠

∴ ش × $\frac{٢٠}{٢٥}$ − ق = ٠

∴ ٤ ش − ٥ ق = ٠ (١)

، ش جا (٩٠° − هـ) + ش جا ٩٠°

+ ق جا ١٨٠° + ٤٠٠ جا ٢٧٠° = ٠

ش جتا هـ + ش × ١ + ق × ٠ + ٤٠٠ × (−١) = ٠

ش × $\frac{١٥}{٢٥}$ + ش − ٤٠٠ = ٠

$\frac{٨}{٥}$ ش = ٤٠٠ ∴ ش = ٢٥٠ ث جم

بالتعويض في (١) : ∴ ١٠٠٠ − ٥ ق = ٠

∴ ق = ٢٠٠ ث جم

إجابات تمارين

الهندسة والقياس



إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 6

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)
⑥ (د) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (د) ⑩ (د)
⑪ (أ) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)
⑯ (د) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (أ) ⑳ (جـ)
(٢١) (جـ) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (د) (٢٥) (د)
(٢٦) (د) (٢٧) (أ) (٢٨) (د) (٢٩) (د) (٣٠) (ب)
(٣١) (ب) (٣٢) (أ) (٣٣) (جـ)

(٣٤) أولاً : (جـ) ثانيًا : (أ)
ثالثًا : (ب) رابعًا : (د)

(٣٥) أولاً : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (جـ)

(٣٦) أولاً : (ب) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (د)

(٣٧) أولاً : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (أ)
خامسًا : (ب)

(٣٨) أولاً : (أ) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (جـ)

(٣٩) أولاً : (ب) ثانيًا : (د)
ثالثًا : (د) رابعًا : (جـ)
خامسًا : (د)

(٤٠) أولاً : (أ) ثانيًا : (ب)
ثالثًا : (جـ) رابعًا : (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① ٨ مستقيمات تحمل أحرفه
② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أم}$
③ ٥ مستويات تحمل أوجهه
④ المستويات : أ ب حـ ء ، أ ب م ، أ ء م

٢

① $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أأَ}$ ② $\overleftrightarrow{أب}$
③ أ ب بَ أَ ، أ ب حـ ء ، أ ء ءَ أَ
④ أ ب بَ أَ ، أ ب حـ ء ، أ ب حـَ ءَ

٣

① $\overleftrightarrow{أء}$ ، $\overleftrightarrow{أأَ}$ ، $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب بَ}$
② $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{ءحـ}$ ، $\overrightarrow{ءحـ}$
③ $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{بَحـ}$ ، $\overrightarrow{ءء}$ ، $\overrightarrow{حـحـ}$

٤

① عدد لا نهائى ② عدد لا نهائى
③ عدد لا نهائى ④ مستوى واحد فقط

٥

① (١) متخالفان (٢) متوازيان (٣) متخالفان
(٤) متوازيان (٥) متخالفان (٦) متقاطعان
② (١) متوازيان (٢) متقاطعان (٣) متقاطعان
③ $\sqrt{(٦\sqrt{٢})^{٢} + (٦)^{٢}} = ٦\sqrt{٣}$ سم

٦

① أ ∈ ل



② ل ⊂ س



③ ل ∩ س = {أ}



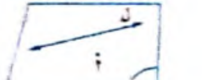


④ ل // س





⑤

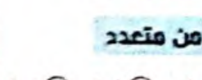
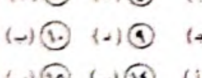
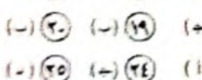


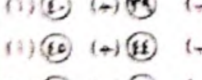
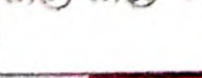
إجابات تمارين 7



أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (جـ) ② (ب) ③ (ب) ④ (ب) ⑤ (ب)
⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (د) ⑩ (ب)
⑪ (جـ) ⑫ (ب) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)
⑯ (ب) ⑰ (جـ) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (ب)
(٢١) (جـ) (٢٢) (د) (٢٣) (أ) (٢٤) (جـ) (٢٥) (د)
(٢٦) (أ) (٢٧) (ب) (٢٨) (أ) (٢٩) (أ) (٣٠) (د)
(٣١) (ب) (٣٢) (جـ) (٣٣) (جـ) (٣٤) (د) (٣٥) (أ)
(٣٦) (ب) (٣٧) (د) (٣٨) (ب) (٣٩) (جـ) (٤٠) (أ)
(٤١) (أ) (٤٢) (جـ) (٤٣) (ب) (٤٤) (جـ) (٤٥) (أ)
(٤٦) (جـ) (٤٧) (جـ) (٤٨) (د) (٤٩) (جـ) (٥٠) (جـ)
(٥١) (د) (٥٢) (ب)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① الأوجه = ٥ ② ٦ ③ ٥
④ ١٠ ⑤ ٦

، ∵ عدد الأوجه + عدد الرؤوس = ٦ + ٦ = ١٢
، عدد الأحرف + ٢ = ١٠ + ٢ = ١٢
∴ تحقق علاقة أويلر.

٢

∵ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم
∴ ن هـ = ٥ سم
، ∵ الهرم منتظم
∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن هـ}$
∴ الارتفاع الجانبى (م هـ) = $\sqrt{٥^{٢} + ١٢^{٢}}$ = ١٣ سم

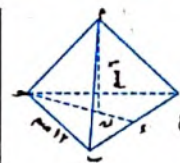
٣

∵ الهرم منتظم
∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن هـ}$
∴ ن هـ = $\sqrt{٢٥^{٢} - ٢٠^{٢}}$
= ١٥ سم
∴ ب حـ = ٣٠ سم ∴ طول قاعدة الهرم = ٣٠ سم

٤

∵ الهرم منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أ ن}$
∴ أ ن = $\sqrt{(٤\sqrt{٥})^{٢} - (٤\sqrt{٣})^{٢}}$
= $٤\sqrt{٢}$ سم
∴ أ حـ = $٨\sqrt{٢}$ سم
(قطر المربع)
∴ طول ضلع المربع = $\frac{٨\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ٨ سم

٥



نفرض ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ $\overline{حـ ء} \perp \overline{أب}$

∴ حـ ء = $\sqrt{(١٢)^٢ - (٦)^٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

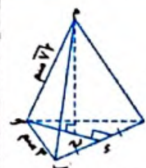
، ∵ ن نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ ن حـ = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٣}$ = ٤ $\sqrt{٣}$

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ م حـ = $\sqrt{٦^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ $\sqrt{٢١}$ سم

٦



بفرض ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ $\overline{حـ ء} \perp \overline{أب}$

∴ حـ ء = $\sqrt{(٣)^٢ - (١,٥)^٢}$ = $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن حـ}$

، ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

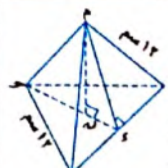
∴ حـ ن = $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ م ن = $\sqrt{(\sqrt{٧})^٢ - (\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٢ سم

٧



∵ بفرض ء منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ حـ ء = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن حـ}$

، ن نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب حـ

∴ حـ ن = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ Δ م ن حـ قائم الزاوية فى ن

∴ م ن = $\sqrt{١٢^٢ - (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

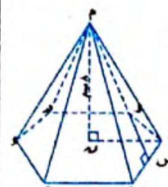
، ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ فى Δ أ ب م متساوى الأضلاع

∴ $\overline{م ء} \perp \overline{أ ء}$

∴ م ء = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٦^٢}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ٦ $\sqrt{٣}$ سم

٨



طول ضلع القاعدة = ٢٤ $\sqrt{٣}$ ÷ ٦

= ٤ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أ ن}$

، ن هى المركز الهندسى للقاعدة

∴ أ ن = طول ضلع القاعدة = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

∴ أ م = $\sqrt{٨^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٧}$ سم

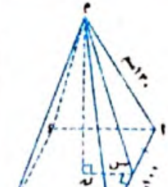
∴ طول حرف الهرم الجانبى = ٤ $\sqrt{٧}$ سم

وبفرض س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ = م ب ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

∴ م س = $\sqrt{(٤\sqrt{٧})^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠ سم

٩



بفرض س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ م أ = م ب

∴ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$

∴ م س = $\sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢}$

= ١٢٠ سم

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٢٠ سم

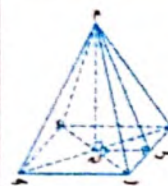
، ∵ الهرم منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن س}$

، ∵ ن المركز الهندسى للقاعدة ∴ ن س = ٥٠ سم

∴ م ن = $\sqrt{(١٢٠)^٢ - (٥٠)^٢}$ = ١٠ $\sqrt{١١٩}$ سم

∴ ارتفاع الهرم = ١٠ $\sqrt{١١٩}$ سم

١٠



شكل (١) : (هرم رباعى منتظم)

∵ الهرم منتظم

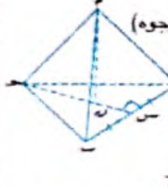
∴ $\overline{م ن} \perp \overline{س ن}$

، ن المركز الهندسى للقاعدة

∴ س ن = ٥ سم

∴ م ن = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

∴ ارتفاع الهرم = ١٢ سم



شكل (٢) : (هرم ثلاثى منتظم الوجوه)

بفرض س منتصف $\overline{أب}$

، ∵ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ $\overline{حـ س} \perp \overline{أب}$

∴ حـ س = $\sqrt{٦^٢ - ٣^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣}$ سم

، ∵ الهرم منتظم الوجوه ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن حـ}$

، ن هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث أ ب حـ

∴ ن حـ = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

، م ن = $\sqrt{٦^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٢ $\sqrt{٦}$

∴ ارتفاع الهرم = ٢ $\sqrt{٦}$ سم

١١



∵ الهرم منتظم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{س ن}$

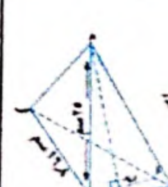
، ن هو المركز الهندسى للقاعدة

∴ س ن = ١١٦ متر

∴ م ن = $\sqrt{(١٨٦)^٢ - (١١٦)^٢}$ ≃ ١٤٥,٤ متر

∴ ارتفاع الهرم ≃ ١٤٥,٤ متر

١٢



∵ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ

∴ ب حـ = $\sqrt{(١٢,٦)^٢ + (١٦,٨)^٢}$

= ٢١ سم

، ∵ $\overline{أ ء}$ متوسط مرسوم من أ

∴ أ ء = نصف طول الوتر = ١٠,٥ سم

، ∵ الهرم قائم ∴ $\overline{م ن} \perp \overline{ن أ}$

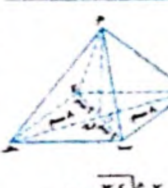
، ن نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ أ ن = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠,٥ = ٧ سم

، ∵ Δ م ن أ قائم فى ن

∴ الارتفاع (م ن) = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٧)^٢}$ = ٢٤ سم

١٣



∵ الهرم قائم

∴ $\overline{م ن} \perp \overline{أ حـ}$ ، $\overline{م ن} \perp \overline{ب ء}$

∴ م ب = م ء = $\sqrt{(١٠)^٢ + ٦^٢}$ = ٢ $\sqrt{٣٤}$ سم

، م أ = م حـ = $\sqrt{(١٠)^٢ + ٨^٢}$ = ٢ $\sqrt{٤١}$ سم

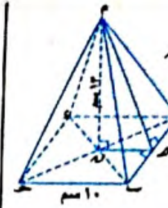
١٤

∵ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ١٨ × جا ٦٠°

= ٨١ $\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ٨١ $\sqrt{٣}$ × ١٢ = ٣٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^٣

١٥



① ∵ ارتفاع الهرم المنتظم هو م ن

∴ $\overline{مـ ن} \perp \overline{ن هـ}$

، ن هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٥ سم

∴ م هـ = $\sqrt{(١٢)^٢ + ٥^٢}$

= ١٣ سم

∴ الارتفاع الجانبي = ١٣ سم

② حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٠)^٢$ × ١٢ = ٤٠٠ سم^٣

③ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٠) × ١٣ + (١٠ × ١٠)

= ٢٦٠ + ١٠٠ = ٣٦٠ سم^٢

١٦

الارتفاع الجانبي = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$

= ٢٠ سم



① المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٠

= ٨٠٠ سم^٢

② حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٠)^٢$ × ١٠ $\sqrt{٣}$

= $\frac{٤٠٠٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$ سم^٣

١٧

قاعدة الهرم المنتظم مربعة طول قطرها ٢٤ $\sqrt{٢}$ سم

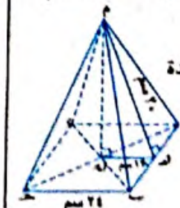
∴ طول ضلعها = ٢٤ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٤) × ٢٠

= ٩٦٠ سم^٢



∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية

+ مساحة القاعدة

= ٩٦٠ + (٢٤ × ٢٤) = ١٥٣٦ سم^٢

ارتفاع الهرم = $\sqrt{(٢٠)^٢ - (١٢)^٢}$ = ١٦ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٤)^٢$ × ١٦ = ٣٠٧٢ سم^٣

١٨

① ∵ م أ ب حـ ء هرم قائم

قاعدته مربع

∴ الهرم منتظم

، ارتفاعه الجانبي

= $\sqrt{(٤\sqrt{٦})^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢}$ = ٨ سم

∴ المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٨ $\sqrt{٢}$) × ٨ = ١٢٨ $\sqrt{٢}$ سم^٢

② ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٤ $\sqrt{٢}$

∴ في Δ م هـ ن :

ارتفاع الهرم م ن = $\sqrt{٨^٢ - (٤\sqrt{٢})^٢}$ = ٤ $\sqrt{٢}$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٨\sqrt{٢})^٢$ × ٤ $\sqrt{٢}$

= $\frac{٥١٢}{٣}$ $\sqrt{٢}$ سم^٣

١٩

① في Δ م أ هـ :

م هـ = $\sqrt{(٢٦)^٢ - (١٠)^٢}$

= ٢٤ سم

(الارتفاع الجانبي)

② في Δ م هـ ن :

م ن = $\sqrt{(٢٤)^٢ - (١٠)^٢}$

= ٢ $\sqrt{١١٩}$ سم (ارتفاع الهرم)

③ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٤ = ٩٦٠ سم^٢

④ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٠)^٢$ × ٢ $\sqrt{١١٩}$

= $\frac{٨٠٠}{٣}$ $\sqrt{١١٩}$ سم^٣

٢٠

∵ الهرم ثلاثي منتظم الوجوه

∴ ٢ ل^٢ = ٣ ع^٢ ∴ ٢ × $(١٢)^٢$ = ٣ × ع^٢

∴ ع = ٤ $\sqrt{٦}$ سم

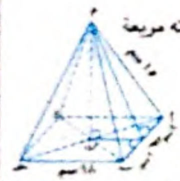
، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ ل^٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × $(١٢)^٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ × ٤ $\sqrt{٦}$

= ١٤٤ $\sqrt{٢}$ سم^٣

، مساحته الكلية = ل^٢ $\sqrt{٣}$ = $(١٢)^٢$ × $\sqrt{٣}$ = ١٤٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢

٢١



① ∵ م أ ب حـ ء هرم قائم قاعدته مربعة

∴ الهرم منتظم

، ارتفاعه الجانبي

= $\sqrt{(١٥)^٢ - ٩^٢}$ = ١٢ سم

∴ مساحته الكلية = مساحته الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × (١٨ × ٤) × ١٢ + $(١٨)^٢$

= ٤٣٢ + ٣٢٤ = ٧٥٦ سم^٢

② ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٩^٢}$ = ٣ $\sqrt{٧}$ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × $(١٨)^٢$ × ٣ $\sqrt{٧}$

= ٣٢٤ $\sqrt{٧}$ سم^٣

٢٢

مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ × س^٢ × ظتا $\frac{π}{ن}$

= $\frac{٥}{٤}$ × $(١٦)^٢$ × ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{٥}$

= ٤٤٠٫٤٤ سم^٢

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × ٤٤٠٫٤٤ × ١٢ = ١٧٦١٫٨ سم^٣

٢٣

① المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ١٢) × ١٠ $\sqrt{٣}$

= ٣٦٠ $\sqrt{٣}$ سم^٢

② مساحة القاعدة = $\frac{ن}{٤}$ س^٢ ظتا $\frac{π}{ن}$

= $\frac{٦}{٤}$ × $(١٢)^٢$ × ظتا $\frac{١٨٠^\circ}{٦}$

= ٢١٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢

∴ المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٣٦٠ $\sqrt{٣}$ + ٢١٦ $\sqrt{٣}$

= ٥٧٦ $\sqrt{٣}$ سم^٢

٢٤

① مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × $(٦)^٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٣ × ٦) × ١٠ = ٩٠ سم^٢

المساحة الكلية = (٩٠ + ٩ $\sqrt{٣}$) = ١٠٥٫٦ سم^٢

② مساحة القاعدة = $(١٢)^٢$ = ١٤٤ سم^٢

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (١٢ × ٤) × ١٥

= ٣٦٠ سم^٢

، المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٣٦٠ + ١٤٤ = ٥٠٤ سم^٢

③ مساحة القاعدة = $(٢٠)^٢$ = ٤٠٠ سم^٢

الارتفاع الجانبي = $\sqrt{٢٤^٢ + ١٠^٢}$ = ٢٦ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٢٠ × ٤) × ٢٦

= ١٠٤٠ سم^٢

، المساحة الكلية = ١٠٤٠ + ٤٠٠ = ١٤٤٠ سم^٢

④ مساحة القاعدة = $\frac{٦}{٤}$ × $(١٠)^٢$ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$

= ١٥٠ $\sqrt{٣}$ ≃ ٢٥٩,٨ سم^٢

الارتفاع الجانبي = $\sqrt{(١٣)^٢ - ٥^٢}$

= ١٢ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٦ × ١٠) × ١٢

= ٣٦٠ سم^٢

المساحة الكلية = ٣٦٠ + ٢٥٩,٨ = ٦١٩,٨ سم^٢

٢٥

① الحجم = $\frac{١}{٣}$ × $(١٠)^٢$ × ٢١ = ٧٠٠ سم^٣

② الحجم = $\frac{١}{٣}$ $\left(\frac{٦}{٤} × ٨^٢ × ظتا \frac{\pi}{٦}\right)$ × ١٤

= ٤٤٨ $\sqrt{٣}$ سم^٣

③ مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × $٦^٢$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٩ $\sqrt{٣}$ سم^٢

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × $\left(٩\sqrt{٣}\right)$ × ١٢ = ٣٦ $\sqrt{٣}$ سم^٣

④ أ هـ = $\sqrt{(١٧)^٢ - (١٥)^٢}$

= ٨ سم

∴ أ ب (طول الضلع) = ١٦ سم

، هـ ن = ٨ سم

، ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٥)^٢ - ٨^٢}$ = $\sqrt{١٦١}$ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٦)^٢$ × $\sqrt{١٦١}$

= $\frac{٢٥٦}{٣}$ $\sqrt{١٦١}$ سم^٣ ≃ ١٠٨٢,٨ سم^٣

٢٦

حجم الهرم الرباعي = $\frac{١}{٣}$ × $\left(\frac{١}{٢} × ٤ × ٨\right)$ × ١٢

= ٦٤ سم^٣

حجم المكعب = $(٤)^٣$ = ٦٤ سم^٣

∴ الحجمين متساويان.

٢٧

محيط القاعدة = ٥ + ٦ + ٧ = ١٨

∴ نصف محيط القاعدة (ع) = ٩ سم

مساحة القاعدة = $\sqrt{ع (ع - أ ب) (ع - ب حـ) (ع - حـ أ)}$

= $\sqrt{٩ × (٩ - ٥) × (٩ - ٦) × (٩ - ٧)}$

= ٦ $\sqrt{٦}$

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × ٦ $\sqrt{٦}$ × ١٥ = ٣٠ $\sqrt{٦}$ سم^٣

٢٨

قاعدة الهرم المنتظم مربعة مساحتها = ٧٠٠ سم^٢

∴ طول الضلع = ١٠ $\sqrt{٧}$ سم

الارتفاع = $\sqrt{(٢٠)^٢ - \left(٥\sqrt{٧}\right)^٢}$

= ١٥ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × (٧٠٠) × ١٥

= ٣٥٠٠ سم^٣

٢٩

مساحة القاعدة = ٩ سم^٢

∴ طول ضلع القاعدة = ٣ سم

∴ أ حـ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ أ ن = ١,٥ $\sqrt{٢}$

∴ في Δ م أ ن

∴ م ن (الارتفاع) = $\sqrt{٥^٢ - \left(١,٥\sqrt{٢}\right)^٢}$ = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٨٢}$

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}$ × ٩ × $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٨٢}$

= $\frac{٣}{٢}$ $\sqrt{٨٢}$ ≃ ١٣,٦ سم^٣

٣٠

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٤٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ١٢

∴ مساحة القاعدة = ١٠٠

∴ طول ضلع القاعدة = ١٠ سم

، ارتفاعه الجانبي

= $\sqrt{٥^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

، ∵ مساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٠) × ١٣ = ٢٦٠ سم^٢

٣١

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ١٢٩٦ = $\frac{١}{٣}$ × $(١٨)^٢$ × الارتفاع

∴ ارتفاع الهرم = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبي = $\sqrt{٩^٢ + (١٢)^٢}$

= ١٥ سم

، المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٨) × ١٥

= ٥٤٠ سم^٢

٣٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

٣٨٤ = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

+ مساحة القاعدة

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٢ × الارتفاع الجانبي

+ ١٢ × ١٢

∴ الارتفاع الجانبي = ١٠ سم

∴ ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٠)^٢ - ٦^٢}$

= ٨ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٢)^٢$ × ٨ = ٣٨٤ سم^٣

[illegible]

٣٥

∵ الشكل السداسى منتظم

∴ ن ب = ب حـ = $٤\sqrt{٣}$

∴ فى Δ م ن ب :

م ب = $\sqrt{٨^٢ + (٤\sqrt{٣})^٢}$

= $٤\sqrt{٧}$

، فى Δ م ص ب :

م ص = $\sqrt{(٤\sqrt{٧})^٢ - (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ١٠ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ١٠ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × $٢٤\sqrt{٣}$ × ١٠

= $١٢٠\sqrt{٣}$ سم^٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $١٢٠\sqrt{٣}$ + [$\frac{٦}{٤}$ × $(٤\sqrt{٣})^٢$ ظتا $\frac{\pi}{٦}$]

= $١٩٢\sqrt{٣}$ سم^٢

٣٦

∵ القاعدة مثلث متساوى الأضلاع تمر برؤوس دائرة طول نصف قطرها ١٢ سم

، ∵ $\frac{أ}{جا أ}$ = ٢ نق (من قانون الجيب)

∴ $\frac{أ}{جا ٦٠}$ = ٢ × ١٢

∴ أ = $١٢\sqrt{٣}$

∴ طول ضلع القاعدة = $١٢\sqrt{٣}$

، من Δ أ ب ء :

∴ أ ء = $\sqrt{(١٢\sqrt{٣})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢}$ = ١٨ سم

∴ ن ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء = ٦ سم

، من Δ م ن ء : ∴ م ن = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم

، ∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ $(١٢\sqrt{٣})^٢$ جا ٦٠ × ٨

= $٢٨٨\sqrt{٣}$ سم^٣

٣٧

بفرض أن ب و = ل

∴ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ل ، وبالمثل ء و = هـ و = ل

∴ Δ ء هـ و متساوى الأضلاع وطول ضلعه = ل

∴ الشبكة لمجسم هرم ثلاثى منتظم الوجوه

ويكون $\frac{١٨}{ل}$ = جا ٦٠°

∴ ل = $١٢\sqrt{٣}$ سم

مساحته الكلية = ٤ × مساحة أى وجه فيها

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × $(١٢\sqrt{٣})^٢$ جا ٦٠°

= $٤٣٢\sqrt{٣}$ سم^٢

٣٨

الشكل بعد طيه يعطى هرم رباعى منتظم ارتفاعه الجانبى = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٥)^٢}$ = ١٢ سم

مساحة العبوة الواحدة

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ١٠ × ١٢ + $١٠^٢$ = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠ سم^٢

(١) مساحة ١٠٠٠ عبوة = ٣٤٠٠٠٠ سم^٢ = ٣٤ م^٢

(٢) التكلفة = ٣٤ × ١٥ = ٥١٠ جنيه

٣٩

Δ م ن أ قائم فى ن

∴ ن أ

= $\sqrt{(٦\sqrt{٥})^٢ - (٦\sqrt{٣})^٢}$

= $٦\sqrt{٢}$ سم

∴ أ حـ = $١٢\sqrt{٢}$ ∴ طول قطر المربع = $١٢\sqrt{٢}$

∴ طول ضلع المربع = ١٢ سم

، ∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

∴ فى Δ م هـ ن

م هـ = $\sqrt{٦^٢ + (٦\sqrt{٢})^٢}$ = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبى = ١٢ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ١٢) × ١٢ = ٢٨٨ سم^٢

المساحة الكلية = ٢٨٨ + $(١٢)^٢$ = ٤٣٢ سم^٢

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × $(١٢)^٢$ × $٦\sqrt{٢}$ = $٢٨٨\sqrt{٢}$ سم^٣

٤٠

حجم النموذج = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١١.٥)^٢$ × ٧

= ٣٠٨.٥٨ سم^٣

الكتلة = الكثافة × الحجم

= ٣.٢ × ٣٠٨.٥٨ ≃ ٩٨٧.٥ جم

٤١

الارتفاع الجانبى

م هـ = $\sqrt{(٢١.٦)^٢ + (١٧.٥)^٢}$

≃ ٢٧.٨ م

مساحة الزجاج = المساحة الجانبية للهرم

= $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٣٥) × ٢٧.٨

≃ ١٩٤٦ م^٢

ثالثاً مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

∵ ب ن = ب حـ = ٢ ل

∴ فى Δ م ن ب

م ب = $\sqrt{(٣ل)^٢ + (٢ل)^٢}$

= $\sqrt{١٣}$ ل

، فى Δ م ب ص

م ص = $\sqrt{(\sqrt{١٣} ل)^٢ - ل^٢}$ = $٢\sqrt{٣}$ ل

∴ الارتفاع الجانبى = $٢\sqrt{٣}$ ل

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × (٢ ل × ٦) × $٢\sqrt{٣}$ ل

= $١٢\sqrt{٣}$ ل^٢ سم^٢

، مساحة القاعدة = $\frac{٦}{٤}$ × $(٢ ل)^٢$ × ظتا $\frac{\pi}{٦}$

= $٦\sqrt{٣}$ ل^٢ سم^٢

∴ المساحة الجانبية = ٢ مساحة القاعدة

٢

∵ طول قطر القاعدة = ل

∴ طول ضلع القاعدة = $\frac{ل\sqrt{٢}}{٢}$

∴ الارتفاع الجانبى

= $\sqrt{ل^٢ - (\frac{ل\sqrt{٢}}{٤})^٢}$ = $\frac{\sqrt{١٤}}{٤}$ ل

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × $\frac{ل\sqrt{٢}}{٢}$ × ٤ × $\frac{\sqrt{١٤}}{٤}$ ل

= $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ ل^٢

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= $\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ ل^٢ + $(\frac{ل}{٢}\sqrt{٢})^٢$

= ($\frac{\sqrt{٧}}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$) ل^٢ = $\frac{ل^٢}{٢}$ ($١ + \sqrt{٧}$)

٣

∵ الهرم قائم

∴ ارتفاعه يلاقى القاعدة أ ب حـ عند مركزها (م) وهى نقطة تلاقى المتوسطات.

ويفرض نصف قطر دائرة القاعدة = نق

وارتفاع الاسطوانة = ارتفاع الهرم = ع

مساحة قاعدة الاسطوانة = π نق^{٢}

، ∵ طا ٦٠° = $\frac{\text{١.٥ نق}}{\text{ل}}$

∴ ل (طول ضلع قاعدة الهرم) = نق $\sqrt{٣}$

∴ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{١}{٢}$ (نق $\sqrt{٣}$)^{٢} جا ٦٠°

= $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$ نق^{٢}

∴ $\frac{\text{حجم الهرم}}{\text{حجم الاسطوانة}} = \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٤} \text{نق}^{٢} \times \text{ع}}{\pi \text{ نق}^{٢} \text{ ع}} = \frac{\sqrt{٣}}{٤\pi}$

٤

نفرض أن طول ضلع قاعدته = طول حرفه الجانبى = ل

مساحة القاعدة = ل^{٢}

، ارتفاعه الجانبى

= $\frac{\text{ل}}{٢}\sqrt{٣}$

∴ مساحته الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ل × $\frac{\text{ل}}{٢}\sqrt{٣}$

= ل^{٢} $\sqrt{٣}$

المساحة الكلية = ل^{٢} $\sqrt{٣}$ + ل^{٢} = ل^{٢} ($\sqrt{٣}$ + ١)

∴ ل^{٢} ($\sqrt{٣}$ + ١) = ($\sqrt{٣}$ + ١) ٢

∴ ل^{٢} = ٢ ∴ ل = $\sqrt{٢}$

∴ طول حرفه = $\sqrt{٢}$

إجابات تمارين 8

أولاً أسئلة الاختيار من متعدد

① (د) ② (ب) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (أ) ⑧ (ب) ⑨ (أ) ⑩ (د)

⑪ (أ) ⑫ (د) ⑬ (أ) ⑭ (ب) ⑮ (ب)

⑯ (جـ) ⑰ (جـ) ⑱ (د) ⑲ (جـ) ⑳ (جـ)

㉑ (جـ) ㉒ (د) ㉓ (ب) ㉔ (أ) ㉕ (د)

㉖ (ب) ㉗ (جـ) ㉘ (ب)

㉙ أولاً : (ب) ثانيًا : (جـ) ثالثًا : (د)

رابعًا : (ب) خامسًا : (ب)

㉚ (د) ㉛ (د) ㉜ (ب) ㉝ (أ) ㉞ (جـ)

㉟ (جـ) ㊱ (د) ㊲ (جـ) ㊳ (جـ) ㊴ (ب)

㊵ (أ) ㊶ (جـ) ㊷ (جـ)

ثانيًا الأسئلة المقالية

١

① الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π (٩)^{٢} × ١٤

= ٣٧٨ π سم^{٣}

② نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}}$ = ١٠ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π (١٠)^{٢} × ٢٤

= ٨٠٠ π سم^{٣}

③ الارتفاع = $\sqrt{(١٣)^{٢} - ٥^{٢}}$ = ١٢ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π (٥)^{٢} × ١٢

= ١٠٠ π سم^{٣}

٢

① المساحة الجانبية = π (٦) × ١٢ = ٧٢ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٦) (٦ + ١٢)

= ١٠٨ π سم^{٢}

② طول الراسم (ل) = $\sqrt{(١٢)^{٢} + ٩^{٢}}$ = ١٥ سم

المساحة الجانبية = π (٩) × ١٥ = ١٣٥ π سم^{٢}

، المساحة الكلية = π (٩) (١٥ + ٩) = ٢١٦ π سم^{٢}

③ نق = $\sqrt{(١٥)^{٢} - (١٣)^{٢}}$ = ٢ $\sqrt{١٤}$ سم

المساحة الجانبية = π (٢ $\sqrt{١٤}$) × ١٥

= ٣٠ $\sqrt{١٤}$ π سم^{٢}

المساحة الكلية = π (٢ $\sqrt{١٤}$) (٢ $\sqrt{١٤}$ + ١٥)

= (٥٦ + ٣٠ $\sqrt{١٤}$) π سم^{٢}

٣

∴ نق = $\sqrt{\text{ل}^{٢} - \text{ع}^{٢}}$ = $\sqrt{(١٧)^{٢} - (١٥)^{٢}}$ = ٨ سم

المساحة الجانبية = π نق ل = π (٨) × ١٧

= ١٣٦ π سم^{٢}

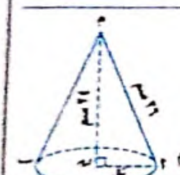
المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

= π (٨) (٨ + ١٧) = ٢٠٠ π سم^{٢}

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × ٨^{٢} × (١٥) = ٣٢٠ π سم^{٣}

٤



∵ المخروط قائم

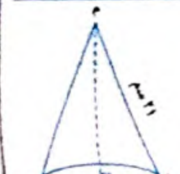
∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ن}}$

∴ نق = $\sqrt{(٢٦)^{٢} - (٢٤)^{٢}}$ = ١٠ سم

∴ محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢٠ π سم

، مساحة القاعدة = π نق^{٢} = ١٠٠ π سم^{٢}

٥



الشكل الموضح يصنع مخروط

محيط قاعدته = ٤٤ سم

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤

∴ نق = ٧ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ن}}$

∴ ارتفاع المخروط = م ن = $\sqrt{(٢١)^{٢} - ٧^{٢}}$

= ١٤ $\sqrt{٢}$ سم

٦



∵ مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق ل

∴ ٢٠ π = $\frac{١}{٢}$ نق × ٨ π

∴ نق = ٥ سم وهو يمثل راسم المجسم

، ∵ طول قوس القطاع = محيط القاعدة

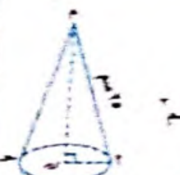
∴ ٨ π = ٢ π نَق

∴ نَق = ٤ سم (وهو يمثل طول نصف قطر قاعدة المخروط)

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ن}}$

∴ ارتفاع المجسم = م ن = $\sqrt{(٥)^{٢} - (٤)^{٢}}$ = ٣ سم

٧



الشبكة تمثل مجسم لمخروط دائرى قائم

، ∵ مساحة الدائرة = ٤٩ π سم^{٢}

∴ π نق^{٢} = ٤٩ π

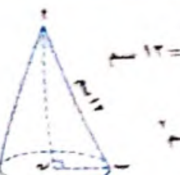
∴ طول نصف قطر القاعدة = ٧ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ن}}$

∴ م ن = $\sqrt{(٢٥)^{٢} - (٧)^{٢}}$ = ٢٤ سم

∴ ارتفاع المخروط = ٢٤ سم

٨



طول نصف قطر دائرة القطاع نق = ١٢ سم يمثل راسم المخروط

، ∵ مساحة القطاع = ١٥٠ سم^{٢}

∴ $\frac{١}{٢}$ نق ل = ١٥٠

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ل = ١٥٠

∴ ل = ٢٥ سم وهو يمثل محيط قاعدة المخروط

∴ ٢٥ = ٢ π نقَ

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = $\frac{٢٥}{٢\pi}$ سم

، ∵ المخروط قائم ∴ $\overline{أ ن} \perp \overline{ن ب}$

∴ ارتفاع المخروط = $\sqrt{(١٢)^٢ - \left(\frac{٢٥}{٢\pi}\right)^٢}$ ≃ ١١,٣ سم

٩

∵ نق = ٥ سم

∴ طول راسمه (ل) = $\sqrt{٥^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ سم

المساحة الكلية = π (٥) (٥ + ١٣) = ٩٠ π

≃ ٢٨٢,٧ سم^٢

١٠

∵ محيط القاعدة = ٤٤ ∴ ٢ π نق = ٤٤

∴ نق = $\frac{٢٢}{\pi}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π $\left(\frac{٢٢}{\pi}\right)^٢$ × ٢٥

≃ ١٢٨٣,٨ سم^٣

١١

Δ أ ب م قائم الزاوية فى ب ، ق (∠ أ م ب) = ٣٠°

∴ أ م = ٢ × ٥ = ١٠ سم ∴ ل = ١٠ سم

المساحة الجانبية = π (٥) × ١٠ = ٥٠ π سم^٢

المساحة الكلية = π (٥) (٥ + ١٠) = ٧٥ π سم^٢

١٢

∵ المساحة الجانبية = π نق ل

∴ ٩٦ π = π (٨) ل ∴ ل = ١٢ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٢)^٢ - ٨^٢}$ = ٤ $\sqrt{٥}$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ × π (٨)^٢ × ٤ $\sqrt{٥}$ ≃ ٥٩٩,٥ سم^٣

١٣

<u>الأول (أ) :</u>

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{٥}{٢}\right)^٢$ × ١١ = $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π سم^٣

<u>الثانى (ب) :</u>

سعته = $\frac{١}{٣}$ π $\left(\frac{١١}{٢}\right)^٢$ × ٥ = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π سم^٣

∴ الثانى (ب) أكبر من الأول (أ) فى السعة

الفرق بين سعتيهما = $\frac{٦٠٥}{١٢}$ π − $\frac{٢٧٥}{١٢}$ π

= $\frac{٥٥}{٢}$ π سم^٣

١٤

جتا هـ = $\frac{أ د}{أ ب}$ = $\frac{١٢}{ل}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ ل = ١٥ سم

نق = $\sqrt{(١٥)^٢ - (١٢)^٢}$ = ٩ سم

المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π (٩) (١٥ + ٩)

= ٢١٦ π سم^٢

١٥

∵ حجم الصهريج = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

٣٢ π = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ٦

نق^٢ = ١٦ ∴ نق = ٤ م

ل = $\sqrt{نق^٢ + ع^٢}$ = $\sqrt{٤^٢ + ٦^٢}$ = ٢ $\sqrt{١٣}$ م

مساحته الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٤ × (٢ $\sqrt{١٣}$ + ٤)

= (١٦ + ٨ $\sqrt{١٣}$) π ≃ ١٤٠,٩ م^٢

١٦

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × (١٥)^٢ × ٢٠

= ١٥٠٠ π سم^٣ ≃ ٤٧١٢,٤ سم^٣

، ∵ طول ضلع القاعدة = ٤٨ ÷ ٤ = ١٢ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × (١٢)^٢ × ٤٠ = ١٩٢٠ سم^٣

∴ حجم المخروط > حجم الهرم.

١٧

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

π ع^٣ = $\frac{١}{٣}$ × π نق^٢ ع ∴ نق^٢ = ٣ ع^٢

المساحة الجانبية = π نق ل = π نق $\sqrt{نق^٢ + ع^٢}$

= π نق $\sqrt{٣ ع^٢ + ع^٢}$ = ٢ π نق ع

= محيط قاعدة الاسطوانة × الارتفاع

= المساحة الجانبية للاسطوانة.

١٨

∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π (٢)^٢ × ١٢ = ١٦ π سم^٣

∴ حجم الماء المزاح على شكل الاسطوانة = ١٦ π سم^٣

∴ ١٦ π = π نق^٢ × ١ ∴ نق^٢ = ١٦

∴ نقَ = ٤ سم

∴ طول قطر قاعدة الاناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

١٩

حجم الشمع = حجم المكعب = (٢٠)^٣ = ٨٠٠٠ سم^٣

، ∵ ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل

∴ حجم المخروط = ٨٨ ٪ × ٨٠٠٠

= $\frac{٨٨}{١٠٠}$ × ٨٠٠٠ = ٧٠٤٠ سم^٣

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

∴ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^٢ × ٢١ = ٧٠٤٠

∴ نق^٢ = ٣٢٠ ∴ نق = ٨ $\sqrt{٥}$ سم

٢٠

سعة المخروط = ٢,٢ لتر = ٢,٢ × ١٠٠٠ = ٢٢٠٠ سم^٣

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

$\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق^٢ × ٢١ = ٢٢٠٠

نق^٢ = ١٠٠ ∴ نق = ١٠ سم

٢١

طول راسم المخروط

= ١٨ سم

، ∵ محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{أ ب}$ = نق $\theta^{د}$ = ١٨ × $\frac{٦٠° \times \pi}{١٨٠°}$

∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

، ع = $\sqrt{ل^٢ - نق^٢}$ = $\sqrt{(١٨)^٢ - (٣)^٢}$ = ٣ $\sqrt{٣٥}$

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٣)^٢ × ٣ $\sqrt{٣٥}$

= ١٦٧,٣ سم^٣

٢٢

طول راسم المخروط = ٢٠ سم

، محيط دائرة المخروط

= $\overset{\frown}{أ ب}$ = نق $\theta^{د}$ = ٢٠ × $\frac{٩٠° \pi}{١٨٠°}$ = ١٠ π

∴ ٢ π نق = ١٠ π ∴ نق = ٥ سم

، ارتفاع المخروط ع = $\sqrt{(٢٠)^٢ - ٥^٢}$ = ٥ $\sqrt{١٥}$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × (٥)^٢ × ٥ $\sqrt{١٥}$

= $\frac{١٢٥ \sqrt{١٥}}{٣}$ π سم^٣

٢٣

(١) الجسم الناشئ:

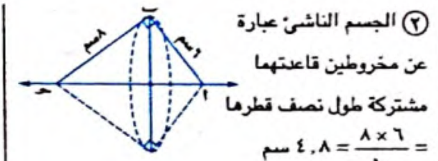
مخروط قائم طول نصف قطر

قاعدته = ٦ سم

وارتفاعه = ٨ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ × π × ٦^٢ × ٨ = ٩٦ π سم^٣

② الجسم الناشئ عبارة عن مخروطين قاعدتهما مشتركة طول نصف قطرها



$= \frac{٦ \times ٨}{١٠} = ٤,٨$ سم

∵ طول راسم الأول = ٨ سم

∴ ع$_١$ = $\sqrt{٨^٢ - (٤,٨)^٢} = ٦,٤$ سم

∵ طول راسم الثانى = ٦ سم

∴ ع$_٢$ = $\sqrt{٦^٢ - ٤,٨^٢} = ٣,٦$ سم

∴ حجم الجسم الناتج

$= \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٦,٤ + \frac{١}{٣} \times \pi \times (٤,٨)^٢ \times ٣,٦$

$= ٧٦,٨\ \pi$ سم^٣

٢٤

① حول محور السينات ينتج مخروط

نق$_١$ = ٣ وحدة طوليه ، ع$_١$ = ٤ وحدة طوليه

∴ الحجم = $\frac{١}{٣}\ \pi\ (٣)^٢ \times ٤$

= ١٢ π وحدة مكعبة

② حول محور الصادات

نق$_٢$ = ٤ وحدة طوليه ، ع$_٢$ = ٣ وحدة طولية

الحجم = $\frac{١}{٣}\ \pi\ (٤)^٢ \times ٣$

= ١٦ π وحدة مكعبة

٢٥

الجسم الناتج عبارة عن مخروطين لهما قاعدة مشتركة ومتطابقان

نصف قطرها = $\sqrt{١٠^٢ - ٦^٢}$

= ٨ سم

، ارتفاع كل منهما = ٦ سم

الحجم = $٢ \times \frac{١}{٣}\ \pi\ (٨)^٢ \times ٦ = ٢٥٦\ \pi$ سم^٣

٢٦

∵ $\overline{مهـ}$ متوسط خارج من رأس القائمة فى Δ أ م ب

∴ أب (طول راسم المخروط) = ٢ × ٩ = ١٨ سم

المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٨

= ١٠٨ π سم^٢

، المساحة الكلية

= π نق (نق + ل)

= π × ٦ × (٦ + ١٨)

= ١٤٤ π سم^٢

، الارتفاع = $\sqrt{(١٨)^٢ - ٦^٢} = ١٢\sqrt{٢}$ سم

الحجم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = $\frac{١}{٣}$ π × (٦)^٢ × ١٢$\sqrt{٢}$

= ١٤٤$\sqrt{٢}$ π سم^٣

٢٧

* المخروط الأول : ل$_١$ = ٨٠ سم ، نق$_١$ = ٥٠ سم

∴ المساحة الجانبية = π × ٥٠ × ٨٠ = ٤٠٠٠ π سم^٢

* المخروط الثانى : ع$_٢$ = ١٢٠ سم ، نق$_٢$ = ٥٠ سم

∴ ل$_٢$ = $\sqrt{(١٢٠)^٢ + (٥٠)^٢} = ١٣٠$ سم

∴ المساحة الجانبية = π × ٥٠ × ١٣٠

= ٦٥٠٠ π سم^٢

المساحة المراد طلائها هى مجموع المساحتين الجانبيتين للمخروطين

= ٤٠٠٠ π + ٦٥٠٠ π = ١٠٥٠٠ π سم^٢

≃ ٣٢٩٨٧ سم^٢ ≃ ٣,٣ م^٢

∴ التكلفة = ٣,٣ × ٣٠٠ = ٩٩٠ جنيه

٢٨

حجم الهرم الخماسى = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \frac{١}{٣} \left(\frac{٥}{٤} \times ١٠^٢ \times \text{ظتا} \frac{\pi}{٥} \right) \times ٤٢$

= ٢٤٠٨,٦٧ سم^٣

حجم المخروط = ٩٠ ٪ من حجم الهرم

$= \frac{٩٠}{١٠٠} \times ٢٤٠٨,٦٧ = ٢١٦٧,٨$ سم^٣

∴ $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = ٢١٦٧,٨

$\frac{١}{٣}$ × π × (١٥)^٢ ع = ٢١٦٧,٨

ع = $\frac{٢١٦٧,٨}{\frac{١}{٣} \times \pi \times ١٥^٢}$ ≃ ٩,٢ سم

٢٩

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = ١٠٠ سم^٣

① بعد مضاعفة ارتفاعه

∴ حجم المخروط الناتج = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ (٢ ع)

= ٢ $\left[\frac{١}{٣} \pi\ \text{نق}^٢\ \text{ع}\right]$ = ٢ × ١٠٠ = ٢٠٠ سم^٣

② بعد مضاعفة طول نصف قطره

∴ حجم المخروط الناتج

= $\frac{١}{٣}$ π (٢ نق)^٢ (ع) = $\frac{١}{٣}$ π × ٤ نق^٢ ع

= ٤ $\left[\frac{١}{٣} \pi\ \text{نق}^٢\ \text{ع}\right]$ = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ سم^٣

③ بعد مضاعفة ارتفاعه وطول نصف قطره

∴ حجم المخروط الناتج

= $\frac{١}{٣}$ π (٢ نق)^٢ (٢ ع) = $\frac{١}{٣}$ π × ٤ نق^٢ × ٢ ع

= ٨ $\left[\frac{١}{٣} \pi\ \text{نق}^٢\ \text{ع}\right]$ = ٨ × ١٠٠ = ٨٠٠ سم^٣

ثالثًا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

① (ب) ② (جـ) ③ (د)

④ أولًا : (جـ) ثانيًا : (ب)

⑤ (أ) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١

① ∵ حجم نصف كرة = حجم المخروط

∴ $\frac{١}{٢} \left(\frac{٤}{٣} \pi\ \text{نق}^٣\right) = \frac{١}{٣} \pi\ \text{نق}^٢\ \text{ع}$

∴ ع = ٢ نق

② ∵ أم = $\sqrt{(٥ ك)^٢ - (٣ ك)^٢}$ = ٤ ك

، ∵ حجم المخروط = ٩٦ π سم^٣

∴ $\frac{١}{٣}$ π × (٣ ك)^٢ × ٤ ك = ٩٦ π

∴ ١٢ ك^٣ = ٩٦

∴ ك^٣ = ٨

∴ ك = ٢

∴ نق = ٦ سم ، ع = ٨ سم ، ل = ١٠ سم

∴ المساحة الكلية = π نق (نق + ل)

= π × ٦ (٦ + ١٠) = ٩٦ π سم^٢

③ ∵ حجم المخروط = ٤٩ π

∴ $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع = ٤٩ π

∴ $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ × ٣ = ٤٩ π

∴ نق^٢ = ٤٩ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع المطوى = ٢ π نق = ٢ π × ٧

= ١٤ π سم

④ نفرض أن نصف قطر المخروط الأصغر = نق$_١$ وارتفاعه = ع$_١$ وراسمه = ل$_١$

ونصف قطر المخروط الأكبر = نق$_٢$ وارتفاعه = ع$_٢$ ، وراسمه = ل$_٢$

ومن هندسة الشكل نجد أن $\frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \frac{\text{ل}_١}{\text{ل}_٢} = \frac{\text{نق}_١}{\text{نق}_٢} = \frac{١}{٢}$

أولًا : $\frac{\text{حجم المخروط الأصغر}}{\text{حجم المخروط الأكبر}} = \frac{\frac{١}{٣} \pi\ \text{نق}_١^٢\ \text{ع}_١}{\frac{١}{٣} \pi\ \text{نق}_٢^٢\ \text{ع}_٢}$

$= \left(\frac{\text{نق}_١}{\text{نق}_٢}\right)^٢ \times \frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٨}$

ثانيًا : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$

$= \frac{\pi\ \text{نق}_١\ \text{ل}_١}{\pi\ \text{نق}_٢\ \text{ل}_٢} = \frac{\text{نق}_١}{\text{نق}_٢} \times \frac{\text{ل}_١}{\text{ل}_٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٤}$

⑤ من هندسة الشكل نجد أن :

مساحة قاعدة الهرم

$= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3}\ \text{نق})$

$\times 3\ \text{نق} = 3\sqrt{3}\ \text{نق}^2$

، مساحة قاعدة المخروط $= \pi\ \text{نق}^2$

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم}}$

$= \frac{\frac{1}{3} \times 3\sqrt{3}\ \text{نق}^2 \times \text{ع}}{\frac{1}{3} \times \pi\ \text{نق}^2 \times \text{ع}} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

⑥ من هندسة الشكل نجد أن :

مساحة قاعدة الهرم

$= 3 \times \left(\frac{1}{2}\ \text{نق}^2\ \text{جا}\ 120^\circ\right)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \text{نق}^2$

، مساحة قاعدة المخروط $= \pi\ \text{نق}^2$

$\therefore \frac{\text{حجم الهرم الثلاثى المنتظم}}{\text{حجم أصغر مخروط يحتويه}}$

$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{4}\ \text{نق}^2 \times \text{ع}}{\frac{1}{3} \times \pi\ \text{نق}^2 \times \text{ع}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

⑦ بفرض أن نصف قطر قاعدة المخروط = نق

وارتفاعه = ع وحجمه ح

∴ بعد الزيادة يكون نصف قطر قاعدة المخروط

$= \frac{3}{2}$ نق ، الارتفاع $= \frac{3}{2}$ ع وحجمه $\acute{\text{ح}}$

$\therefore \frac{\acute{\text{ح}}}{\text{ح}} = \frac{\frac{1}{3}\pi \left(\frac{3}{2}\ \text{نق}\right)^2 \times \left(\frac{3}{2}\ \text{ع}\right)}{\frac{1}{3}\pi \times \text{نق}^2 \times \text{ع}}$

$= \frac{9}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$

$\therefore \acute{\text{ح}} = \frac{27}{8}\ \text{ح}$ $\therefore \acute{\text{ح}} = 337.5\%\ \text{ح}$

2

$\text{ل}_1 : 3\text{س} - \sqrt{3}\ \text{ص} = -6$ بالقسمة على (-6)

$\frac{\text{س}}{-2} + \frac{\text{ص}}{2\sqrt{3}} = 1$

$\text{ل}_2 : \sqrt{3}\ \text{س} + \text{ص} = 2\sqrt{3}$ بالقسمة على $(2\sqrt{3})$

$\frac{\text{س}}{2} + \frac{\text{ص}}{2\sqrt{3}} = 1$

∴ أ $(0 ، 2\sqrt{3})$ ، ب $(2 ، 0)$ ، جـ $(-2 ، 0)$

بالدوران حول محور السينات ينتج مخروطان لهما نفس القاعدة (نق $= 2\sqrt{3}$ وحدة) ونفس الارتفاع (ع = 2 وحدة)

∴ المخروطان متطابقان

∴ حجم الجسم الناشىء $= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 2$

$= 16\pi$ وحدة مكعبة.

3

① الجسم الناشىء من الدوران عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة مضافًا إليها مخروط دائرى قائم ارتفاعه $(7 - 4) = 3$ سم، ونصف قطر قاعدته = 3,5 سم

∴ الحجم $= \pi\ \text{نق}^2\ \text{ع}_1 + \frac{1}{3}\pi\ \text{نق}^2\ \text{ع}_2$

$= \pi \times (3.5)^2 \times 4 + \frac{1}{3}\pi (3.5)^2 \times 3$

$= \frac{245}{4}\pi \simeq 192.4$ سم^3

② الجسم الناشىء عبارة عن مخروط دائرى قائم ناشىء من دوران Δ جـ أ ب ، نصف قطر قاعدته 6 سم، وارتفاعه = 8 سم مطروحًا منه مخروط دائرى قائم ناشىء عن دوران المثلث غير المظلل ، ونصف قطر دائرته = 3 سم، وارتفاعه = 8 سم

∴ الحجم $= \frac{1}{3}\pi (6)^2 \times 8 - \frac{1}{3}\pi (3)^2 \times 8$

$= 72\pi \simeq 226.2$ سم^3

③ الجسم الناشىء من الدوران حول $\overline{\text{أب}}$ عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها = أهـ ، وارتفاعها = جـ ء مطروحًا منها مخروطين دائريين قائمين نصف قطر قاعدة كل منها = أهـ ، ارتفاعيهما جـ هـ ، هـ ء

ومن الشكل المقابل :

نلاحظ أن

جـ ء $= \sqrt{(15)^2 + (20)^2} = 25$ سم

، أهـ $= \frac{15 \times 20}{25} = 12$ سم

$= \pi (12)^2 \times 25 - \left(\frac{1}{3}\pi (12)^2 \times \text{جـ هـ}\right.$

$\left. + \frac{1}{3}\pi (12)^2 \times \text{هـ ء}\right)$

$= \pi \times (12)^2 \times 25 - \frac{1}{3}\pi (12)^2 \times (\text{جـ هـ} + \text{هـ ء})$

$= \pi \times (12)^2 \times 25 - \frac{1}{3}\pi \times (12)^2 \times 25$

$= \pi \times (12)^2 \times 25 \times \frac{2}{3} = 2400\pi$

$\simeq 7539.8$ سم^3

إجابات تمارين 9

أولا أسئلة الاختيار من متعدد

① (ب)	② (جـ)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (جـ)
⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (جـ)	⑩ (جـ)
⑪ (جـ)	⑫ (د)	⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (د)
⑯ (جـ)	⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (ب)	⑳ (أ)
(21) (أ)	(22) (جـ)	(23) (ب)	(24) (د)	(25) (أ)
(26) (ب)	(27) (ب)	(28) (أ)	(29) (د)	(30) (د)
(31) (د)	(32) (ب)	(33) (ب)	(34) (أ)	(35) (ب)
(36) (د)	(37) (د)	(38) (أ)	(39) (د)	(40) (د)
(41) (جـ)	(42) (ب)	(43) (أ)	(44) (أ)	(45) (ب)
(46) (ب)	(47) (د)	(48) (ب)	(49) (جـ)	(50) (ب)
(51) (د)	(52) (أ)	(53) (أ)	(54) (ب)	(55) (د)
(56) (د)	(57) (جـ)	(58) (أ)	(59) (د)	(60) (أ)
(61) (د)	(62) (د)	(63) (جـ)	(64) (أ)	(65) (د)
(66) (أ)	(67) (د)	(68) (جـ)	(69) (ب)	(70) (د)
(71) (جـ)	(72) (أ)	(73) (أ)	(74) (جـ)	(75) (ب)
(76) (جـ)	(77) (ب)	(78) (أ)	(79) (د)	(80) (ب)

ثانيا الأسئلة المقالية

1

① $(\text{س} - 2)^2 + (\text{ص} - 3)^2 = 25$

② $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 9$

③ $(\text{س} - 0)^2 + (\text{ص} + 1)^2 = 12$

④ $(\text{س} + 4)^2 + (\text{ص} + 3)^2 = \frac{9}{4}$

2

① $(\text{س} + 2)^2 + (\text{ص} - 3)^2 = (4)^2$

أى : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 4\text{س} - 6\text{ص} - 3 = 0$

② نق $= \sqrt{(5 - 0)^2 + (-12 - 0)^2} = 13$

$\therefore (\text{س} - 5)^2 + (\text{ص} + 12)^2 = (13)^2$

أى : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 10\text{س} + 24\text{ص} = 0$

③ نق $= \sqrt{(7 - 3)^2 + (-5 - 2)^2} = \sqrt{65}$

$\therefore (\text{س} - 7)^2 + (\text{ص} + 5)^2 = (\sqrt{65})^2$

أى : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 14\text{س} + 10\text{ص} + 9 = 0$

④ مركز الدائرة م $= \left(\frac{6 + 0}{2} ، \frac{-4 + 2}{2}\right)$

$= (3 ، -1)$

، نق $= \sqrt{(6 - 3)^2 + (-4 + 1)^2} = 3\sqrt{2}$

$\therefore (\text{س} - 3)^2 + (\text{ص} + 1)^2 = (3\sqrt{2})^2$

أى : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 6\text{س} + 2\text{ص} - 8 = 0$

⑤ ل = 3 ، ك = 2

، ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| = 2 ، جـ = ل^2 = 9

∴ معادلة الدائرة هى :

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 + 6\text{س} + 4\text{ص} + 9 = 0$

⑥ ل = −3 ، ك = 0

، ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| = 3 ، جـ = ك^2 = 0

∴ معادلة الدائرة هى :

$\text{س}^2 + \text{ص}^2 - 6\text{س} = 0$

٧) ل = −٥ ، ك = ٥

، ∵ الدائرة تمس محورى الإحداثيات

∴ نق = |ل| = |ك| = ٥ ، حـ = ٢٥

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ١٠ ص + ٢٥ = ٠

٨) ∵ المماسان متوازيان عند أ ، ب

∴ $\overline{\text{أب}}$ قطر فى الدائرة

∴ مركز الدائرة م = $\left(\frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{٢ - ١}{٢}\right)$

= $\left(٣ ، \frac{١}{٢}\right)$

∴ نق = $\sqrt{(٦ - ٣)^{٢} + \left(٢ - \frac{١}{٢}\right)^{٢}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{٢}$

∴ معادلة الدائرة :

(س − ٣)^{٢} + (ص − $\frac{١}{٢}$)^{٢} = $\left(\frac{٣\sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢}$

أى : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ص − ٢ = ٠

٩) مركز الدائرة م = (٥ ، ٠) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة : (س − ٥)^{٢} + (ص − ٠)^{٢} = (٣)^{٢}

أى : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ١٦ = ٠

١٠) ∵ الدائرة تمس المحورين ، تقع فى الربع الرابع

∴ حـ = ل^{٢} = ك^{٢} = نق^{٢} = ٣٦

، مركز الدائرة م = (٦ ، −٦)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٦)^{٢} + (ص + ٦)^{٢} = (٦)^{٢}

أى : س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س + ١٢ ص + ٣٦ = ٠

٣

١) مركز الدائرة = (٠ ، ٠)

، نق = $\sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$

٢) مركز الدائرة = (−٣ ، ٥) ، نق = ٧

٣) مركز الدائرة = (−٤ ، ٠) ، نق = ٣

٤) مركز الدائرة = (٠ ، −٧) ، نق = $\sqrt{٢٤} = ٢\sqrt{٦}$

٥) ∵ ل = −٢ ، ك = ٣ ، حـ = −١٢

∴ مركز الدائرة = (٢ ، −٣)

، نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٤ + ٩ + ١٢} = ٥$

٦) ∵ ل = ٠ ، ك = ٢ ، حـ = −٨

∴ مركز الدائرة = (٠ ، −٢)

، نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٠ + ٤ + ٨} = ٢\sqrt{٣}$

٧) ∵ ل = −٢ ، ك = −١ ، حـ = ٠

∴ مركز الدائرة = (٢ ، ١)

، نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٤ + ١ - ٠} = \sqrt{٥}$

٨) ∵ ل = −٤ ، ك = ٠ ، حـ = −١٢

∴ مركز الدائرة = (٤ ، ٠)

، نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{١٦ + ٠ + ١٢}$

= $٢\sqrt{٧}$

٤

١) ∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٨ ص = ٠

∴ ل = −٢ ، ك = ٤ ، حـ = ٠

∴ نق$_{١}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٤ + ١٦} = ٢\sqrt{٥}$

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ ص + ١٦ = ٠

∴ ل = ٠ ، ك = ٦ ، حـ = ١٦

∴ نق$_{٢}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٠ + ٣٦ - ١٦}$

= $٢\sqrt{٥}$

∴ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

٢) ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ ص = ١

∴ ل = ٠ ، ك = ٧ ، حـ = −١

∴ نق$_{١}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٠ + ٤٩ + ١} = ٥\sqrt{٢}$

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س − ٢٥ = ٠

∴ ل = ٥ ، ك = ٠ ، حـ = −٢٥

∴ نق$_{٢}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٢٥ + ٢٥} = ٥\sqrt{٢}$

∴ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متطابقتان

٣) ∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٤ ص − ٣ = ٠

∴ ل = −١ ، ك = ٢ ، حـ = −٣

∴ نق$_{١}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{١ + ٤ + ٣} = ٢\sqrt{٢}$

، ∵ س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ١١ = ٠

∴ ل = ٣ ، ك = ٠ ، حـ = −١١

∴ نق$_{٢}$ = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ} = \sqrt{٩ + ٠ + ١١} = ٢\sqrt{٥}$

∴ نق$_{١}$ ≠ نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان غير متطابقتين

٥

١) د$_{١}$: مركزها (١٢ ، −١) ، نق = ٢

∴ معادلة الدائرة د$_{١}$ هى :

(س − ١٢)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤

، د$_{٢}$: مركزها (٦ ، ٢) ، نق = ٢

∴ معادلة الدائرة د$_{٢}$ هى :

(س − ٦)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

، د$_{٣}$: مركزها (١ ، ٥) ، نق = ١

∴ معادلة الدائرة د$_{٣}$ هى :

(س − ١)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١

، د$_{٤}$: مركزها (٠ ، ٠) ، نق = ٣

∴ معادلة الدائرة د$_{٤}$ هى : س^{٢} + ص^{٢} = ٩

، د$_{٥}$: مركزها (−٩ ، ١) ، نق = ٥

∴ معادلة الدائرة د$_{٥}$ هى :

(س + ٩)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٢٥

٢) ∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ = ٢ ∴ د$_{١}$ ، د$_{٢}$ متطابقتان.

٦

∵ نق$_{١}$ = نق$_{٢}$ = ٢ ∴ الدائرتان متطابقتان

، مركز الدائرة د$_{١}$ = (٠ ، ٠)

، مركز الدائرة د$_{٢}$ = (٥ ، ٢)

معادلة الدائرة د$_{١}$ هى : س^{٢} + ص^{٢} = ٤

، معادلة الدائرة د$_{٢}$ هى : (س − ٥)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

، معادلة الدائرة د$_{٣}$ هى : (س + ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤

٧

١) ∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٢) ∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (٤)^{٢} + (−٨)^{٢} + ١ = ٨١ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

٣) ∵ معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢}

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٤) س^{٢} + ص^{٢} + $\frac{٣}{٢}$ ص − ٤ = ٠

∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = (٠) + $\left(\frac{٣}{٤}\right)^{٢}$ + ٤ = ٤ $\frac{٩}{١٦}$ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

٥) س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص − ٣ س + ٦ ص − ٤ = ٠

∵ المعادلة تشتمل على الحد س ص

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

٦) ∵ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{٢} + ك^{٢} − حـ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ + (١)^{٢} − ٧

= $\frac{-٢٣}{٤}$ < ٠

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

⑦ ∵ معامل س^{2} = معامل ص^{2} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{2} + ك^{2} − حـ = (١)^{2} + (−٢)^{2} − ٥ = ٠

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

⑧ س^{2} + ص^{2} + ٤ س − ٣٢ = ٠

∵ معامل س^{2} = معامل ص^{2} = ١

، المعادلة خالية من س ص

، ل^{2} + ك^{2} − حـ = (٢)^{2} + ٣٢ = ٣٦ > ٠

∴ المعادلة تعبر عن دائرة.

⑨ س^{2} − ص^{2} + س − ص − ٧ = ٠

∵ معامل س^{2} ≠ معامل ص^{2}

∴ المعادلة لا تعبر عن دائرة.

8

نق = $\sqrt{(٢ + ١)^{2} + (−١ − ٣)^{2}}$ = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة الأولى د$_{1}$ هي :

(س − ٢)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٢٥

، معادلة الدائرة الثانية د$_{2}$ هي :

(س + ١)^{2} + (ص − ٣)^{2} = ٢٥

9

∵ د$_{1}$ = س^{2} + ص^{2} − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

∴ م$_{1}$ = (١ ، −٣)

، نق$_{1}$ = $\sqrt{(−١)^{2} + (٣)^{2} − ١}$ = ٣ وحدة طول

، ∵ د$_{2}$ = س^{2} + ص^{2} − ٢ س + ٦ ص + $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

∴ م$_{2}$ = (١ ، −٣)

، نق$_{2}$ = $\sqrt{(−١)^{2} + (٣)^{2} − \frac{١٥}{٤}}$ = ٢,٥ وحدة طول.

10

(س − ٦)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٢٥

بالتعويض بالنقط أ ، ب ، حـ ، ء

• أ (٩ ، ٣)

∴ (٩ − ٦)^{2} + (٣ + ١)^{2} = ٢٥ = نق^{2}

∴ النقطة أ تقع على الدائرة.

• ب (٧ ، ٥)

∴ (٧ − ٦)^{2} + (٥ + ١)^{2} = ٣٧ > نق^{2}

∴ النقطة ب تقع خارج الدائرة.

• حـ (٣ ، ٣)

∴ (٣ − ٦)^{2} + (٣ + ١)^{2} = ٢٥ = نق^{2}

∴ النقطة حـ تقع على الدائرة.

• ء (٢ ، −٣)

∴ (٢ − ٦)^{2} + (−٣ + ١)^{2} = ٢٠ < نق^{2}

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

11

نق = $\sqrt{(٢ + ١)^{2} + (−١ − ٣)^{2}}$ = ٥

، معادلة الدائرة هي : (س − ٢)^{2} + (ص + ١)^{2} = ٢٥

بالتعويض بالنقط ب ، حـ ، ء :

• ب (٢ ، ٤)

∴ (٢ − ٢)^{2} + (٤ + ١)^{2} = ٢٥ = نق^{2}

∴ النقطة ب تقع على الدائرة.

• حـ (−٣ ، ١)

∴ (−٣ − ٢)^{2} + (١ + ١)^{2} = ٢٩ > نق^{2}

∴ النقطة حـ تقع خارج الدائرة.

• ء (١ ، ٢)

∴ (١ − ٢)^{2} + (٢ + ١)^{2} = ١٠ < نق^{2}

∴ النقطة ء تقع داخل الدائرة.

12

مركز الدائرة = (−٣ ، ٤) ، نق = ٣ وحدة طول.

① طول العمود = [illegible] > نق

∴ المستقيم ل خارج الدائرة.

② طول العمود = [illegible]

= ٢,٧ < نق

∴ المستقيم ل قاطع للدائرة.

③ طول العمود = [illegible]

= ٣ = نق

∴ المستقيم ل مماس للدائرة.

13

مركز الدائرة م = (٣ ، −٢)

، نق = [illegible] وحدة طول

، طول العمود = [illegible] < نق

∴ المستقيم قاطع للدائرة.

14

• د$_{1}$: (س − ٤)^{2} + (ص − ٣)^{2} = [illegible]

∴ م$_{1}$ = [illegible] ، نق$_{1}$ = [illegible] وحدة طول.

• د$_{2}$: (س + [illegible])^{2} + (ص − [illegible])^{2} = [illegible]

∴ م$_{2}$ = [illegible] ، نق$_{2}$ = [illegible] وحدة طول.

∴ نق$_{1}$ + نق$_{2}$ = [illegible] وحدة طول.

، م$_{1}$ م$_{2}$ = [illegible] وحدة طول

، ∵ م$_{1}$ م$_{2}$ > نق$_{1}$ + نق$_{2}$

∴ الدائرتان متباعدتان.

15

• د$_{1}$: س^{2} + ص^{2} − [illegible] س − ٨ ص + [illegible] = ٠

[illegible]

، إذا كان الدائرتان متماستين من الداخل.

∴ |نق$_{٢}$ − نق$_{١}$| = م$_{١}$ م$_{٢}$ ∴ |٤ − $\sqrt{ك}$| = ١٣

∴ ٤ − $\sqrt{ك}$ = ١٣ (مرفوض) أ، ٤ − $\sqrt{ك}$ = −١٣

∴ $\sqrt{ك}$ = ٤ + ١٣ = ١٧ ∴ ك = ٢٨٩

١٨

نقطة التماس :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٤ ص + ١٢

= س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٤ ص − ٤

∴ − ٦ س − ٤ ص + ١٢ = ٢ س − ٤ ص − ٤

∴ − ٦ س − ٢ س = − ١٢ − ٤

∴ − ٨ س = −١٦ ∴ س = ٢

بالتعويض فى معادلة الدائرة الأولى عن س = ٢

∴ (٢)^{٢} + ص^{٢} − ٦ × ٢ − ٤ ص + ١٢ = ٠

ص^{٢} − ٤ ص + ٤ = ٠ ∴ ص = ٢

الدائرتان متقاطعتان فى نقطة واحدة (٢ ، ٢)

∴ الدائرتان متماستان

معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، ٢) وتمر بمركز الدائرة الثانية (−١ ، ٢)

نق = $\sqrt{(٢ + ١)^{٢} + (٠)^{٢}}$ = ٣

المعادلة (س − ٢)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٩

١٩

س^{٢} + ص^{٢} = ١

، ∵ (٢ أ جتا هـ ، ٢ أ جا هـ) ∈ للدائرة

∴ (٢ أ جتا هـ)^{٢} + (٢ أ جا هـ)^{٢} = ١

∴ ٤ أ^{٢} (جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ) = ١

∴ ٤ أ^{٢} = ١ ∴ أ = ± $\frac{١}{٢}$

٢٠

① ∵ ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

∴ (−١)^{٢} + (−٢)^{٢} + هـ − ٢ > ٠

∴ هـ > −٣ ∴ هـ ∈]−٣ ، ∞[

② ∵ ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

∴ (٢)^{٢} + (−٣)^{٢} + هـ^{٢} − ٤ > ٠

∴ هـ^{٢} + ٩ > ٠ وهذا صحيح لجميع قيم هـ ∈ ح

∴ هـ ∈ ح

③ ∵ ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

∴ (−٢ هـ)^{٢} + (− هـ)^{٢} − ١٠ (هـ − ١) > ٠

∴ ٤ هـ^{٢} + هـ^{٢} − ١٠ هـ + ١٠ > ٠

∴ هـ^{٢} − ٢ هـ + ٢ > ٠

∴ (هـ − ١)^{٢} + ١ > ٠ وذلك يتحقق لكل هـ ∈ ح

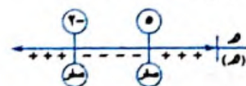
④ ∵ ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

∴ (٣)^{٢} + (٤)^{٢} − هـ^{٢} + ٣ هـ − ١٥ > ٠

∴ ٩ + ١٦ − هـ^{٢} + ٣ هـ − ١٥ > ٠

∴ هـ^{٢} − ٣ هـ − ١٠ < ٠

∴ (هـ + ٢) (هـ − ٥) < ٠



وذلك يتحقق لكل هـ ∈]−٢ ، ٥[

⑤ ∵ ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

∴ هـ^{٢} + (−٣ هـ)^{٢} + ٢ هـ^{٢} − ١٢ هـ + ٣ > ٠

∴ هـ^{٢} + ٩ هـ^{٢} + ٢ هـ^{٢} − ١٢ هـ + ٣ > ٠

∴ ١٢ هـ^{٢} − ١٢ هـ + ٣ > ٠

∴ ٤ هـ^{٢} − ٤ هـ + ١ > ٠

∴ (٢ هـ − ١)^{٢} > ٠ وذلك يتحقق لكل هـ ∈ ح

٢١

① ∵ ل^{٢} + ك^{٢} − حـ > ٠

∴ (−١)^{٢} + (٢)^{٢} − ٢ أ + ٣ > ٠

∴ −٢ أ > −٨ ∴ أ < ٤

∴ أ ∈]−∞ ، ٤[

② ∵ الدائرة تمر بنقطة الأصل

∴ حـ = ٠ ∴ ٢ أ − ٣ = ٠ ∴ أ = $\frac{٣}{٢}$

③ ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ حـ = ل^{٢} ∴ ٢ أ − ٣ = (−١)^{٢}

∴ أ = ٢

④ ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ حـ = ك^{٢} ∴ ٢ أ − ٣ = (٢)^{٢}

∴ أ = $\frac{٧}{٢}$

⑤ م = (١ ، −٢)

∵ الدائرة تمس المستقيم :

٣ س + ٤ ص + ١٥ = ٠

∴ نق = $\frac{|٣ \times ١ + ٤ \times (-٢) + ١٥|}{\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}}$ = ٢

، ∵ $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ}$ = نق

∴ $\sqrt{(-١)^{٢} + (٢)^{٢} - ٢ أ + ٣}$ = ٢ ، بالتربيع

∴ ١ + ٤ − ٢ أ + ٣ = ٤ ∴ أ = ٢

⑥ ∵ نق = ٧ وحدة طولية

∴ $\sqrt{(-١)^{٢} + (٢)^{٢} - ٢ أ + ٣}$ = ٧ ، بالتربيع

∴ ١ + ٤ − ٢ أ + ٣ = ٤٩ ∴ أ = − $\frac{٤١}{٢}$

٢٢

① ∵ الدائرة تمس المستقيم : س = ٢

∴ نق = ٣

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ٩

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٨ ص + ٣٢ = ٠

② معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ٧}{س - ٣} = \frac{٧ - ٣}{٣ + ١}$

أى أن : − س + ص − ٤ = ٠

∴ نق = $\frac{|-١ \times ٥ + ١ \times ٣ - ٤|}{\sqrt{(-١)^{٢} + (١)^{٢}}}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ١٨

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ٦ ص + ١٦ = ٠

③ نق = ٣ ، م = (٤ ، ٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٩

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ١٠ ص + ٣٢ = ٠

④ ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (٤ ، ٠) ، نق = ٥

∴ م = (٤ ، ٥) أ، (٤ ، −٥)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٤)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ١٠ ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى : (س − ٤)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ١٠ ص + ١٦ = ٠

⑤ ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ م = ($٣\frac{١}{٢}$ ، −٤) أ، (−$٣\frac{١}{٢}$ ، −٤)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − $٣\frac{١}{٢}$)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٢,٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٧ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

أ، المعادلة هى :

(س + $٣\frac{١}{٢}$)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٢,٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٧ س + ٨ ص + ١٦ = ٠

⑥ ∵ الدائرة تمس المحورين

، ∵ النقطة (−٢ ، −٤) فى الربع الثالث

∴ المركز م = (− نق ، − نق)

∴ معادلة الدائرة هى :

(س + نق)^{٢} + (ص + نق)^{٢} = نق^{٢}

، ∵ (−٢ ، −٤) ∈ الدائرة

∴ (−٢ + نق)^{٢} + (−٤ + نق)^{٢} = نق^{٢}

∴ ٤ + نق^{٢} − ٤ نق + ١٦ + نق^{٢} − ٨ نق = نق^{٢}

∴ نق^{٢} − ١٢ نق + ٢٠ = ٠

∴ (نق − ٢) (نق − ١٠) = ٠

∴ نق = ٢ ومنها م = (−٢ ، −٢) أ، نق = ١٠

ومنها م = (−١٠ ، −١٠)

∴ توجد معادلتان هما :

(س + ٢)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٤

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠

أ، (س + ١٠)^{٢} + (ص + ١٠)^{٢} = ١٠٠

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٢٠ س + ٢٠ ص + ١٠٠ = ٠

⑦ ∵ الدائرة تمس محور السينات عند (−٣ ، ٠)

، وتمس محور الصادات.

∴ نق = ٣

، توجد دائرتان مركزاهما (−٣ ، ٣) ، (−٣ ، −٣)

، معادلة الدائرة الأولى هى :

(س + ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٦ ص + ٩ = ٠

، معادلة الدائرة الثانية هى :

(س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٩

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س + ٦ ص + ٩ = ٠

⑧ نق = $\sqrt{(٢)^{٢} + (٢\sqrt{٣})^{٢}}$

∴ نق = ٤

∴ مركز الدائرة م

= (−٢ ، ٤)

∴ حـ = ٤ + ١٦ − ١٦ = ٤

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س − ٨ ص + ٤ = ٠

⑨ نق = $\sqrt{(١)^{٢} + (٢\sqrt{٦})^{٢}}$ = ٥

∴ مركز الدائرة م

= (−٥ ، −١)

∴ حـ = ك^{٢} = ١

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ١٠ س + ٢ ص + ١ = ٠

⑩ ∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |ك| ، حـ = ل^{٢}

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ل^{٢} = ٠

، ∵ (٢ ، ١) تحقق المعادلة

∴ ٤ + ١ + ٤ ل + ٢ ك + ل^{٢} = ٠

∴ ٤ ل + ٢ ك + ل^{٢} = −٥ (١)

، ∵ (−٥ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ٢٥ + ٤ − ١٠ ل + ٤ ك + ل^{٢} = ٠

∴ −١٠ ل + ٤ ك + ل^{٢} = −٢٩ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح : ∴ ١٤ ل − ٢ ك = ٢٤

∴ ك = ٧ ل − ١٢ وبالتعويض فى (١)

∴ ٤ ل + ٢ (٧ ل − ١٢) + ل^{٢} = −٥

∴ ل^{٢} + ١٨ ل − ١٩ = ٠

∴ (ل + ١٩) (ل − ١) = ٠

∴ ل = −١٩ أ، ل = ١

ومنها ك = −١٤٥ أ، ك = −٥

∴ توجد دائرتان

∴ المعادلة الأولى هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ٣٨ س − ٢٩٠ ص + ٣٦١ = ٠

والأخرى : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ١٠ ص + ١ = ٠

⑪ ∵ الدائرة تمس محور الصادات

∴ نق = |ل| ، حـ = ك^{٢}

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ك^{٢} = ٠

، ∵ (−٤ ، ٢) تحقق المعادلة

∴ ١٦ + ٤ − ٨ ل + ٤ ك + ك^{٢} = ٠

أى أن : −٨ ل + ٤ ك + ك^{٢} = −٢٠ (١)

، ∵ (−١ ، ٢) تحقق المعادلة :

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + ك^{٢} = ٠

أى أن : −٢ ل + ٤ ك + ك^{٢} = −٥ (٢)

بطرح (١) من (٢) :

∴ ٦ ل = ١٥ ∴ ل = $\frac{٥}{٢}$ ومن المعادلة (٢)

∴ −٥ + ٤ ك + ك^{٢} = −٥

∴ ك^{٢} + ٤ ك = ٠ ∴ ك (ك + ٤) = ٠

∴ ك = ٠ أ، ك = −٤ ∴ توجد دائرتان.

معادلة الأولى هى : س^{٢} + ص^{٢} + ٥ س = ٠

، معادلة الأخرى هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٥ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

⑫ ∵ الدائرة يقع مركزها على محور السينات

∴ معادلة الدائرة هى

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + حـ = ٠

، ∵ (١ ، ٣) تحقق المعادلة

∴ ١ + ٩ + ٢ ل + حـ = ٠

ومنها ٢ ل + حـ = −١٠ (١)

، ∵ (٢ ، −٤) تحقق المعادلة :

∴ ٤ + ١٦ + ٤ ل + حـ = ٠

ومنها ٤ ل + حـ = −٢٠ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ل = −٥ ، حـ = صفر

∴ معادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س = ٠

⑬ م = (٦ ، ٨)

∵ [illegible] = $\sqrt{(١٢)^{٢} + (١٦)^{٢}}$

= ٢٠

∴ نق = ١٠

∴ معادلة الدائرة هى

(س − ٦)^{٢} + (ص − ٨)^{٢} = ١٠٠

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س − ١٦ ص = ٠

⑭ ∵ مركز الدائرة يقع على المستقيم ص − س = ١

∴ المركز (− ل ، − ك) يحقق المعادلة

أى أن : − ك + ل = ١ (١)

∴ معادلة الدائرة هى

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

∵ (−٢ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٤ + ١٦ − ٤ ل + ٨ ك + حـ = ٠

ومنها −٤ ل + ٨ ك + حـ = −٢٠ (٢)

، ∵ (٦ ، ٨) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٣٦ + ٦٤ + ١٢ ل + ١٦ ك + حـ = ٠

ومنها ١٢ ل + ١٦ ك + حـ = −١٠٠ (٣)

بطرح (٢) من (٣)

∴ ١٦ ل + ٨ ك = −٨٠

∴ ٢ ل + ك = −١٠ (٤)

ويجمع (٤) ، (١) : ∴ ٣ ل = −٩ ∴ ل = −٣

، من (١) : ∴ ك = −٤ ، من (٢) ∴ حـ = ٠

∴ معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٨ ص = ٠

(١٥) ∵ نق^{٢} = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ

∴ ٨٥ = ل^{٢} + ك^{٢} − حـ (١)

، معادلة الدائرة هى :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

، ∵ (−١ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة

∴ ١ + ٤ − ٢ ل + ٤ ك + حـ = ٠

أى أن : −٢ ل + ٤ ك + حـ = −٥ (٢)

، ∵ (٣ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة

∴ ٩ + ١٦ + ٦ ل + ٨ ك + حـ = ٠

أى أن : ٦ ل + ٨ ك + حـ = −٢٥ (٣)

من (٢) ، (٣) بالطرح : ٨ ل + ٤ ك = −٢٠

∴ ك = −٥ − ٢ ل (٤)

وبالتعويض فى (٢) :

∴ −٢ ل + ٤ (−٥ − ٢ ل) + حـ = −٥

∴ حـ = ١٥ + ١٠ ل (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) فى معادلة (١)

∴ ٨٥ = ل^{٢} + (−٥ − ٢ ل)^{٢} − ١٥ − ١٠ ل

∴ ل^{٢} + ٢٥ + ٢٠ ل + ٤ ل^{٢} − ١٥ − ١٠ ل − ٨٥ = ٠

∴ ٥ ل^{٢} + ١٠ ل − ٧٥ = ٠

∴ ل^{٢} + ٢ ل − ١٥ = ٠

∴ (ل − ٣) (ل + ٥) = ٠ ، ومنها ل = ٣ أ، ل = −٥

∴ ك = −١١ أ، ك = ٥

، حـ = ٤٥ أ، حـ = −٣٥

∴ توجد معادلتان هما :

س^{٢} + ص^{٢} + ٦ س − ٢٢ ص + ٤٥ = ٠

أ، س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س + ١٠ ص − ٣٥ = ٠

(١٦) لإيجاد نقط تقاطع الدائرة مع محور السينات

نضع ص = ٠ فى معادلة الدائرة

∴ س^{٢} + ٢ س = ٠

س (س + ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = −٢

∴ نقط التقاطع أ = (٠ ، ٠) ، ب = (−٢ ، ٠)

م = مركز الدائرة المطلوبة منتصف $\overline{أب}$

= $\left(\frac{٠ - ٢}{٢} ، \frac{٠}{٢}\right)$

م = (−١ ، ٠)

ونصف قطرها نق = م أ = $\sqrt{(−١)^{٢} + (٠)^{٢}}$ = ١

∴ معادلة الدائرة (س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١

٢٣

∵ ل = $\frac{١}{٢}$ ، ك = −٢ ، حـ = −٢

∴ نق^{٢} = $\frac{١}{٤}$ + ٤ + ٢ = ٦$\frac{١}{٤}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠°}{ن}\right)$

= $\frac{٣}{٢}$ × ٦$\frac{١}{٤}$ × جا ١٢٠° = $\frac{٧٥\sqrt{٣}}{١٦}$ وحدة مربعة.

٢٤

∵ ل = ٣ ، ك = −٦ ، حـ = ٥

∴ نق^{٢} = ٩ + ٣٦ − ٥ = ٤٠

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠°}{ن}\right)$ = $\frac{٥}{٢}$ × ٤٠ × جا ٧٢°

≃ ٩٥,١٠٥٦٥ وحده مربعة.

، ∵ الوحدة المربعة تمثل مساحة قدرها (٥)^{٢} = ٢٥ سم^{٢}

∴ مساحة الشكل الخماسى المنتظم

= ٩٥,١٠٥٦٥ × ٢٥ ≃ ٢٣٧٨ سم^{٢}

٢٥

ل = −٥ ، ك = ٣ ، حـ = ٢٥

∴ نق^{٢} = ٢٥ + ٩ − ٢٥ = ٩

∴ مساحة الشكل السداسى المنتظم

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠°}{ن}\right)$ = $\frac{٦}{٢}$ × ٩ × جا ٦٠°

= $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة.

٢٦

نق^{٢} = ١٦

∴ مساحة المضلع = $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا $\left(\frac{٣٦٠°}{ن}\right)$

= $\frac{١٢}{٢}$ × ١٦ × جا ٣٠°

= ٤٨ وحدة مربعة.

٢٧

مركز الدائرة هو نقطة تقاطع القطرين

٣ س + ص = −٢ (١)

٤ س − ص = ١٦ (٢)

من (١) ، (٢) : س = ٢ ، ص = −٨

∴ مركز الدائرة م = (٢ ، −٨)

∴ معادلة الدائرة هى : (س − ٢)^{٢} + (ص + ٨)^{٢} = ٢٥

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ١٦ ص + ٤٣ = ٠

، بالتعويض عن : س = ٥ ، ص = −٤

∴ الطرف الأيمن

= (٥)^{٢} + (−٤)^{٢} − ٤ (٥) + ١٦ (−٤) + ٤٣

= ٠ = الطرف الأيسر

∴ (٥ ، −٤) ∈ الدائرة.

٢٨

∵ $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

أى أن : $\frac{ص - ٥}{س - ١}$ = ٢

∴ ٢ س − ٢ = ص − ٥

∴ ٢ س − ص = −٣ (١)

، س + ص = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ نقطة تقاطع القطرين هى : (−١ ، ١)

∴ مركز الدائرة م = (−١ ، ١)

∵ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س جتا هـ − ٢ ص جا هـ − ٨ = ٠

∴ ل = − جتا هـ ، ك = − جا هـ ، حـ = −٨

∴ نق = $\sqrt{جتا^{٢} هـ + جا^{٢} هـ + ٨}$

∴ نق = $\sqrt{١ + ٨}$ = ٣

∴ معادلة الدائرة المطلوبة هى :

(س + ١)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٩

٢٩

نقط تقاطع الدائرتين :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س = س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ١٢

− ١٠ س − ٢ س = −١٢

− ١٢ س = −١٢

∴ س = ١ بالتعويض فى معادلة الدائرة الأولى.

∴ (١)^{٢} + ص^{٢} − ١٠ (١) = ٠

ص^{٢} = ٩ ∴ ص = ± ٣

∴ نقط التقاطع (١ ، ٣) ، (١ ، −٣)

(١) مركز الدائرة نقطة الأصل (٠ ، ٠)

بعد النقطة الأولى عن المركز

= $\sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$

، بعد النقطة الثانية عن المركز

= $\sqrt{(١ - ٠)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}}$ = $\sqrt{١٠}$

∴ النقطتان تقعان على دائرة مركزها (٠ ، ٠)

وطول نصف قطرها $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة هى س^{٢} + ص^{٢} = ١٠

② مركز الدائرة النقطة (٢ ، ٠) :

بعد النقطة الأولى عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

، بعد النقطة الثانية عن المركز

$= \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (-٣ - ٠)^{٢}} = \sqrt{١٠}$

∴ النقطتان تقعان على دائرة مركزها (٢ ، ٠)

وطول نصف قطرها $\sqrt{١٠}$ وحدة طول.

∴ معادلة الدائرة هي : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٠

٣٠

∵ م أ = $\sqrt{(-٥)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

، م ب = $\sqrt{(-٤)^{٢} + (-٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

، م حـ = $\sqrt{(-٤)^{٢} + (٥)^{٢}} = \sqrt{٤١}$

∴ م أ = م ب = م حـ

∴ أ ، ب ، حـ تقع على دائرة واحدة

، معادلة الدائرة هي :

(س + ٥)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٤١

٣١

معادلة الدائرة هي :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

، ∵ النقط أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة

∴ ٩ + ٤ + ٦ ل − ٤ ك + حـ = ٠ (١)

، ٩ + ٦٤ + ٦ ل + ١٦ ك + حـ = ٠ (٢)

، ١ − ٢ ل + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ل = −٣ ، ك = −٣ ، حـ = −٧

∴ مركز الدائرة م = (٣ ، ٣)

∴ معادلة الدائرة هي :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ٦ ص − ٧ = ٠

، ∵ منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{٣ + ٣}{٢} ، \frac{-٢ + ٨}{٢}\right)$

= (٣ ، ٣) = م

∴ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة

٣٢

أب = $\sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + (٠ - ٦)^{٢}} = ١٠$

ب حـ = $\sqrt{٠ + (٦ - ٠)^{٢}} = ٦$

أ حـ = $\sqrt{(٨ - ٠)^{٢} + ٠} = ٨$

∵ (أب)^{٢} = (ب حـ)^{٢} + (أ حـ)^{٢}

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية في حـ

∴ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة المارة برؤوسه

مركز الدائرة م = $\left(\frac{٨ + ٠}{٢} ، \frac{٠ + ٦}{٢}\right)$

= (٤ ، ٣) ، نق = ٥

المعادلة (س − ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٢٥

٣٣

أب = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٦$

، ب حـ = $\sqrt{(٣)^{٢} + (-٣\sqrt{٣})^{٢}} = ٦$

، حـ أ = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (-٣\sqrt{٣})^{٢}} = ٦$

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

∴ مركز الدائرة = $\left(\frac{-٢ + ٤ + ١}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٣\sqrt{٣}}{٣}\right)$

= (١ ، $\sqrt{٣}$)

∴ نق = م أ = $\sqrt{(-٣)^{٢} + (-\sqrt{٣})^{٢}} = ٢\sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هي :

(س − ١)^{٢} + (ص − $\sqrt{٣}$)^{٢} = ١٢

٣٤

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

، ∵ (٢ ، −١) ، (−٢ ، ٠) ، (٠ ، −٩) تحقق معادلة الدائرة.

∴ ٤ + ١ + ٤ ل − ٢ ك + حـ = ٠

أي أن : ٤ ل − ٢ ك + حـ = −٥ (١)

، ٤ − ٤ ل + حـ = ٠ (٢)

، ٨١ − ١٨ ك + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) : ∴ ل = ١ ، حـ = ٠

ك = $\frac{٩}{٢}$

∴ المعادلة هي : س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٩ ص = ٠

، مركز الدائرة م = (−١ ، −٤,٥)

، نق = $\sqrt{١ + (٤,٥)^{٢}} = \frac{\sqrt{٨٥}}{٢}$ وحدة طول.

٣٥

بفرض أن الدائرة التي تمر بـ أ ، ب ، حـ هي :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + حـ = ٠

∴ النقط أ ، ب ، حـ تحقق معادلة الدائرة

∴ ٩ + ٦ ل + حـ = ٠ (١)

، ٨١ + ١٨ ك + حـ = ٠ (٢)

، ١ + ٢ ك + حـ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) :

∴ ل = −٣ ، ك = −٥ ، حـ = ٩

∴ معادلة الدائرة هي :

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س − ١٠ ص + ٩ = ٠

وبالتعويض بالنقطة ء = (−١ ، ٢)

∴ الطرف الأيمن

= (−١)^{٢} + (٢)^{٢} − ٦ (−١) − ١٠ (٢) + ٩ = ٠

= الطرف الأيسر

∴ النقطة ء ∈ الدائرة.

أي أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

٣٦

① س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س + ٦ ص = ٠

② س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٤ ص + ٤ = ٠

③ س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ ص + ٢٠ = ٠

④ س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س − ٤ ص + ٣٦ = ٠

⑤ س^{٢} + ص^{٢} − ١٢ س − ١٤ ص + ٣٦ = ٠

⑥ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٢ ص − ١١ = ٠

⑦ س^{٢} + ص^{٢} − ٢٤ س − ٨ $\sqrt{٣}$ ص + ١٤٤ = ٠

⑧ س^{٢} + ص^{٢} − ٨ س − ٤ ص + ١٦ = ٠

⑨ س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

٣٧

∵ معادلة المستقيم هي :

$\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٤} = ١$

∴ و ء = ٣ ، و هـ = ٤ ، هـ ء = ٥

وبفرض أ ء = ل ، و ب = ك

∴ ء أ = ٣ − ل

∴ ب هـ = ٤ − ك

ومن هندسة الشكل نجد أن ل = ك

، أ ء = ء حـ ، ب هـ = هـ حـ

∴ ء حـ = ٣ − ل ، هـ حـ = ٤ − ك = ٤ − ل

، ∵ ء حـ + هـ حـ = ٥ وحدة

∴ ٣ − ل + ٤ − ل = ٥

∴ ل = ١ ومنها ك = ١ ∴ نق = ١

∴ مركز الدائرة (١ ، ١)

∴ معادلة الدائرة هي (س − ١)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ١

أي أن : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س − ٢ ص + ١ = ٠

٣٨

بفرض أن مركز الدائرة = (س ، ٠)

، ∵ ميل $\overline{م أ}$ × ميل $\overline{أب}$ = −١

∴ $\frac{٣}{٣ - س} \times \frac{٣}{٤} = -١$

∴ سـ − ٢ = $\frac{٩}{٤}$ ∴ سـ = ٤ $\frac{١}{٤}$

∴ مركز الدائرة م = (٤ $\frac{١}{٤}$ ، ٠)

، ∵ نق = م أ = $\sqrt{(٤ \frac{١}{٤} - ٢)^٢ + (٠ - ٣)^٢}$ = ٣ $\frac{٣}{٤}$

معادلة الدائرة هى :

(سـ − ٤ $\frac{١}{٤}$)^٢ + ص^٢ = (٣ $\frac{٣}{٤}$)^٢

أى أن : سـ^٢ + ص^٢ − $\frac{١٧}{٢}$ سـ + ٤ = ٠

أى أن : ٢ سـ^٢ + ٢ ص^٢ − ١٧ سـ + ٨ = ٠

٢٩

من هندسة الشكل :

(٤)^٢ = ٨ × ب ء

∴ ب ء = ٢

∴ النقطة ب (١٠ ، ٠)

، ∵ Δ أ ب حـ قائم فى أ

∴ $\overline{ب و}$ هو قطر فى الدائرة التى تمر بالنقط أ ، ب ، و

∴ مركز الدائرة هى : (٥ ، ٠) ، نق = ٥ وحدة

∴ معادلة الدائرة هى : (سـ − ٥)^٢ + ص^٢ = ٢٥

أى أن : سـ^٢ + ص^٢ − ١٠ سـ = ٠

ثالثا مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

١

① (د)	② (جـ)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (ب)

إرشادات لحل رقم ١

① بوضع ك − ٢ = ٢ − ك

∴ ٢ ك = ٤ ∴ ك = ٢

عندئذ المعادلة تصبح −٢ سـ + ٦ ص − ٢٥ = ٠

«معادلة خط مستقيم»

، عند ك ≠ ٢ فإن معامل سـ^٢ ≠ معامل ص^٢

∴ المعادلة لا تمثل دائرة مهما كانت قيمة ك

② ∵ قاعدة المخروط معادلتها سـ^٢ + ص^٢ = ٦٤

∴ طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٨ وحدة طولية.

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × ٦٤ × ٦ = ١٢٨ π وحدة مكعبة.

③ ∵ مركز الدائرة = (٧ ، ٥) ، نق = ٤ وحدة طولية.

∴ البعد بين المركز ومحور الصادات

= ٧ وحدات طولية.

∴ أقل بُعد بين محور الصادات وأى نقطة على الدائرة = ٧ − ٤ = ٣ وحدات طولية.

④ ∵ مركز الدائرة التى تمس محورى الإحداثيات لابد وأن يقع على المستقيم

ص = سـ

أ، ص = − سـ



، ∵ الدائرة سـ^٢ + ص^٢ = ٢٥ تقطع المستقيمان

ص = سـ ، ص = − سـ

فى أربع نقاط كما بالشكل المقابل.

∴ عدد الدوائر يساوى ٤

⑤ من هندسة الشكل



∵ Δ أ و حـ قائم فى و

، $\overline{و ب}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$

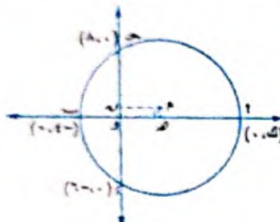
∴ (و ب)^٢ = ٨ × ٢ = ١٦

∴ و ب = ٤ وحدة طولية.

، ∵ مركز الدائرة = (٠ ، ٠)

∴ معادلة الدائرة هى سـ^٢ + ص^٢ = ١٦

⑥



∵ و ب × و أ = و حـ × و ء

∴ ٤ × و أ = ٨ × ٦

∴ و أ = ١٢

∴ أ = (١٢ ، ٠)

، برسم $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ن}$ ⊥ $\overline{ء حـ}$

∴ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ هـ = (٤ ، ٠)

، ن منتصف $\overline{ء حـ}$ ∴ ن = (٠ ، ١)

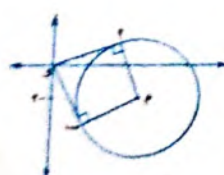
∴ م = (٤ ، ١)

∴ نق = م أ = $\sqrt{(١٢ - ٤)^٢ + (٠ - ١)^٢}$ = $\sqrt{٦٥}$

∴ معادلة الدائرة هى

(سـ − ٤)^٢ + (ص − ١)^٢ = ٦٥

⑦



∵ مركز الدائرة المعلومة (م) = (٥ ، −٢)

، ∵ $\overline{م أ}$ ⊥ $\overline{أ و}$ ، $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{و ب}$

∴ الشكل أ م ب و تمر برؤوسه دائرة طول قطرها $\overline{م و}$ ومركزها هو منتصف $\overline{م و}$

∴ المركز ($\frac{٥ + ٠}{٢}$ ، $\frac{٠ + -٢}{٢}$) = ($\frac{٥}{٢}$ ، −١)

وهى نفس الدائرة التى تمر برؤوس Δ أ و ب

⑧ بالنسبة للدائرة الأولى



م$_١$ = (٥ ، ٥)

، نق = ٥ $\sqrt{٢}$

، بالنسبة للدائرة الثانية

م$_٢$ = (−٣ ، −١) ، نق$_٢$ = ٥ $\sqrt{٢}$

، ∵ طول $\overline{م_١ م_٢}$ = $\sqrt{(٥ + ٣)^٢ + (٥ + ١)^٢}$

= ١٠ وحدة طولية

، ∵ (م$_١$ م$_٢$)^٢ = (أ م$_١$)^٢ + (أ م$_٢$)^٢

∴ الشكل أ م$_١$ ب م$_٢$ مربع

∴ أ ب = ١٠ وحدات طولية

٢

∵ الدائرة ن تمس محورى الإحداثيات فى الربع الثالث

∴ ن هى (− ل ، − ل) ، تحقق معادلة المستقيم

ص = ٢ سـ + ١

∴ − ل = −٢ ل + ١ ∴ ل = ١

∴ مركز الدائرة ن هو (−١ ، −١)

∴ معادلة الدائرة ن هى

(سـ + ١)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١

ومنها سـ^٢ + ص^٢ + ٢ سـ + ٢ ص + ١ = ٠

، ∵ الدائرة م تمس محورى الإحداثيات فى الربع الثانى

∴ م هى (− ك ، ك) ، تحقق معادلة المستقيم

ص = ٢ سـ + ١

∴ ك = −٢ ك + ١ ∴ ك = $\frac{١}{٣}$

∴ مركز الدائرة م هى (−$\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$)

∴ معادلة الدائرة م هى

(سـ + $\frac{١}{٣}$)^٢ + (ص − $\frac{١}{٣}$)^٢ = ($\frac{١}{٣}$)^٢

أى أن سـ^٢ + ص^٢ + $\frac{٢}{٣}$ سـ − $\frac{٢}{٣}$ ص + $\frac{١}{٩}$ = ٠

٣

∵ المثلث متساوى الأضلاع

وطول ضلعه ٦ وحدة طول

∴ حـ ص = ٣ وحدة طول

، أ ص = ٣ $\sqrt{٣}$ وحدة طول

، ∵ م نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ م ص = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٣}$ = $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ مركز الدائرة هو (٣ ، $\sqrt{٣}$) ، نق = $\sqrt{٣}$

∴ معادلة الدائرة هى :

(س − ٣)^{٢} + (ص − $\sqrt{٣}$)^{٢} = ٣

٤

نرسم : م ء ⊥ و ص

ويفرض أن طول نصف قطر

الدائرة م هو نق

فى Δ م ب ء :

(٨ + نق)^{٢} = (٨)^{٢} + (٨ − نق)^{٢}

∴ ٦٤ + نق^{٢} + ١٦ نق = ٦٤ + ٦٤ + نق^{٢} − ١٦ نق

∴ ٣٢ نق = ٦٤ ∴ نق = ٢

∴ مركز الدائرة م هو : (٨ ، ٢)

∴ معادلة الدائرة م هى :

(س − ٨)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} = ٤

اى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٦ س − ٤ ص + ٦٤ = ٠

تطبيقات حياتية

١

نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - حـ}$ = $\sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢} - ١١}$

= $\sqrt{١٤}$ وحدة طول.

∴ مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ١٤ π

، ∵ الوحدة المربعة فى المستوى تمثل (٥)^{٢} = ٢٥ م^{٢}

∴ مساحة الميدان = ١٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٥ = ١١٠٠ م^{٢}

٢

معادلة الدائرة هى : (س − ٧)^{٢} + (ص + ٩)^{٢} = (٣٠)^{٢}

، ب أ = $\sqrt{(٢٥ - ٧)^{٢} + (-٣٠ + ٩)^{٢}}$ ≈ ٢٧,٦٦

، ∵ ب أ < نق

∴ يمكن للرادار رصد السفينة الواقعة عند «ب»

٣

∵ ل = −٢ ، ك = ٦ ، حـ = −٦٠

∴ نق^{٢} = ٤ + ٣٦ + ٦٠ = ١٠٠

∴ مساحة الشكل الثمانى المنتظم

= $\frac{ن}{٢}$ نق^{٢} جا ($\frac{٣٦٠^{\circ}}{ن}$) = $\frac{٨}{٢}$ × ١٠٠ × جا ٤٥$^{\circ}$

= ٢٠٠ $\sqrt{٢}$ وحدة مربعة.

٤

① ∵ البكرة أ تمس محورى الإحداثيات ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

∴ مركز دائرتها النقطة م (٥ ، ٥)

∴ معادلتها هى : (س − ٥)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٥

أى أن :

س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ١٠ ص + ٢٥ = ٠

② ∵ معادلة دائرة البكرة (ب) :

س^{٢} + ص^{٢} + ١٤ س + ٤٥ = ٠

∴ ل = ٧ ، ك = ٠ ، حـ = ٤٥

، نق = $\sqrt{٤٩ - ٤٥}$ = ٢

ويكون مركزها النقطة ن (−٧ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة.

∴ البعد بين مركزى البكرتين = م ن

= $\sqrt{(٥ + ٧)^{٢} + (٥)^{٢}}$ = ١٣ وحدة

∵ كل وحدة فى المستوى الاحداثى تمثل ٦ سم

∴ البعد بين البكرتين = ١٣ × ٦ = ٧٨ سم

٥

∵ أقصى ارتفاع بين الحافتين = ١٠ وحدات

∴ ٢ نق$_{١}$ + ٢ نق$_{٢}$ = ١٠ ∴ نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ = ٥

، مركز الترس الأكبر هو (٥ ، ٤)

∴ مركز الترس الأصغر هو (٥ ، ٩)

نق$_{١}^{٢}$ = ٢٥ + ١٦ − ٣٢ = ٩

∴ نق$_{١}$ = ٣ وحدة ∴ نق$_{٢}$ = ٢ وحدة

∴ معادلة الترس الأصغر هى

(س − ٥)^{٢} + (ص − ٩)^{٢} = ٤

أى أن : س^{٢} + ص^{٢} − ١٠ س − ١٨ ص + ١٠٢ = ٠

النمـــوذج الأول

امتحان الكمبيوتر ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

(أ) ٤ π نق^{٢} (ب) ٣ π نق^{٢} (جـ) ٣ π نق^{٣} (د) ٤ π نق^{٣}

٢ إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن ....

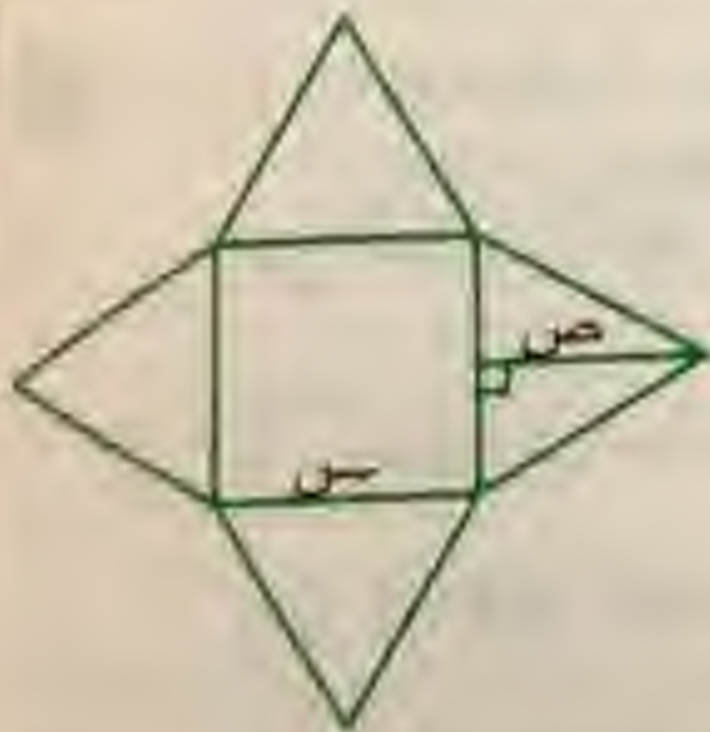
(أ) أب = ب حـ = حـ أ (ب) أب + ب حـ = أ حـ

(جـ) أب + ب حـ < أ حـ (د) أب + ب حـ > أ حـ

٣ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٣ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٣}$

٤ الشكل المقابل يمثل شبكة هرم رباعى منتظم ارتفاعه (ع) فإن العلاقة بين س ، ص ، ع هى ....



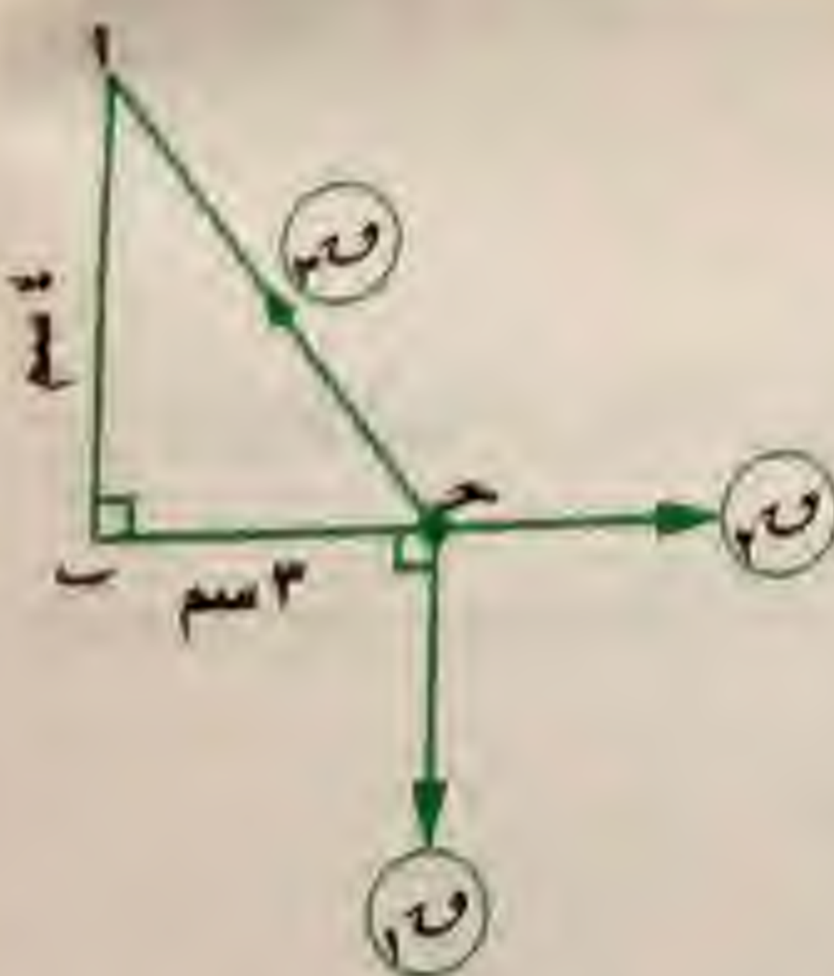
(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

(ب) س^{٢} + ع^{٢} = ص^{٢}

(جـ) $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ + ع^{٢} = ص^{٢}

(د) $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ + ص^{٢} = ع^{٢}

٥ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ، ق$_{٣}$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : ق$_{١}$: ق$_{٢}$: ق$_{٣}$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسي منتظم ، أثرت القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم في الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب.

أوجد المحصلة مقدارًا واتجاهًا.

٧ هرم رباعي منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم

فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

(أ) ٢٤٠ (ب) ٢٦٠ (جـ) ٣٠٠ (د) ٣٦٠

٨ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^٢ ، وطول راسمه ١٠ سم.

أوجد :

(١) مساحته الجانبية. (٢) مساحته الكلية. (٣) حجمه.

٩ في الشكل المقابل :

إذا كانت : حـ (٨ ، ٠) ، ء (٢ ، ٠)

فإن معادلة الدائرة هي ....

(أ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

(ب) $(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(د) $(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

١٠ قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°
إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التي مقدارها ق
فإن مقدار المحصلة = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٠

١١ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°
وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٧٢ (د) ٣٦ $\sqrt{٣}$

١٢ إذا كانت : $\overrightarrow{ح}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكانت $\overrightarrow{ح'}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $-\overrightarrow{ق_٢}$

فإن : ....

(أ) $\overrightarrow{ح} + \overrightarrow{ح'} = ٢ \overrightarrow{ق_١}$

(ب) $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ح'} + ٢ \overrightarrow{ق_٢}$

(جـ) $ح^٢ + ح'^٢ = ٢ (ق_١^٢ + ق_٢^٢)$

(د) كل ما سبق.

---

١٣ معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ =$ صفر

بالانتقال (٢ ، - ٢)

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٤ ص + ٢٠ = ٠$

(ب) $س^٢ - ١٦ س + ١٠ ص + ٢٠ = ٠$

(جـ) $(س - ٦)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٠$

(د) $(س - ٨)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

---

١٤ قوة مقدارها $٥ \sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر في اتجاه ٣٠° شرق الشمال حُللت إلى مركبتين متعامدتين

فإن مقدار المركبة في اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $٧ \frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥ \sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

---

١٥ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث.كجم متصل طرفه أ بمفصل مثبت في حائط رأسي أثرت عليه قوة أفقية ق عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار كل من القوة ورد الفعل.

---

١٦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل

بوحدة النيوتن تؤثر في محور ص

فإن : ق = ... نيوتن.



(أ) ٨

(ب) ٦

(جـ) ١٤

(د) ٢

١٧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوِّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم فإن طول نصف قطر قاعدة المخروط علمًا بأن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل = ... سم $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

(أ) $\frac{٢٠\sqrt{١١٠}}{١١}$ (ب) $١٠\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦٠ (د) $٨\sqrt{٥}$

١٨ الشكل المقابل يمثل شبكة مخروط حيث إن

قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائرى = θ

حيث $١٨٠° < \theta < ٣٦٠°$

فإن : ....



(أ) ل > ٢ نق (ب) ل = نق

(جـ) ل = ٢ نق (د) ل < ٢ نق

١٩ أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنة ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

٢٠ إذا كانت المعادلة $(س \quad ص \quad ٢٥) \begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٤ \end{pmatrix} = \square$ تمثل معادلة دائرة

فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠

٢١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإن مقدار محصلتهما لا يمكن أن يساوى ....

(أ) ٢ ق (ب) $٣\sqrt{٢}$ ق (جـ) ٨ ق (د) $٥\sqrt{٣}$ ق

٢٢ في الشكل المقابل : جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد فإن : $ش_{٢} - ش_{١}$ = ... ث.جم

(أ) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٢٣ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى.

٢٤ النقطة التي تقع على الدائرة $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)

النمــوذج الثــاني

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحداً. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

٢ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة ال... يساوي ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٣ مركز الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٤ ، ٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٣ ، -٤)

٤ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين هو ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

٥ حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... سم^{٣} (π = ...

(أ) ٧٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١١٠ (د) ٧٧٠

٦ قوتان متساويتان في المقدار ومتلاقيتان في نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث.كجم أوجد مقدار كل من القوتين.

---

٧ قوى مستوية مقاديرها ٢ ق ، ٣ ق ، ٤ ق ث.جم تؤثر في نقطة ، في اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع في ترتيب دورى واحد.

فإن مقدار محصلة هذه القوى = ... ث.جم

(أ) ٥ ق (ب) ٢ $\sqrt{٣}$ ق (جـ) $\sqrt{٣}$ ق (د) ق

---

٨ أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم ، أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه $\overleftarrow{أ د}$ حُللت هذه القوة إلى مركبتين في الاتجاهين $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ فإن مركبة هذه القوة في اتجاه $\overleftarrow{أ و}$ تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢٠ (د) ١٠ $\sqrt{٢}$

---

٩ معادلة الدائرة التي مركزها (٢ ، −٣) وتمس المستقيم الذى معادلته :

٣ س − ٤ ص + ٢ = ٠ هى ....

(أ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢ (ب) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٤

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٦ ص = ١٢ (د) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٦

---

١٠ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف. (ب) يتضاعف ثلاث مرات.

(ب) يتضاعف أربع مرات. (د) لا يتغير.

---

١١ في الشكل المقابل :



أ ب جـ د هـ و شكل سداسى منتظم

فإن محصلة القوى تكون في اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{أ د}$ (ب) $\overleftarrow{د أ}$

(جـ) $\overleftarrow{أ جـ}$ (د) $\overleftarrow{هـ أ}$

١٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبي ٢٥ سم.

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم.

---

١٣ إذا كانت : $\overrightarrow{\text{ق}_1} = ٥ \overrightarrow{\text{س}} - ٣ \overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2} = -٧ \overrightarrow{\text{س}} + ٢ \overrightarrow{\text{ص}}$

، $\overrightarrow{\text{ق}_3} = ٢ \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$ فإن : $\overrightarrow{\text{ح}}$ = ...

(أ) $٧ \overrightarrow{\text{س}} - ٢ \overrightarrow{\text{ص}}$ (ب) $٤ \overrightarrow{\text{س}} - ٤ \overrightarrow{\text{ص}}$

(جـ) $-١٤ \overrightarrow{\text{س}} + ٤ \overrightarrow{\text{ص}}$ (د) $\overrightarrow{\text{صفر}}$

---

١٤ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسي تحت تأثير قوة على الكرة في اتجاه عمودي على الخيط.

فإن مقدار القوة = ... داين.

(أ) $٣٠٠\sqrt{٣}$ (ب) ١٢٠٠ (جـ) ٣٠٠ (د) $٣٠٠\sqrt{٢}$

---

١٥ قوتان ق ، ق تؤثران في نقطة مادية ومحصلتهما ق

فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

---

١٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ٢٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد ارتفاع المخروط.

---

١٧ في الشكل المقابل :

إذا كانت معادلة المستقيم ل هي $\frac{\text{س}}{٨} + \frac{\text{ص}}{٦} = ١$

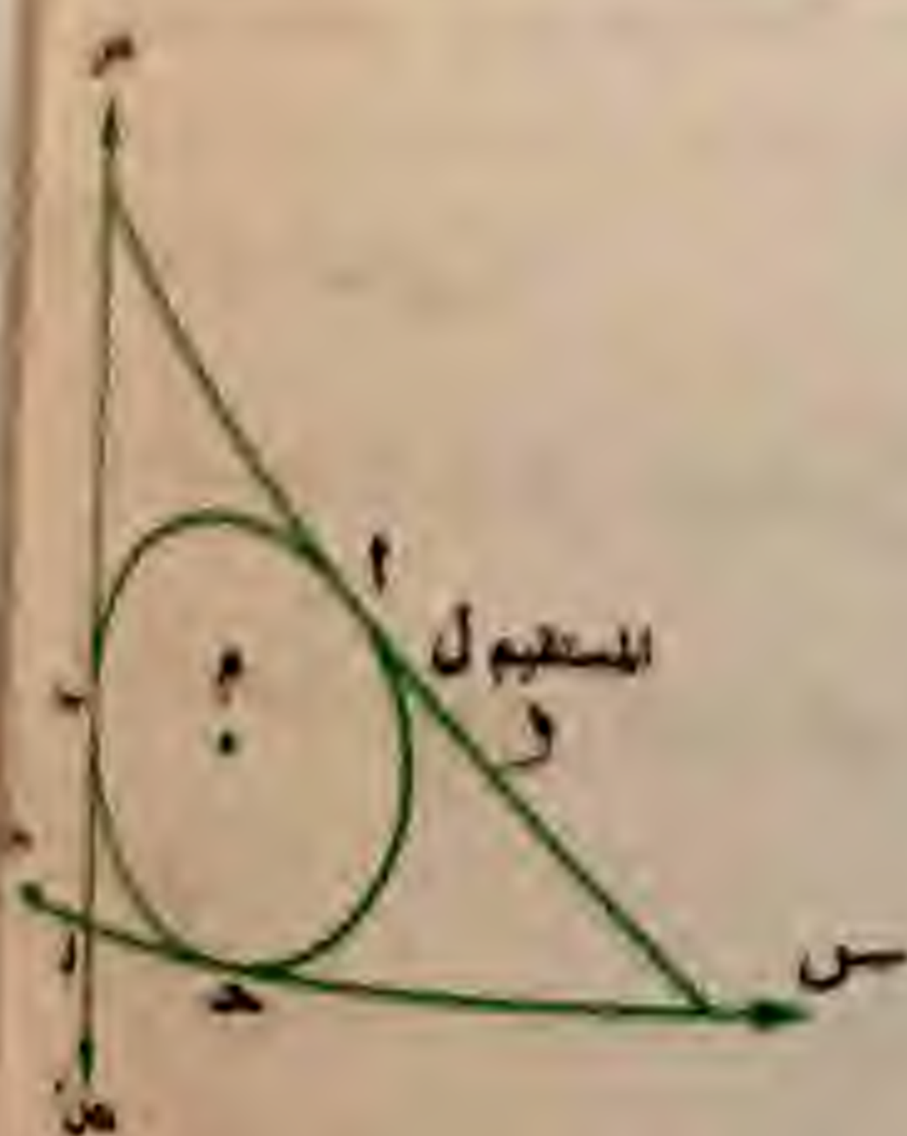
فإن معادلة الدائرة هي ....

(أ) $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ = ٤$

(ب) $(\text{س} - ٢)^٢ + (\text{ص} - ٢)^٢ = ١٦$

(جـ) $(\text{س} + ٢)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ = ٤$

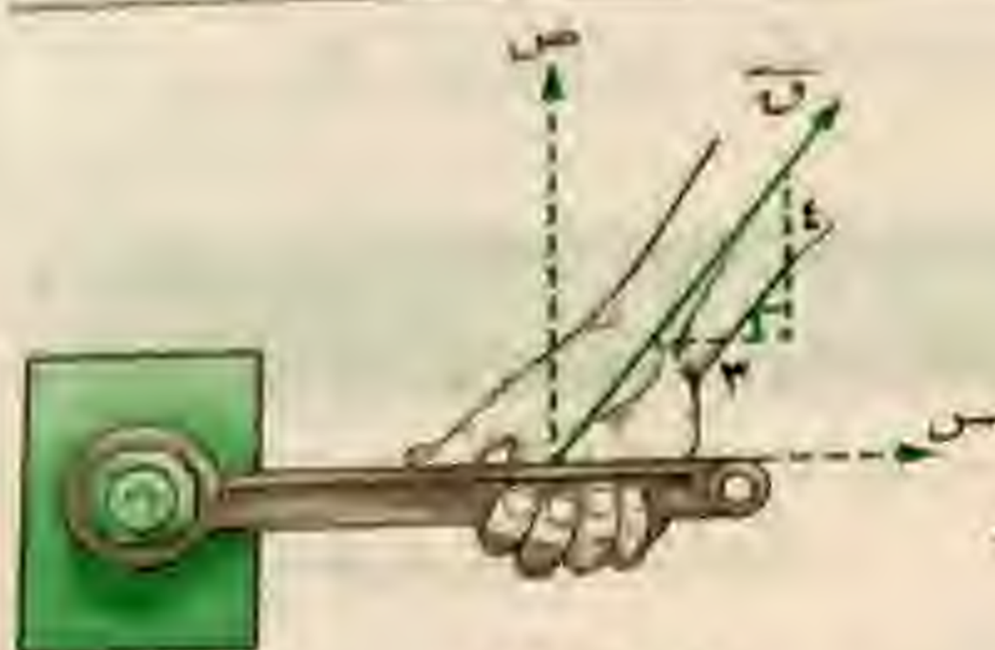
(د) $(\text{س} + ٢)^٢ + (\text{ص} + ٢)^٢ = ١٦$



١٨ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم تساوى ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

١٩ فى الشكل المقابل :



إذا كانت المركبة الصادية للقوة ($\overleftarrow{ق}$) لشخص يستخدم مفتاحًا للربط هى ٦٠ نيوتن فإن المركبة السينية للقوة $\overleftarrow{ق}$ تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

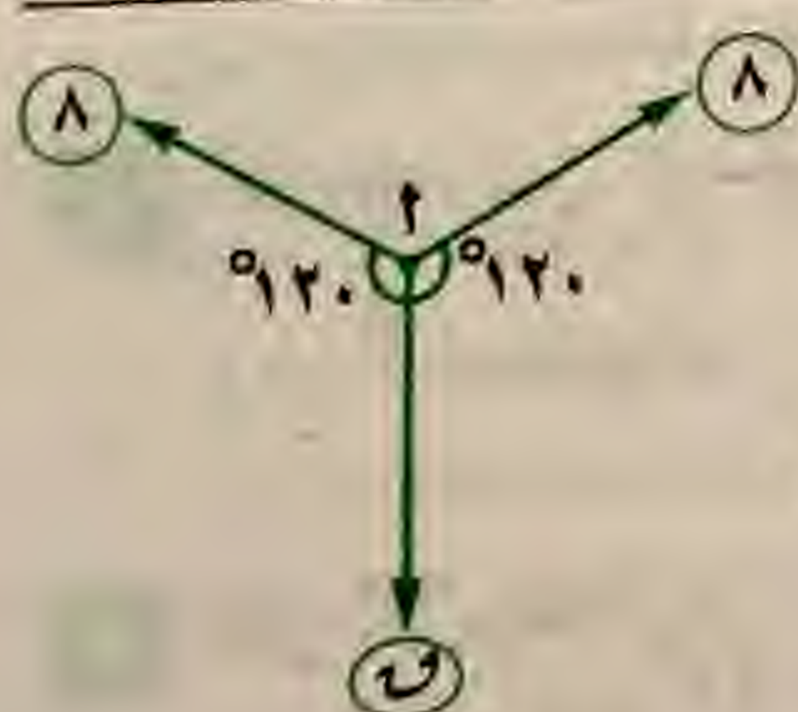
٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ١٠ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين يساوى ....

(أ) صفر° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٤٥°

٢١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذى طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل نق^٢ (جـ) π ل نق (د) π ل نق^٢

٢٢ فى الشكل المقابل :



أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة الموضحة بالشكل حيث $\overleftarrow{ق}$ تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠° فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

٢٣ مركز الدائرة : س^٢ + ص^٢ − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٢٤ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

(أ) أى نقطتين فى الفراغ يمر بهما مستوى واحد فقط.

(ب) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فى الفراغ تعين مستوى.

(جـ) رؤوس المثلث تعين مستوى.

(د) كل مستقيمين متقاطعين يحتويهما مستوى واحد فقط.

النمـــوذج الثالـــث



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما ح يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٥ سم يكون حجمه ....

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن ومتلاقيتان فى نقطة تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

٥ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٥ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١١٥٦ (ب) ١٢٥٤ (جـ) ١٣٠٨ (د) ١٢٩٦

٧ فى الشكل المقابل :



حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن

إلى مركبتين إحداهما أفقية $ق_١$ والأخرى $ق_٢$

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن

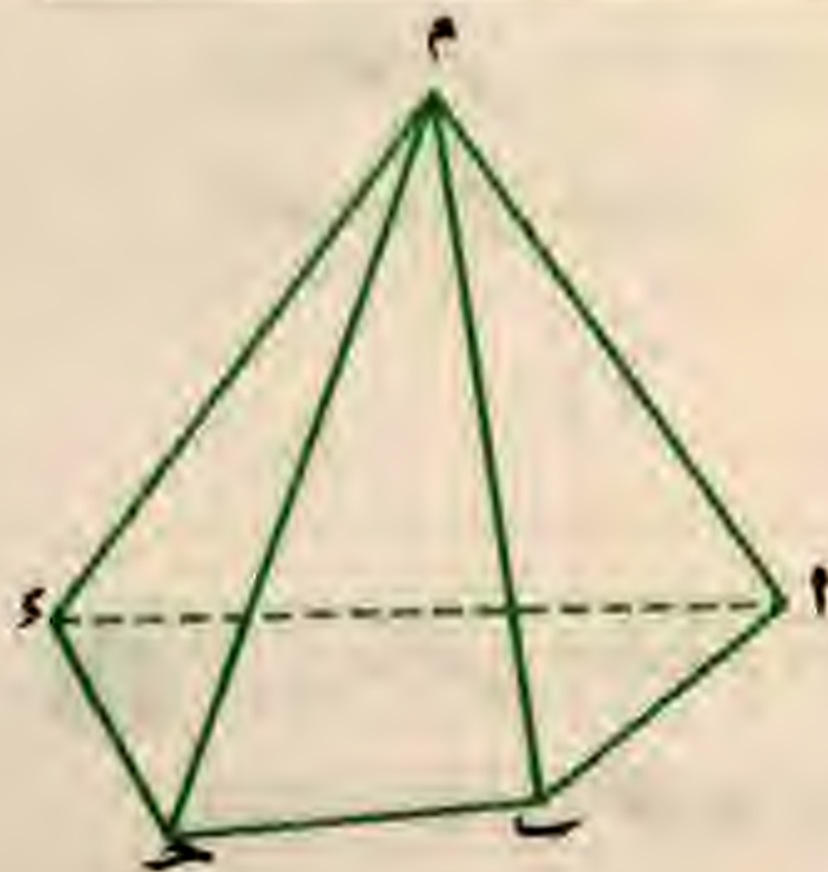
(أ) ٧٥ (ب) ٧٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٥٠ (د) ١٥٠ $\sqrt{٣}$

٨ قوتان مقدارهما ٦ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ٣٠°

٩ فى الشكل المقابل :



المستوى أ ب ء ∩ المستوى م جـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أم}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

(جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$

١٠ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٦ $\sqrt{٣}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ٣٠° وبين الثانية والثالثة ١٢٠° وبين الثالثة والرابعة ٩٠° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.

١١ شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى نقطة الأصل ومساحته ٣ $\sqrt{٣}$ سم^٢

فإن معادلة الدائرة التى تمر برؤوسه هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ = ٢$ (ب) $س^٢ + ص^٢ = ٤$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ = ٦$ (د) $س^٢ + ص^٢ = ٨$

١٢ في الشكل المقابل :

مخروط دائري قائم فيه : ق($\angle$ أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم²



(أ) ٥٠ π (ب) ٧٥ π

(ج) ١٠٠ π (د) ١٢٥ π

---

١٣ قوتان ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوي ٦,٥ نيوتن فإن الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (ج) قائمة. (د) مستقيمة.

---

١٤ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية مقدارها ق نيوتن وكان رد فعل المستوى على الجسم ر نيوتن فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) $١٠٠\sqrt{٣}$ (ب) $\frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ (ج) $٢٠٠\sqrt{٣}$ (د) $\frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$

---

١٥ هرم ثلاثي منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه = ٣٦ سم

فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) $٢\sqrt{٦}$ (ج) ٦ (د) ٤

---

١٦ أثبت أن الدائرتين : س² + ص² − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

، ٤ س² + ٤ ص² − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتا المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما.

---

١٧ في الشكل المقابل :

محصلة القوى $١٠\sqrt{٢}$ ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٢٠ نيوتن

تؤثر في اتجاه ....



(أ) شمال الشرق. (ب) الشمال.

(ج) غرب الشمال. (د) غرب الجنوب.





١٨ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق　(ب) ع = ٢ نق　(جـ) ع = ٢ نق^{٢}　(د) ع = ٤ نق

١٩ شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة هو ....



(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = ١٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

(جـ) ق = ٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن.

(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.

٢٠ محيط الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} = ٨ هو ....

(أ) ٨ π　(ب) ٦٤ π　(جـ) ٢ $\sqrt{٢}$ π　(د) ٤ $\sqrt{٢}$ π

٢١ ينطبق المستويان إذا اشتركا فى ....

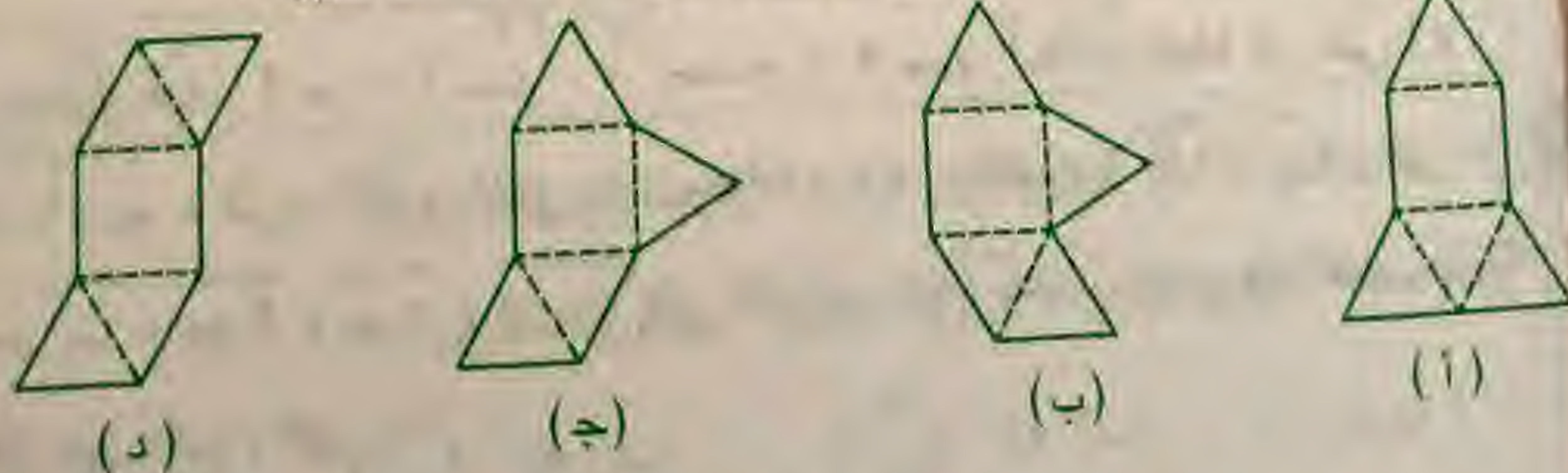
(أ) نقطة واحدة.　(ب) نقطتين.

(جـ) ٣ نقاط على استقامة واحدة.　(د) ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.

٢٢ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر　(ب) ٤ $\sqrt{٢}$　(جـ) ٤　(د) ٦

٢٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟





٢٤ إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ق_1} = \overleftarrow{ق_2}$

(ب) $ق_1 = ق_2$

(جـ) $\overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} \neq \overleftarrow{0}$

(د) $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ليسا على استقامة واحدة

النموذج الرابع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :

حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠°

فإن : $ق_2$ = ... نيوتن.



(أ) ١٠ (ب) ١٠ $\sqrt{3}$ (جـ) ٦ $\sqrt{3}$ (د) ٤ $\sqrt{3}$

---

٢ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم ، حجمه ٣٠٠ سم³ يكون طول ضلع قاعدته يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

---

٣ قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٧

---

٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم. أخذت نقطة هـ على أ ء بحيث أ هـ = ٦ سم ، أثرت القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦ $\sqrt{10}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ حـ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة

أوجد قيمة كل من : ق ، ك

٥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمي إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

---

٦ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم

فإن حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب جـ دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{ب جـ}$

هو .... سم^3

(أ) ١٦ π (ب) ١٨ π (جـ) ١٥ π (د) ١٢ π

---

٧ مخروط دائري قائم قاعدته أفقية تستند على مستوى الإحداثيات ومعادلتها

س^2 + ص^2 = ٣٦ فإذا كان ارتفاع المخروط ٨ وحدات طول.

أوجد :(١) حجم المخروط. (٢) مساحته الكلية.

---

٨ المعادلة (س ص ٨) $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ☐ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

---

٩ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٤ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٤ $\sqrt{٥}$

---

١٠ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسي بزاويتين

قياساهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد في الخيط الأول ١٢ نيوتن

والخيط الثاني ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن وزن الجسم (و) = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٦ (د) ٢٤

---

١١ إذا كان $\overline{ق}_1$ ، $\overline{ق}_2$ قوتين فإن قياس الزاوية بين القوة $\overline{ق}_1$

ومحصلة القوتين ($\overline{ق}_1$ + $\overline{ق}_2$) ، ($\overline{ق}_1$ - $\overline{ق}_2$) يساوي ....

(أ) صفر (ب) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{ق_1}{ق_2}\right)$ (جـ) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{ق_2}{ق_1}\right)$ (د) ظا$^{-1}$ $\left(\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}\right)$

١٢ في الشكل المقابل :



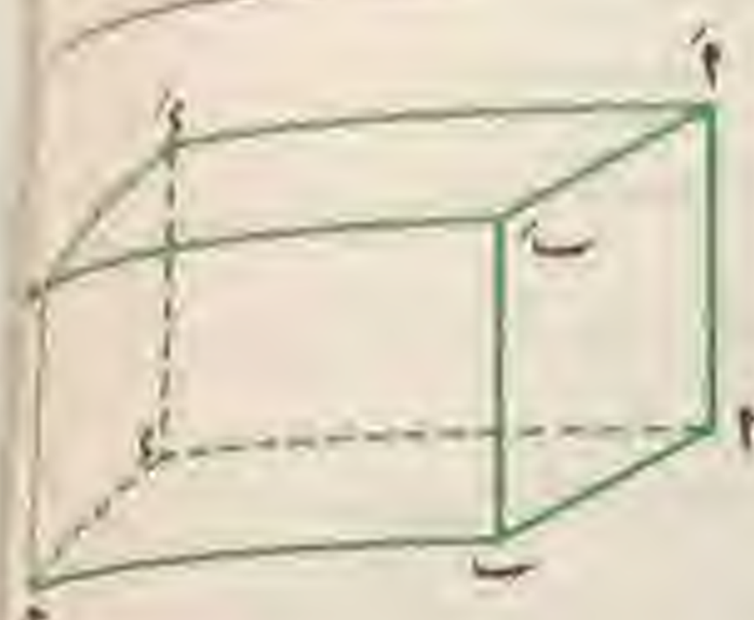
حجم الهرم الرباعي المنتظم الذي طول ضلع قاعدته ١٨ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٥ سم هو .... سم^3

(أ) ١٢٩٦ (ب) ١٦٢٠

(جـ) ٥٤٠ (د) ١٩٤٤

١٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، −٤) ويقع مركزها على محور السينات

١٤ في الشكل المقابل :

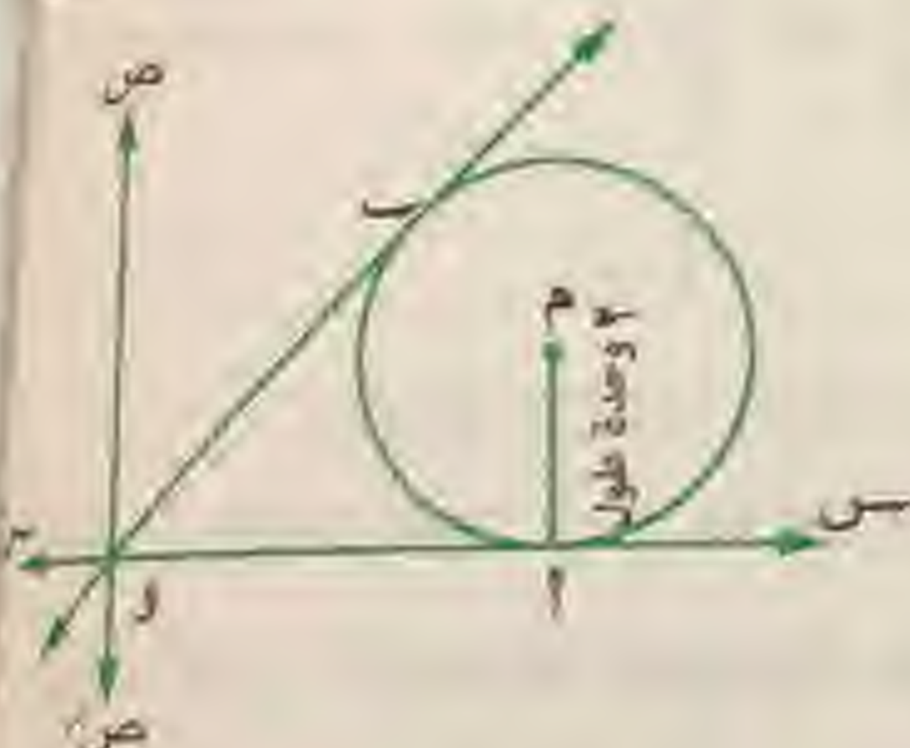


المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ جـ جَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أأَ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{ببَ}}$

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{جـجَ}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أَجـ}}$

١٥ في الشكل المقابل :



إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هي ....

(أ) (س − ٢)^2 + (ص − ٥)^2 = ٢٥

(ب) (س − ٢)^2 + (ص − ٥)^2 = ٤

(جـ) (س − ٥)^2 + (ص − ٢)^2 = ٢٥

(د) (س − ٥)^2 + (ص − ٢)^2 = ٤

١٦ في الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزنًا تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : ق (∠ هـ) = ...

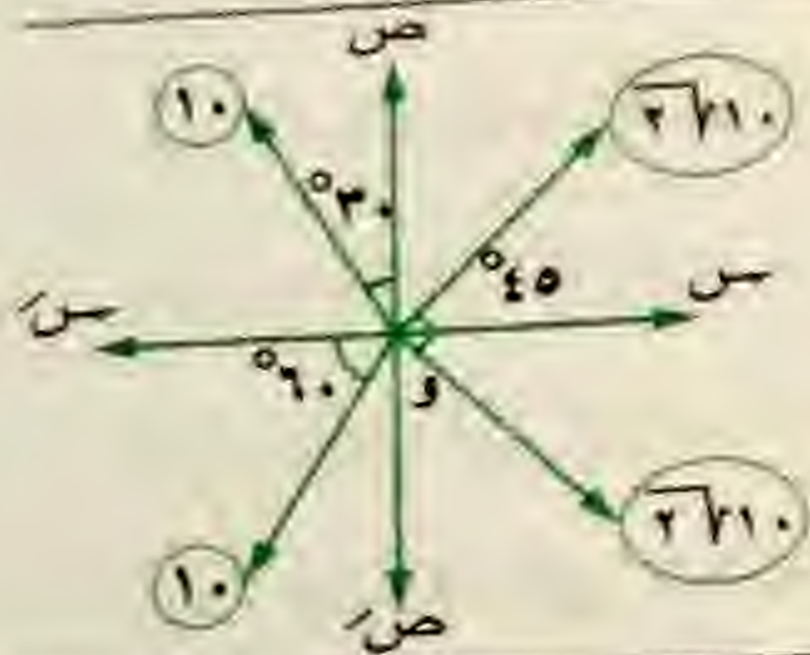
(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥° (د) ١٥°

١٧ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم² فإن حجمه = ... سم³

(أ) ١٠٥ π (ب) ٩٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٠ π

١٨ فى الشكل المقابل :



محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠√٢ (جـ) ١٠ (د) صفر

١٩ المعادلة $\begin{vmatrix} س & -ص \\ ص & س \end{vmatrix}$ = ٣٦ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٨

٢٠ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

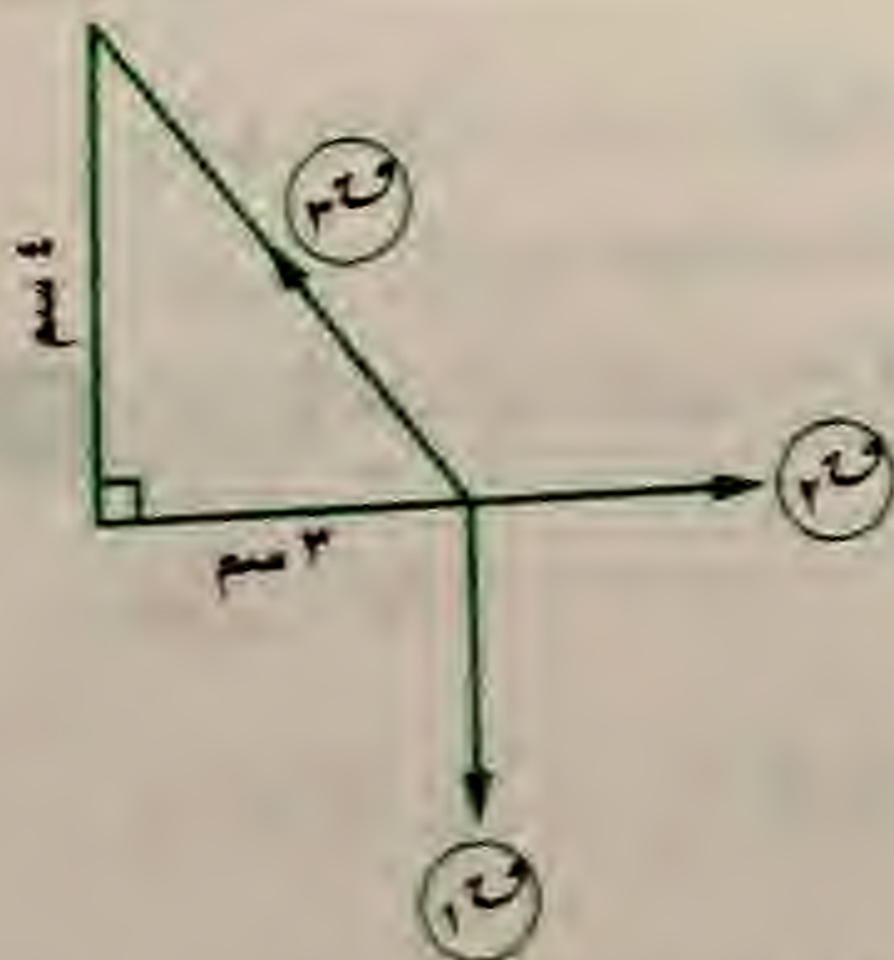
٢١ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) √٢ : √٣ (ب) √٣ : ٢ (جـ) √٦ : ٢ (د) √٣ : ٣

٢٢ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم

(أ) ٢√٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢٣ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ق٣ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : ق١ : ق٢ : ق٣ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥ (ب) ٣ : ٥ : ٤ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٢٤ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه و يتصل بطرفه أ فى مفصل مثبت فى حائط رأسى أملس ، $\overline{ب حـ}$ خيط خفيف مثبت أحد طرفيه فى ب والطرف الآخر فى نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ



فإن رد فعل المفصل ....

(أ) يكون فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) عموديًا على $\overline{ب حـ}$

(جـ) عموديًا على الحائط. (د) ينصف $\overline{ب حـ}$

النمــوذج الخـامس



أجب عن الأسئلة الآتية :

١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم ، ارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٧ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ١٨٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٢٠° (د) صفر°

٤ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧ $\sqrt{٢}$



٥ إذا كان: $\overline{ق_1}$ = ٥ $\overline{س}$ + ٢ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_3}$ = −١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة $\overline{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}\pi$) فإن: أ + ب = ...

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ١٤

---

٦ مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^٢ وطول راسمه ١٠ سم
أوجد طول نصف قطر قاعدته ثم أوجد حجمه.

---

٧ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث.جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس.
أوجد فى وضع التوازن الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

---

٨ المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه الذى طول حرفه ل سم
تساوى .... سم^٢

(أ) ٢ $\sqrt{٣}$ ل^٢ (ب) $\sqrt{٣}$ ل^٢ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ل^٢ (د) ٣ $\sqrt{٢}$ ل^٢

---

٩ هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته
فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم^٣

(أ) ٣٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٦ $\sqrt{١٥}$ (د) ٢١٦ $\sqrt{١٥}$

---

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ١٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، أثرت القوى ٢ ، ٧ $\sqrt{٥}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ هـ}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ على الترتيب.
أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

---

١١ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وكانت محصلتهما = ح$_1$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبحت محصلتهما = ح$_2$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن: ....

(أ) ح$_1$ = ح$_2$ (ب) ح$_1$ = ٢ ح$_2$ (جـ) ح$_1$ = $\frac{٣}{٥}$ ح$_2$ (د) ح$_1$ = $\frac{١}{٢}$ ح$_2$

١٢ الصورة العامة لمعادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث : أ (٢ ، ٢) ، ب(-٤ ، ١٠)

هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 - ٤ س - ٦ ص + ١٨ = ٠$

(ب) $(س + ٤)^2 + (ص - ٩)^2 = ٧٢$

(جـ) $س^2 + ص^2 - ٢ س + ١٢ ص + ١٩ = ٠$

(د) $س^2 + ص^2 + ٢ س - ١٢ ص + ١٩ = ٠$

١٣ قوتان القيمة العظمى لمحصلتهما ٢٥ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ١٢ نيوتن

فإن مقداراهما .... نيوتن.

(أ) ٢٥ ، ١٣ (ب) ١٩ ، ٦ (جـ) ١٣ ، ١٢ (د) ٧ ، ٢٠

١٤ فى الشكل المقابل :



النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط م أ ب

إلى المساحة الجانبية للمخروط م أَ بَ

تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤

(جـ) ١ : ٦ (د) ١ : ٨

١٥ فى الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج

معادلتاهما $(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

، $(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 = ٦٤$

فإن : أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) ٢٨

١٦ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا

∴ حجمه = ... سم^3



(أ) ٢٥ π　　(ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π　　(د) ١٠٠ π

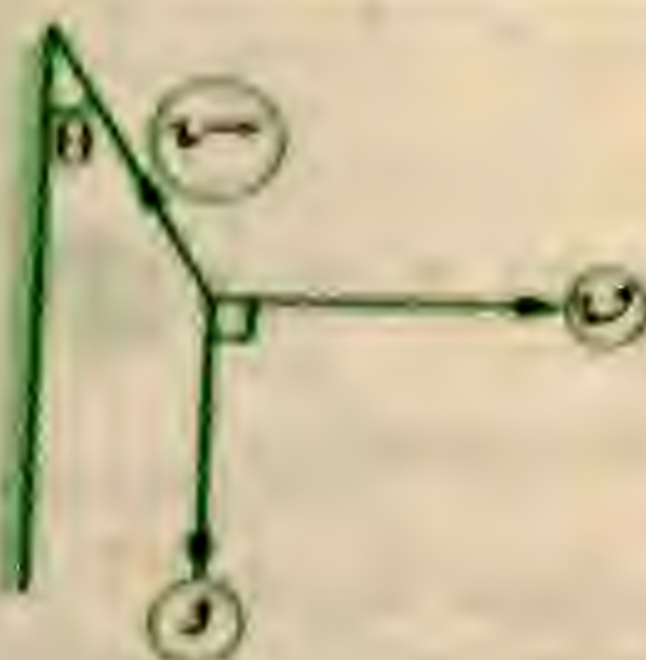
---

١٧ قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية ومقدارها ٣٠ نيوتن فإن مقدار المركبة الثانية = ...

(أ) ٢٠　　(ب) ٢٠ $\sqrt{٢}$　　(جـ) ١٠　　(د) ٢٠ $\sqrt{٥}$

---

١٨ فى الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى وشُد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ

أى الجمل الآتية غير صحيح فى وضع الاتزان ؟

(أ) ق = و طا θ　　(ب) $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ش}$ = صفر

(جـ) ش^2 = ق^2 + و^2　　(د) ش = ق + و

---

١٩ حللت القوة $\overrightarrow{ح}$ إلى قوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ وتصنعان مع $\overrightarrow{ح}$ زاويتان قياسيهما هـ$_1$ ، هـ$_2$ من جهتيها على الترتيب فإن مقدار $\overrightarrow{ق_1}$ هو ....

(أ) $\frac{ح\ جا\ هـ_1}{جا\ (هـ_1 + هـ_2)}$　　(ب) $\frac{ح\ جا\ هـ_2}{جا\ (هـ_1 - هـ_2)}$

(جـ) $\frac{ح\ جا\ هـ_2}{جا\ (هـ_1 + هـ_2)}$　　(د) $\frac{ح\ جا\ (هـ_1 + هـ_2)}{جا\ هـ_2}$

---

٢٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة متزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقدارى قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى .... نيوتن.

(أ) ١١　　(ب) ٢　　(جـ) ٥　　(د) ٣

٢١ إذا قطعنا هرم رباعى منتظم بمستوى يوازى قاعدته فإن المقطع الحادث يكون ....

(أ) مثلث. (ب) مربع. (جـ) مستطيل. (د) دائرة.

٢٢ النقطة التى تقع على الدائرة : $س^2 + (ص - ٣)^2 = ١٦$ هى ....

(أ) (صفر ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، صفر) (د) (٤ ، ٣)

٢٣ إذا كانت محصلة القوى (بالنيوتن) الموضحة بالشكل المقابل

تؤثر فى محور الصادات

فإن : ق = ... نيوتن



(أ) ٢ (ب) ٦

(جـ) ٨ (د) ١٤

٢٤ فى الشكل المقابل :

$\overline{أب}$ قضيب منتظم متصل بمفصل أ على حائط رأسى حفظ أفقيًا

بواسطة خيط مربوط من نقطة ب والطرف الآخر للخيط

مربوط فى نقطة حـ على الحائط الرأسى أعلى أ

أى مما يأتى هو مثلث القوى ؟



(أ) Δ ءبهـ (ب) Δ ءهـأ

(جـ) Δ أءهـ (د) Δ أحـء

النمـوذج السادس



امتحان إلكترونى ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذى طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل $نق^2$ (جـ) π ل نق (د) π ل $نق^2$

٢ أى قوتين مما يأتى لا يمكن أن يكون مقدار محصلتهما ٤ نيوتن ؟

(أ) ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن. (ب) ٣ نيوتن ، ٣ نيوتن.

(جـ) ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن. (د) ٣ نيوتن ، ٨ نيوتن.

---

٣ النقطة التى تقع على الدائرة $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

---

٤ عدد المستويات التى تحمل أوجه الهرم الخماسى هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) عدد لا نهائى.

---

٥ في الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد فعل المفصل على القضيب ....

(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبعد عن الحائط مسافة ١٠ سم

(جـ) ينصف $\overline{بحـ}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

---

٦ علق ثقل مقداره ٣٤٠ نيوتن بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ٣٤ سم. فإن الشد فى الخيطين على الترتيب يساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ، ٦٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٥٠ $\sqrt{٢}$ ، ٨٠ $\sqrt{٢}$

(جـ) ٣٠٠ ، ١٦٠ (د) ٣٠٠ ، ١٠٠

---

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، -٤) وتمس محور السينات هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٥ س + ٤ ص = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ - ١٠ س + ٨ ص = ٢٥$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ١٠ س - ٨ ص + ٢٥ = ٠$

٨ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث جم عُلق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

٩ إذا كانت $\overline{ح}$ محصلة القوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ وكانت $\overline{ح} \perp \overline{ق_١}$ وكانت ح = $\frac{١}{٢}$ ق٢
فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overline{ق_١}$ ، $\overline{ق_٢}$ هو ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

١٠ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم³
أوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

١١ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة وملاقية فى نقطة ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°
فإن : مقدار ك = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٣٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

١٢ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم³ ومحيط قاعدته ٦ π سم.
فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٢٧ (ب) ٣ (جـ) ٣ $\sqrt{٣}$ (د) ٩

١٣ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

١٤ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم. تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢ ث.كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.
فإن محصلة هذه القوى تعمل فى اتجاه ....

(أ) $\overleftarrow{أحـ}$ (ب) $\overleftarrow{أهـ}$ (جـ) $\overleftarrow{أء}$ (د) $\overleftarrow{أو}$

١٥ طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة س² + ص² = نق² من النقطة (٠ ، ٢ نق) هو .... وحدة طول.

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

١٦ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{ب حـ}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

١٧ أ ب حـ ء أَ بَ حَـ ءَ مكعب طول حرفه ٢٠ سم وضع بداخله مخروط دائرى قائم بحيث رأس المخروط هو مركز القاعدة أَ بَ حَـ ءَ وقاعدة المخروط تمس أضلاع القاعدة أ ب حـ ء فإن النسبة بين حجم المخروط والمكعب = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١٢}{\pi}$

١٨ فى الشكل المقابل :

القوة $\overrightarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$

فإن : $\frac{ق_1 + ق_2}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥°

(ب) $\frac{\text{جا } ٧٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(جـ) $\frac{\text{جا } ٤٥° + \text{جا } ٣٠°}{\text{جا } ٧٥°}$

(د) $\frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٣٠°} + \frac{\text{جا } ٧٥°}{\text{جا } ٤٥°}$

١٩ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ حيث $٠ \leq ق_1 \leq ١٣$ ، $٨ \leq ق_2 \leq ١٧$ وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) $٣ \leq ح \leq ٤$ (ب) $٠ \leq ح \leq ٤$ (جـ) $٠ \leq ح \leq ١٧$ (د) $٥ \leq ح \leq ١٧$

٢٠ الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٢ نيوتن على الترتيب فإذا كانت : جا θ = $\frac{٣}{٥}$ فإن مقدار محصلة هذه القوى يساوى .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

٢١ المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متوازية. (ب) متخالفة.

(جـ) يجمعهما مستوى واحد. (د) متقاطعة.

٢٢ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن ق = ... نيوتن.

(أ) ٧ (ب) ١٧ (جـ) ٢٣ (د) ٧√٢

٢٣ أي المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة :



(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم رباعي منتظم.

(جـ) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٢٤ قوتان مقداراهما ٣ ، ٥ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بين المحصلة والقوة الثانية = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٩٠° (جـ) صفر° (د) ٣٠°

النمـــوذج السابع



امتحان الكترونى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر° (د) ٦٠°

٢ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^2.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

٣ مركز الدائرة : س^2 + ص^2 − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٤ إذا كانت ق١ ، ق٢ ، ق٣ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة

وكانت : ق١ = ٢ س - ٣ ص ، ق٢ = ٣ س + ٥ ص

فإن : ق٣ = ... نيوتن.

(أ) ٥ س + ٢ ص (ب) -٥ س - ٢ ص

(جـ) √٢٩ (د) √٣٤

---

٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر
ميل للمستوى لأعلى. فإن مقدار وزن الجسم = ... نيوتن.

(أ) ٣٦ √٣ (ب) ٣٦ √٢ (جـ) ٧٢ (د) ٧٢ √٣

---

٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (-٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢)
هى ....

(أ) س٢ + ص٢ - ٤ س + ١٠ ص - ٥ = ٠.

(ب) س٢ + ص٢ + ٤ س - ١٠ ص - ٥ = ٠.

(جـ) س٢ + ص٢ + ٢ س - ٥ ص - ٥ = ٠.

(د) س٢ + ص٢ + ٤ س - ١٠ ص - ٢٥ = ٠.

---

٧ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) {أ} (د) س

---

٨ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٢٤٠ سم٢ وارتفاعه الجانبى ١٢ سم
أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) حجم الهرم.

---

٩ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا
فإن طول نصف قطر قاعدته = ...



(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

١٠ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر في مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسي والآخر يميل على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠°

أوجد رد فعل كل من المستويين.

---

١١ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ، مساحته الكلية = ٢١٦ π سم^2

يساوي .... سم^3

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٣٢٠ π (جـ) ٣٨٠ π (د) ٣٢٤ π

---

١٢ إذا كانت ح هي محصلة قوتين ق$_1$ ، ق$_2$ حيث : ق$_2$ > ق$_1$ فأي من الشروط الآتية يجعل ح ⊥ ق$_1$ ؟

(أ) ح^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ (ب) ح^2 = ق$_2^2$ − ق$_1^2$

(جـ) $\overleftarrow{ق_1}$ ⊥ $\overleftarrow{ق_2}$ (د) جميع ما سبق.

---

١٣ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٩ ث.جم في الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ د}$ على الترتيب ، عيّن محصلة هذه القوى.

---

١٤ إذا كانت : س^2 + ص^2 + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة

فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

---

١٥ أربع قوى مستوية ومتلاقية في نقطة مقاديرها ق$_1$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$ ، ق$_2$ ثقل جرام والأولى في اتجاه الشرق والثانية في اتجاه الشمال الشرقي والثالثة في اتجاه الشمال الغربي والرابعة تؤثر في اتجاه الجنوب فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوي ٧ ثقل جرام وتؤثر في اتجاه الشرق. فإن : (ق$_1$ ، ق$_2$) = ...

(أ) (٧ ، ٠) (ب) (٧ ، ١٢) (جـ) (٧ ، ١٢ $\sqrt{٢}$) (د) (٦ $\sqrt{٢}$ ، ٦ $\sqrt{٢}$)

١٦ عند طي الشبكة التي أمامك
فإن المساحة الكلية للجسم الناتج = ... سم²

(أ) $١٠٨\sqrt{٣}$　　(ب) $٣٢٤\sqrt{٣}$
(ج) ٧٥٨　　(د) $١٣٢\sqrt{٣}$

١٧ أ ب جـ د هـ شكل خماسي منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن في اتجاه $\overrightarrow{أجـ}$ ثم حُللت هذه القوة في اتجاهين $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ فإن مقدار مركبة القوة في اتجاه $\overrightarrow{أب}$ يساوي .... نيوتن

(أ) ١٠　　(ب) ٢٠　　(ج) $٢٠\sqrt{٣}$　　(د) ١٢,٤

١٨ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم
فإن مساحته الجانبية = ... سم²

(أ) ٦٠٠π　　(ب) ٣٧٥π　　(ج) ١٨٧٥π　　(د) ٥٦٢٥π

١٩ إذا كانت القوة التي مقدارها ق تتزن مع قوتين مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن والقتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) $\sqrt{١٩}$　　(ب) $\sqrt{٣٤}$　　(ج) ٧　　(د) ١٥

٢٠ في الشكل المقابل :
القوة $\overrightarrow{ق}$ هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$
فإن $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق}$ = ...

(أ) جا ٣٠° + جا ٤٥°　　(ب) $\frac{جا ٧٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$
(ج) $\frac{جا ٤٥° + جا ٣٠°}{جا ٧٥°}$　　(د) $\frac{جا ٧٥°}{جا ٣٠°} + \frac{جا ٧٥°}{جا ٤٥°}$

٢١ مركز الدائرة ٢ س² + ٢ ص² − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤)　　(ب) (−٤ ، ٣)　　(ج) $\left(\frac{٣}{٢} ، -٢\right)$　　(د) (−٣ ، −٤)

٢٢ قوتان متعامدتان مقدارهما ٦ ، ٨ نيوتن فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى = ...

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

---

٢٣ أقل عدد من المستويات التي يمكن أن تحدد سطح مجسم هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

٢٤ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1} = ٢\,\overrightarrow{س} - ٢\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٤\,\overrightarrow{س} - ٨\,\overrightarrow{ص}$

، محصلتهما $\overrightarrow{ح} = ٢أ\,\overrightarrow{س} - ٣ب\,\overrightarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) $٣\frac{١}{٣}$ (جـ) $٦\frac{١}{٣}$ (د) ١٢





النمـــوذج الثامن

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان مقدارهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

---

٢ حجم هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم³

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

---

٣ محيط الدائرة التي معادلتها : $س^2 + ص^2 = ٨$ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) $٢\sqrt{٢}$ π (د) $٤\sqrt{٢}$ π

---

٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الآخرين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

5 قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) 30° (جـ) 60° (د) 120°

6 هرم سداسى منتظم حجمه $8\sqrt{3}$ سم^3 وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

7 قوة مقدارها $10\sqrt{2}$ ثقل. جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب = ... ثقل. جرام.

(أ) $10\sqrt{3}$ (ب) $10\sqrt{2}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

8 الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، -١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 - 4 س + 2 ص - 4 = 0$.

(ب) $س^2 + ص^2 - 2 س + ص - 4 = 0$.

(جـ) $س^2 + ص^2 + 4 س - 2 ص - 4 = 0$.

(د) $س^2 + ص^2 - 4 س + 2 ص - 16 = 0$.

9 جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أثرت على الجسم قوة أفقية ق ، فاتزن الجسم عندما يكون على بعد ٥٠ سم من الحائط فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢٦ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٠

10 الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون ....



(أ) حادة. (ب) منفرجة.

(جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

١١ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨٠ ، ك ، ٥٠ ، $٨٠\sqrt{٣}$ ث.كجم فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، الجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤٠ ث.كجم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق

١٢ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) عدد لا نهائى.

١٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٨　　(ب) ١٣　　(جـ) ٧　　(د) ١٢

١٤ فى الشكل المقابل :



دائرة م تمس محور السينات عند أ

، و ب = ٢ وحدة طول ، ب جـ = ٦ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٦$　　(ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$　　(د) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٥ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار رد فعل المستوى على الجسم = ... ث.كجم.

(أ) $٢\sqrt{٣}$　　(ب) $٤\sqrt{٣}$　　(جـ) $١٢\sqrt{٣}$　　(د) $٨\sqrt{٣}$

١٦ أوجد قيم ك التى تجعل الدائرتين :

$د_١ : (س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢ : (س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

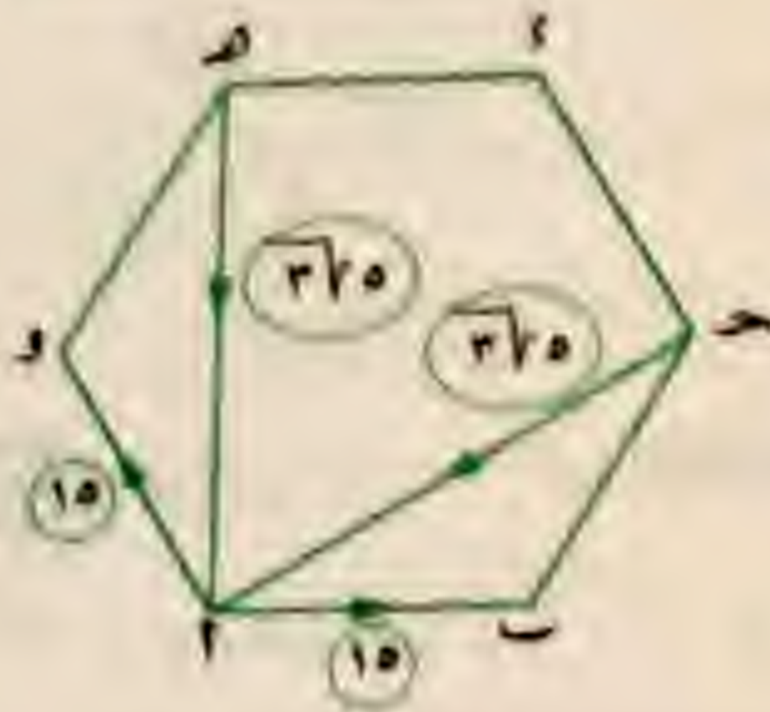
متماستين.

١٧ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ فأى القيم الآتية تصلح قيمة لـ θ ؟

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

---

١٨ فى الشكل المقابل :



أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥ على الترتيب

فى الأضلاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـأ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$

فإن المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

---

١٩ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$ على الترتيب هما ....

(أ) ١٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ (ب) ٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٠ (جـ) ١٠ ، ١٠ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٠ $\sqrt{٣}$ ، ٢٠

---

٢٠ الشبكة التى أمامك تصف



مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ١٦ π (ب) ٣٢ π

(جـ) ٤٨ π (د) ٩٦ π

---

٢١ أى الجمل الآتية صحيحة ؟

(أ) الأوجه الجانبية للهرم القائم تكون متطابقة.

(ب) الهرم المنتظم هو هرم قائم.

(جـ) ارتفاعات الأوجه الجانبية للهرم تكون متساوية.

(د) أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسم = ٣ مستويات.

٢٢ فى الشكل المقابل :

مصباح وزنه و ث.جم معلق فى نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

فإن : $\frac{ق}{ش}$ = ...

(أ) ٢ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (د) $\sqrt{٣}$

---

٢٣ قوتان ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) ق $\sqrt{٥}$ (ب) ق $\sqrt{٣}$ (جـ) ٢ ق (د) ق

---

٢٤ فى الشكل المقابل :



هرم رباعى منتظم فإن ارتفاعه = ... سم

(أ) ٧ $\sqrt{٢}$ (ب) ٢ $\sqrt{٧}$

(جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٢ $\sqrt{٥}$





النمــوذج التاسع

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، ... محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٢ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة ؟



(أ) هرم رباعى.

(ب) هرم باعى منتظم.

(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.



٣ مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم^{٣} فإن حجمه عندما يتضاعف ارتفاعه يساوى .... سم^{٣}

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٨٠٠

٤ وضع جسم وزنه ١٨ ث.كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار هذه القوة = ... ث.كجم

(أ) ١٢ (ب) ٩ (جـ) $٣\sqrt{٣}$ (د) $٦\sqrt{٣}$

٥ قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) ٨ (د) $٨\sqrt{٢}$



٦ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٢٠

٧ معادلة الدائرة التى يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هى ....

(أ) $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٣\sqrt{٢}$ (ب) $(س + ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ١٨$

(جـ) $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ١٢$ (د) $(س - ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ١٨$



٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

فإن مقدار الشد فى الخيط = ... نيوتن

(أ) ٨ (ب) $٨\sqrt{٢}$ (جـ) $٨\sqrt{٣}$ (د) ١٢

٩ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ث.كجم يتصل طرفه أ بحائط رأسي ... مفصل ، حفظ القضيب في وضع أفقي بربطه من إحدى نقطة هـ حيث : أحـ = ٤ أمتار بأحد طرفي خيط ثم ثبت الطرف الثاني الخيط في ... الرأسي فوق أ وعلى بعد ٤ أمتار منها. احسب مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل

١٠ معادلة الدائرة التي تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء ... لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة طول = ...

(أ) (س + ٢)^{٢} = ٤٨ (ب) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٨

(جـ) (س − ٢)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ٢٤ (د) (س + ٢)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} = ١٦

١١ قوتان متساويتان في المقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن مقدار أي من هاتين القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢

١٢ قطاع دائري طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية ٦٠° طوى راسمًا نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

١٣ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه = ...

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٣}$: ٢

١٤ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر في نقطة مادية ، الأولى نحو الشرق ، الثانية تصنع زاوية قياسها ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية قياسها ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

١٥ مخروط دائري قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^{٢} وطول راسمه ١٣ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٥٠ π (ب) ٦٥ π (جـ) ٩٠ π (د) ١٠٠ π

١٦ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

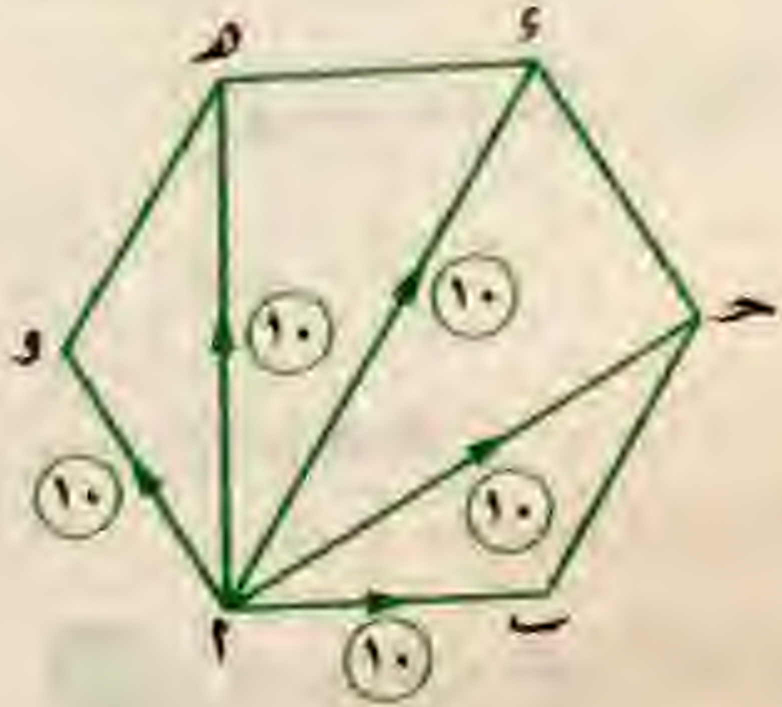
(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

١٧ النقطة التى تقع على الدائرة : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

١٨ أثرت خمس قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى اتجاهات الرؤوس الأخرى للسداسى كما بالشكل المقابل

فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن



(أ) ٥٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ $\sqrt{٣}$ (د) (٢٠ + ١٠ $\sqrt{٣}$)

١٩ فى الشكل المقابل :

دائرة تم تقسيمها إلى قطاعين دائريين بحيث تكون شبكتى مخروطين قائمين



فإن : $\frac{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأصغر}}{\text{المساحة الجانبية للمخروط الأكبر}}$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{١٦}$

٢٠ قوتان مقداراهما ٤ ، ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

فإن ظل زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) ٢ $\sqrt{١٣}$ (د) $\frac{\sqrt{٦}}{٢}$

٢١ قوتان متساويتان فى المقدار ، قياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن

فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

(أ) ٢ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٤ $\sqrt{٢}$ (د) ٨

٢٢ مركز الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

٢٣ في الشكل المقابل :
أ نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الموضحة بالشكل حيث ق تتزن مع قوتين مقدار كل منهما ٨ نيوتن وتصنع مع كل منهما زاوية قياسها ١٢٠°
فإن : ق = ... نيوتن

(أ) صفر (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٨ جا ١٢٠°

٢٤ المستويان غير المتوازيين يتقاطعان في ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) مستوى. (د) شعاع.

النمـــوذج العاشر

امتحان إلكترونى

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ النقطة التي تقع على الدائرة س^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ٢٠ هي ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٢ قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما هو ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

٣ إذا كانت : ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ، ق$_{٣}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة
فإن مقدار محصلة ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ يساوي ....

(أ) ق$_{٣}$ (ب) ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ (جـ) ق$_{٢}$ (د) صفر

٤ قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية ، إذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠°
ومحصلتهما ق $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

٥ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم فإن مساحته الكلية = ... $سم^2$

(أ) ٢٠٠ π (ب) ١٣٦ π (جـ) ٣٢٠ π (د) ٤٠٠ π

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

٧ إذا كانت (و) هى نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد فى المستوى وكانت $\overrightarrow{ق}$ = (٨ ث.كجم ، ١٣٥°) قوة تؤثر فى نقطة و فإن مركبة القوة $\overrightarrow{ق}$ فى اتجاه محور الصادات تساوى ....

(أ) $-٤\sqrt{٢}$ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) $٤\sqrt{٣}$ (د) ٤

٨ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، $٦\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ على الترتيب. فإن مقدار واتجاه محصلة هذه القوى هو ....

(أ) ١٨ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$ (ب) ٢٣ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أء}$

(جـ) ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أهـ}$ (د) ٢٣ نيوتن فى اتجاه $\overrightarrow{أحـ}$

٩ علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن فى طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط فى حائط رأسى ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. فإن مقدار القوة = ... نيوتن.

(أ) ٢٤ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٦ (د) ٢٨

١٠ وضع جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها ق نيوتن

فإن مقدار رد فعل المستوى على الجسم = ... نيوتن.

(أ) $٦\sqrt{٣}$ (ب) $٨\sqrt{٣}$ (جـ) $١٢\sqrt{٣}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

١١ معادلة الدائرة التى مركزها (-٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

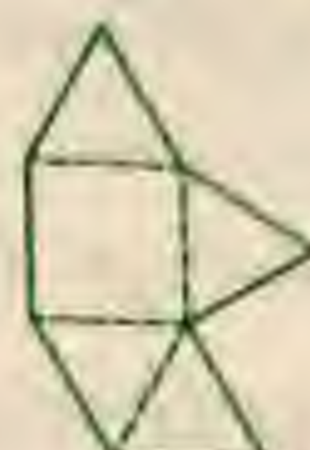
(أ) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٥$ (ب) $(س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٥$

(جـ) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$

١٢ إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

١٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ؟


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

١٤ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥$\sqrt{٣}$ ، ٧$\sqrt{٢}$ ، ٧ ث.كجم تعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن المجموعة متزنة.

١٥ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}



(أ) ٩٦ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٣٢ π (د) ١٦ π

١٦ فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الدائرة هى

س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٤ ص − ١٢ = ٠ .

، $\overline{مب}$ ⊥ المستقيم ل حيث ل : ٣ س − ٤ ص + ٢٣ = ٠ .

، $\overline{مب}$ يقطع الدائرة فى أ فإن : طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٢

١٧ قوتان مقدارهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما ق نيوتن وكانت هـ$_١$ هى قياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة وكانت هـ$_٢$ قياس الزاوية بين القوة الثانية والمحصلة فإن : ....

(أ) هـ$_١$ = هـ$_٢$ (ب) هـ$_١$ = $\frac{١}{٢}$ هـ$_٢$ (جـ) هـ$_١$ = ٣ هـ$_٢$ (د) هـ$_١$ = ٤ هـ$_٢$

١٨ أى الجمل الآتية غير صحيحة ؟

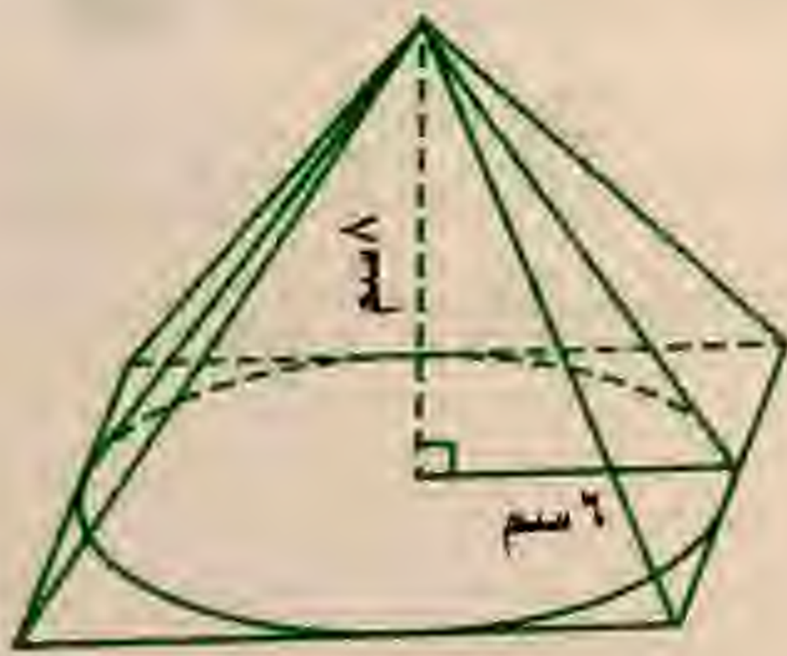
(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

١٩ فى الشكل المقابل :



هرم قائم منتظم ومخروط دائرى قائم مشتركان فى الرأس وقاعدة المخروط سطح دائرة تمس أضلاع قاعدة الهرم من الداخل فإن النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط القائم والمساحة الجانبية للهرم تساوى ....

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ (ب) $\frac{٥}{٦}$ (جـ) $\frac{٧}{٨}$ (د) $\frac{\pi}{٤}$

٢٠ قوة مقدارها ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشرق يساوى .... نيوتن.

(أ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (ب) $\frac{١٥}{٢}$ (جـ) $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥ $\sqrt{٣}$

٢١ إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ يساوى ....

(أ) ق$_١$ (ب) ق$_١$ + ق$_٢$ (جـ) ق$_٣$ (د) صفر



٢٢ في الشكل المقابل :
جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة أفقية ق نيوتن

فإن : ق ، ر = ... نيوتن.

(أ) $٦\sqrt{٣}$ (ب) $١٢\sqrt{٣}$

(جـ) $١٨\sqrt{٣}$ (د) $٢٤\sqrt{٣}$

---

٢٣ طول قطر الدائرة : ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠

يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٣   (ب) ٦   (جـ) ١٢   (د) ٢٤

---

٢٤ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه وارتفاعه تساوي ....

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢   (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢   (د) $\sqrt{٣}$: ٣

ثالثًا : امتحانات الإدارات التعليمية

١ محافظة القاهرة

إدارة غرب القاهرة
توجيه الرياضيات



أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن فإن مقدار محصلتهما مقاسة بالنيوتن ∋ ....

(أ) [٢ ، ٨] (ب)]٢ ، ٨[(جـ) [٣ ، ٥] (د)]٣ ، ٥[

٢ قوتان متساويتان فى المقدار متلاقيتان فى نقطة مقدار كل منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن ، فإن قياس الزاوية بينهما يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

٣ قوتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما ٩٠° ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن مقدار كل قوة منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $٣\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) ٨

٤ قوة مقدارها $٤\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

٥ بتحليل القوة التى مقدارها ١٠ نيوتن إلى مركبتين $ق_١$ ، $ق_٢$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياسيهما ٦٠° ، ٩٠° من الجهتين كما بالشكل



فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) $٥\sqrt{٣}$ (ب) ١٠ (جـ) $١٠\sqrt{٣}$ (د) ٢٠

٦ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1} = ٢\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٤\overrightarrow{س} - ٨\overrightarrow{ص}$

، محصلتهما $\overrightarrow{ح} = ٢أ\overrightarrow{س} - ٣ب\overrightarrow{ص}$ فإن : أ + ب = ...

(أ) ٢ (ب) $٢\frac{١}{٣}$ (جـ) $٦\frac{١}{٣}$ (د) ١٢

---

٧ إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3} = ٣\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ فى نقطة مادية وكانت القوى متزنة

فإن : أ + ٢ب = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) -٣

استخدم الشكل المقابل فى الإجابة عن السؤالين (٨ ، ٩) :

إذا كان أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم

تؤثر القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ثقل كجم

فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب

٨ مقدار محصلة القوى = ... ث.كجم

(أ) $(١٤ + ٦\sqrt{٣})$ (ب) ٢٠

(جـ) $٢٠\sqrt{٣}$ (د) $(٢٠ + \sqrt{٣})$

٩ اتجاه محصلة هذه القوى تميل على $\overrightarrow{أب}$ بزاوية قياسها ....

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥ (جـ) °٦٠ (د) °٩٠

استخدم الشكل المقابل فى الإجابة عن السؤالين (١٠ ، ١١) :

إذا كان الشكل يمثل مجموعة من القوى المستوية المتزنة



١٠ ق = ... نيوتن.

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٥٠ (د) $٤٠\sqrt{٣}$

١١ ش = ... نيوتن.

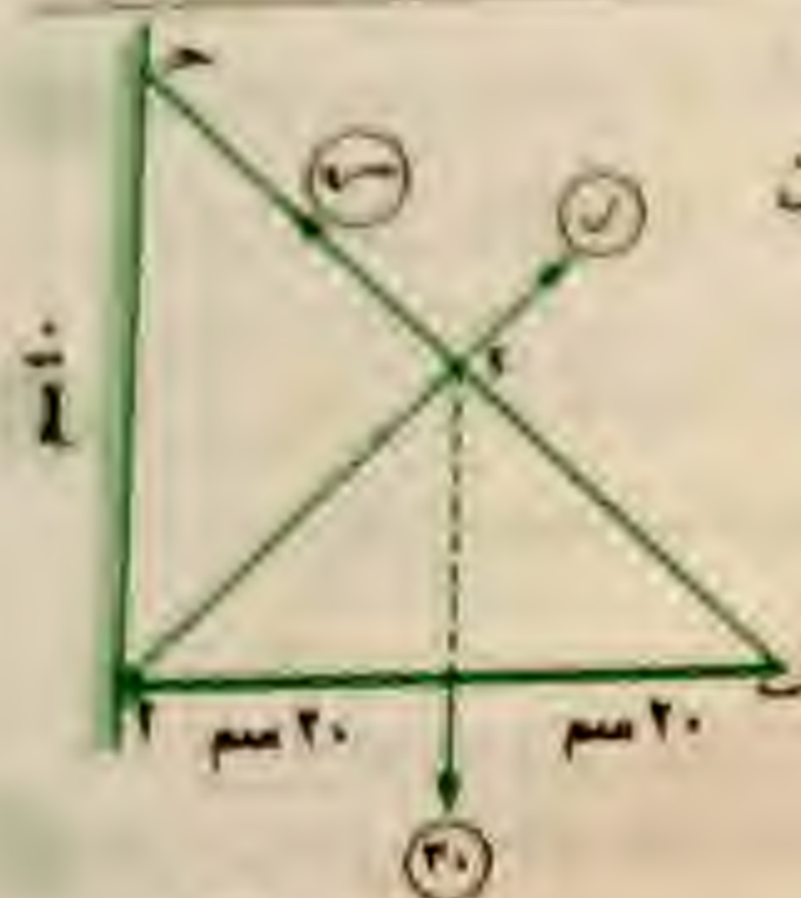
(أ) ٨٠ (ب) ٤٠

(جـ) $٤٠\sqrt{٣}$ (د) ٥٠

١٢ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين منهما يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٥٠°

استخدم الشكل المقابل في الإجابة عن السؤالين (١٣ ، ١٤) :



إذا كان $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ، ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب وعند حـ حيث حـ تقع رأسيًا فوق أ ، أحـ = ٤٠ سم

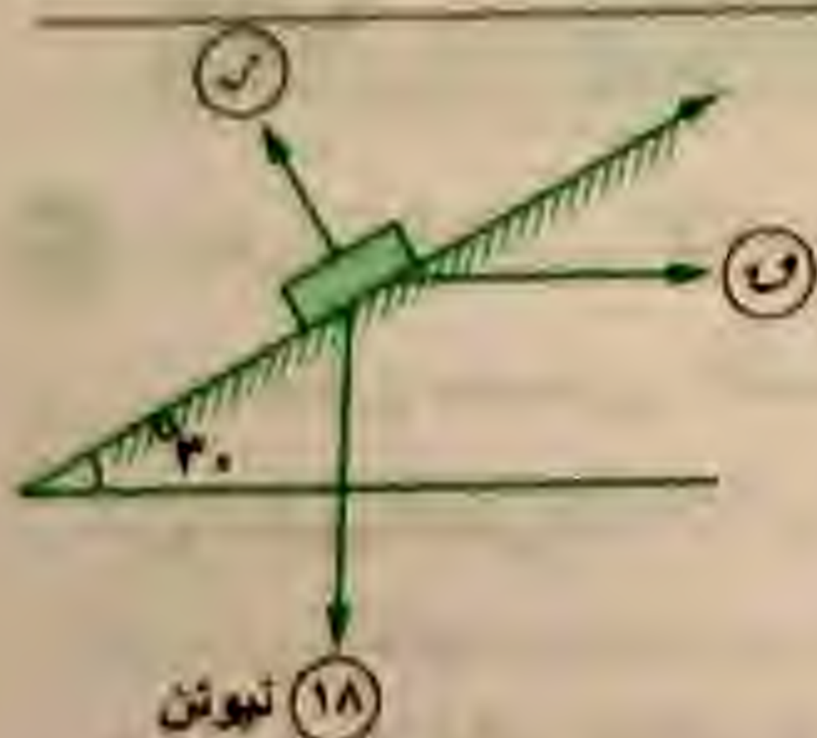
١٣ رد فعل المفصل ر = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٤٠ $\sqrt{2}$ (د) ١٥ $\sqrt{2}$

١٤ الشد في الخيط ش = ... نيوتن.

(أ) ١٥ $\sqrt{2}$ (ب) ٣٠ (جـ) ٢٠ (د) ٤٠ $\sqrt{2}$

١٥ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن موضوع على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° ، اتزن الجسم تحت تأثير قوة أفقيه ق نيوتن.

فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{3}$ (ب) ١٢ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٨ $\sqrt{3}$ (د) ٢٤ $\sqrt{3}$

١٦ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائي.

١٧ من الشكل المقابل :



المستوى س ∩ المستوى ص = ...

(أ) {ب} (ب) {أ ، ب ، حـ}

(جـ) المستقيم ل (د) ∅

٢٧ مركز الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤)　　(ب) (٤ ، -٣)　　(جـ) (-٣ ، ٤)　　(د) (-٤ ، ٣)

---

٢٨ طول قطر الدائرة : $٤ س^2 + ٤ ص^2 + ١٦ س - ٨ ص - ١٦ = ٠$ يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٣　　(ب) ٦　　(جـ) ١٢　　(د) ٢٤

---

٢٩ مخروط دائري قائم حجمه ٩ π $سم^3$ ، وطول نصف قطر قاعدته يساوي ارتفاعه فتكون مساحة قاعدته = ... $سم^2$

(أ) ٩ π　　(ب) ٣ π　　(جـ) ٢٧ π　　(د) ١٢ π

---

٣٠ مخروط دائري قائم إذا زاد طول نصف قطر قاعدته للضعف ، وقل ارتفاعه للنصف فإن حجمه ....

(أ) يظل كما هو.　　(ب) يزداد للضعف.

(جـ) يقل للنصف.　　(د) يزداد لأربعة أمثال.

٢ محافظة الجيزة

إدارة الهرم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان مقداراهما ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن محصلتهما ٢ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ٣٠°　　(ب) ٩٠°　　(جـ) ١٨٠°　　(د) ٢٧٠°

---

٢ قوتان مقداراهما ٧ ، ق ث.كجم المحصلة تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.كجم

(أ) ٨　　(ب) ٧　　(جـ) ١٠　　(د) ٥

---

٣ قوتان مقداراهما ٩ ، ٦ نيوتن فإن القيمة العظمى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٢٠　　(ب) ٣٠　　(جـ) ١٠　　(د) ١٥

---

٤ قوتان قياس الزاوية بينهما θ فإن مقدار محصلتهما ....

(أ) يزداد كلما زادت قيمة θ　　(ب) يتناقص كلما نقصت قيمة θ

(جـ) يزداد كلما نقصت قيمة θ　　(د) لا يتغير بتغير قيمة θ



٥ قوتان متعامدتان مقدارهما (٢ ق − ٥) ، (ق + ٢) نيوتن ومقدار محصلتهما ٣ $\sqrt{5}$ نيوتن فإن قيمة ق تساوى .... نيوتن

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٣

٦ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية θ فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى تساوى ....

(أ) و طا θ (ب) و جا θ (جـ) و جتا θ (د) و

٧ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ٦ (جـ) صفر (د) ٨

٨ $\overline{ق_1}$ = ٥ $\overline{س}$ + ٣ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_2}$ = أ $\overline{س}$ + ٦ $\overline{ص}$

، $\overline{ق_3}$ = −١٤ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ وكانت المحصلة $\overline{ح}$ = (١٠ $\sqrt{2}$ ، $\frac{3}{4}\pi$)

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (١ ، ١) (جـ) (١ ، −١) (د) (−١ ، −١)

٩ ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة مقاديرها ٦٠ ، ٨٨ ، ٦٠ نيوتن تؤثر فى نقطة الأولى نحو الشمال والثانية فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب والثالثة فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق فإن مقدار المحصلة يساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٢٣ (جـ) ٣٢ (د) ٢٨

١٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإذا كان ٧ ، ٣ نيوتن مقدارى قوتين منهم فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يساوى ....

(أ) ١١ نيوتن. (ب) ٢ نيوتن. (جـ) ٥ نيوتن. (د) ٣ نيوتن.

١١ علق جسم وزنه ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم فإن مقدار الشد فى الخيطين .... ث.جم

(أ) ١٦٠ ، ١٢٠

(ب) ١٨٠ ، ١٢٠

(جـ) ١٥٠ ، ١٦٠

(د) ١٠٠ ، ١٣٠

١٢ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية فى المقدار يمكن أن يتزن هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

١٣ قضيب منتظم وزنه ٢٤ نيوتن يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠° فإن مقدار رد فعل كل من المستويين ....

(أ) ١٢ ، ١٥ نيوتن　(ب) ١٢ ، $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن

(جـ) $١٢\sqrt{٣}$ ، ١٠ نيوتن　(د) ١٥ ، ١٣ نيوتن

---

١٤ إذا كانت قوة مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وتحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٧　(ب) ١٥　(جـ) ١٩　(د) ٣٤

---

١٥ إذا كانت مجموعة القوى $\overrightarrow{ق_1}$ = (أ ، ٧) ، $\overrightarrow{ق_2}$ = (−٥ ، −ب) ، $\overrightarrow{ق_3}$ = (−١ ، ١) متزنة فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (٤ ، ٢)　(ب) (١ ، ٢)　(جـ) (٤ ، ٨)　(د) (−٤ ، −٨)

---

١٦ هرم رباعى قائم قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... $سم^٣$

(أ) ٤٠　(ب) ٨٠　(جـ) ١٦٠　(د) ٢٠٠

---

١٧ طول قطر الدائرة : ٤ $س^٢$ + ٤ $ص^٢$ + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣　(ب) ٦　(جـ) ١٢　(د) ٢٤

---

١٨ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ...

(أ) ١ : ٣　(ب) ١ : ٤　(جـ) ٣ : ٤　(د) ١ : ٢

---

١٩ مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ٦ سم. وارتفاعه ٤ سم. فإن طول راسمه = ... سم.

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ٥

---

٢٠ المستقيمات الرأسية المختلفة فى الفراغ تكون ....

(أ) متخالفة.　(ب) متوازية.

(جـ) متقاطعة.　(د) يجمعها مستوى واحد.

٢١ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيم ونقطة ولا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين غير منطبقين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

٢٢ إذا كانت الدائرة تمس محورى الإحداثيات فى الربع الأول فإن مركزها يقع على المستقيم ....

(أ) ص = س (ب) ص = ٢ س (جـ) ص = $\frac{١}{٢}$ س (د) ص = − س

٢٣ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته = طول ارتفاعه الجانبى فإن النسبة بين مساحته الجانبية ومساحته الكلية = ...

(أ) ٢ : ٣ (ب) ٣ : ٤ (جـ) ١ : ٢ (د) ٣ : ٥

٢٤ المستقيمان المتخالفان ....

(أ) متوازيان. (ب) متقاطعان.

(جـ) يجمعهما مستوى واحد. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢٥ طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروط دائرى قائم حجمه ٤٩ π سم^{٣} وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

٢٦ أى المعادلات الآتية يعبر عن دائرة ....

(أ) س^{٢} − ص^{٢} + س − ص = ٦ (ب) ٢ س^{٢} + ص^{٢} − س + ص = ٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} − س = ٦ (د) س^{٢} + ص^{٢} − س ص = ٦

٢٧ مخروط دائرى قائم طول راسمه ٢٥ سم ومساحته الجانبية ٥٥٠ سم^{٢} فإن حجمه = ... سم^{٣} حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١٢٢٣ (ب) ١٢٣٢ (جـ) ١٣٢٢ (د) ٢١٢٢

٢٨ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة ....

(أ) مستوى واحد فقط. (ب) عدد لا نهائى.

(جـ) ثلاثة مستويات. (د) أربعة مستويات.

٢٩ هرم رباعى منتظم مساحته الكلية ٧٠ سم٢ ، ومساحته الجانبية ٤٥ سم٢
فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) ٢.٥ (ب) $\sqrt{٥}$ (جـ) $\sqrt{١٤}$ (د) ٤.٥

٣٠ المعادلة $\begin{vmatrix} س & ت\,ص \\ ت\,ص & س \end{vmatrix}$ − ٤٩ = ٠ تمثل معادلة دائرة
طول نصف قطرها .... وحدة طول.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤ (جـ) ٩ (د) ٧



٣ محافظة الإسكندرية

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

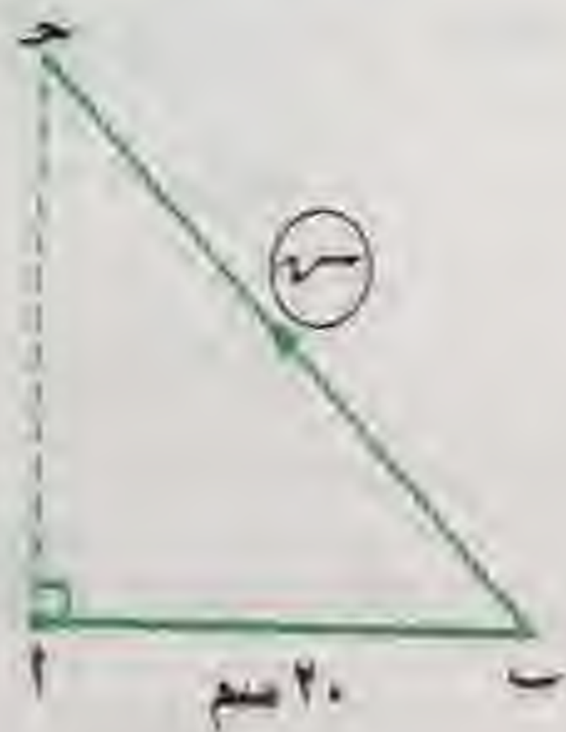
١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°
فإن مقدار محصلتهما ح = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم، وطول راسمه ١٥ سم. فيكون حجمه سم٣

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ فى الشكل المقابل :



أب قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن ، متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ ، والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم ، ومثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط أعلى أ ، اتزن القضيب فى وضع أفقى ،
فإن قيمة رد فعل المفصل = ... نيوتن.

(أ) ١٠ $\sqrt{٢}$ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ $\sqrt{٢}$

٤ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى.

٥ قوتان مقداراهما $ق_1$ ، $ق_2$ ث جم حيث $ق_1 > ق_2$ ومقدار محصلتهما ح مقاسة بالثقل كيلوجرام ∈ [٣ ، ١٢] فإن : $ق_1^2 - ق_2^2$ = ... ث جم.

(أ) ١٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

٦ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة $س^2 + ص^2 = نق^2$ حيث أ = (٠ ، ٢ نق)
فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{3}$ نق (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ نق

٧ إذا كانت $س^2 + ص^2$ + ٢ (جتا θ) س − ٢ (جا θ) ص − ٨ = ٠ تمثل معادلة دائرة
فإن : نق = ... وحدة طول.

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) ٢ $\sqrt{2}$ (جـ) ٣ (د) ٨

٨ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران في نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٣٥

٩ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ − ب $\overrightarrow{ص}$
، والمحصلة $\overrightarrow{ح}$ = ٦ $\overrightarrow{س}$ − ٤ $\overrightarrow{ص}$ فإن : (أ ، ب) = ...

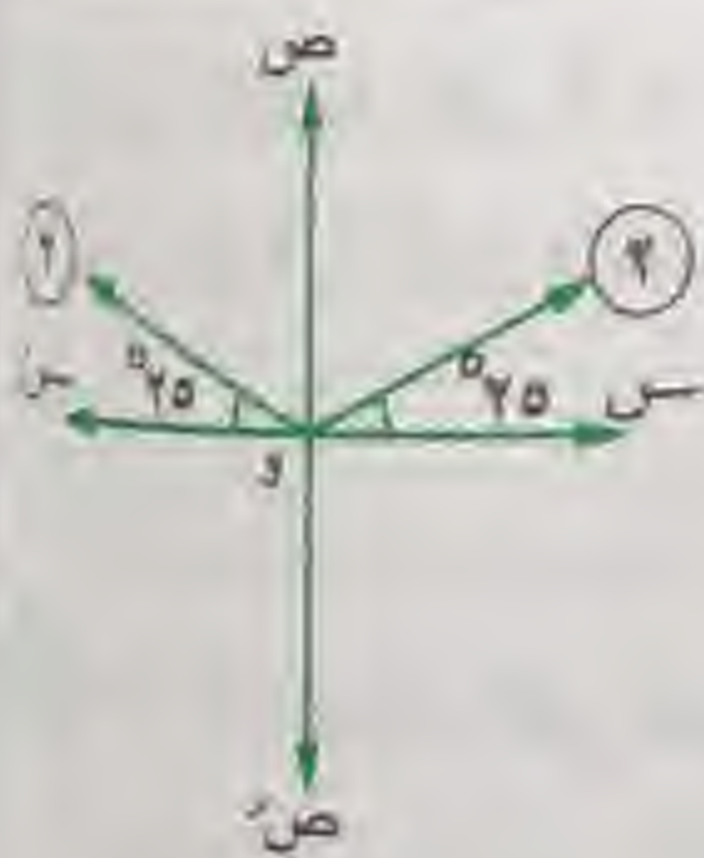
(أ) (١ ، −١) (ب) (−١ ، ١) (جـ) (−١ ، −١) (د) (١ ، ١)

١٠ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... $سم^2$

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

١١ محصلة القوى في الشكل المقابل تؤثر في اتجاه ....

(أ) $\overrightarrow{و س}$
(ب) $\overleftarrow{و س}$
(جـ) $\overrightarrow{و ص}$
(د) $\overleftarrow{و ص}$



١٢ إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتين مقداراهما ٦ ، ٨ نيوتن وتحصران بينهما زاوية قياسها ٩٠° فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ١٤ (د) ٢

١٣ إذا كان المستقيم ل ⊂ المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

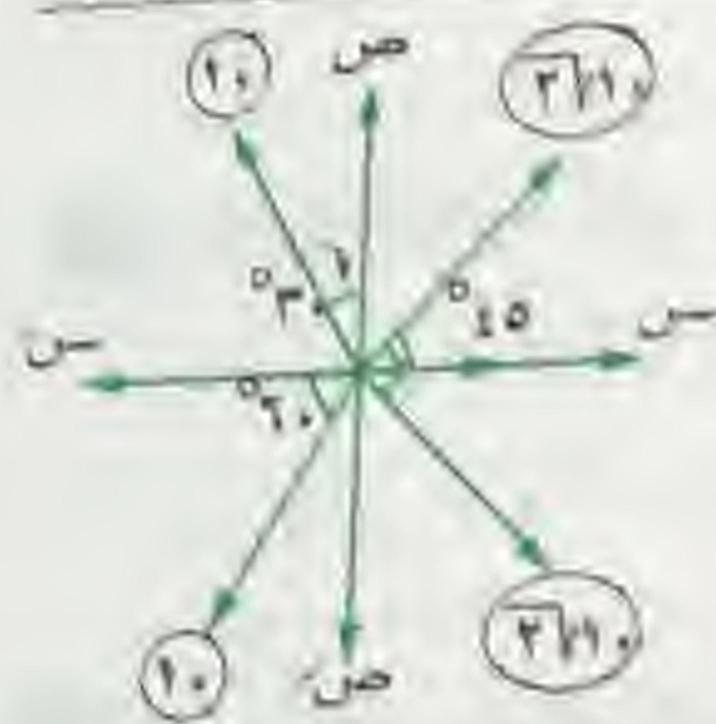
(أ) ∅ (ب) ل (جـ) س (د) {أ}

١٤ أ ب جـ ء أَ بَ جَ ءَ مكعب طول حرفه = ٦ سم

فإن حجم الهرم بَ أ ب جـ = ... سم^{٣}

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ٣٦ $\sqrt{٣}$ (د) ١٨ $\sqrt{٣}$

١٥ فى الشكل المقابل :

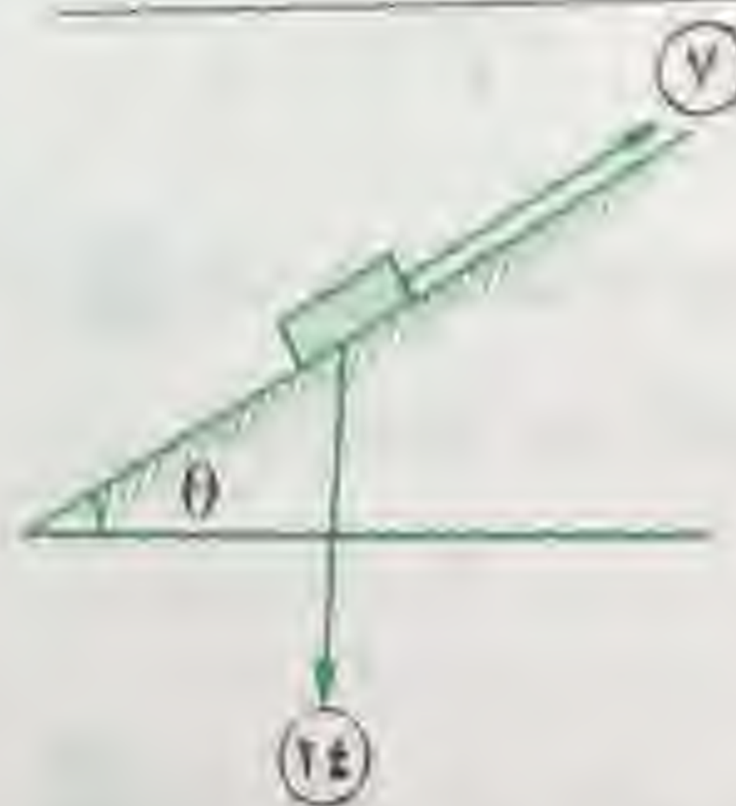


إذا كانت القوى المبينة مقدرة بالنيوتن

فإن محصلة هذه القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) صفر

١٦ فى الشكل المقابل :

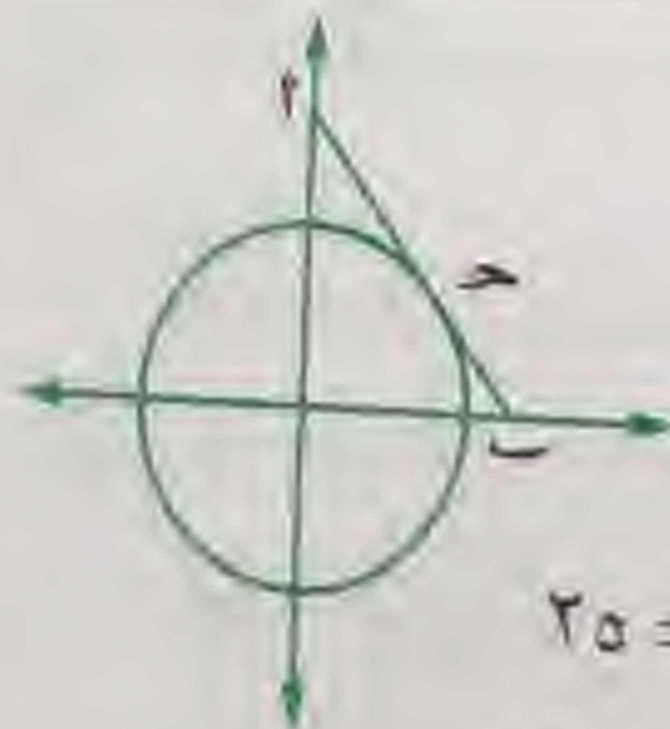


الجسم متزن على مستوى مائل أملس

فإن : ق (∠ θ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٣٠ (د) ٧٥

١٧ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ مماس للدائرة عند جـ ، أ جـ = ١٢,٥ وحدة طول

، ب جـ = ٨ وحدة طول ، فإن معادلة الدائرة هى ....

(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ (ب) س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

(جـ) س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ (د) س^{٢} + ص^{٢} = ١٢٥

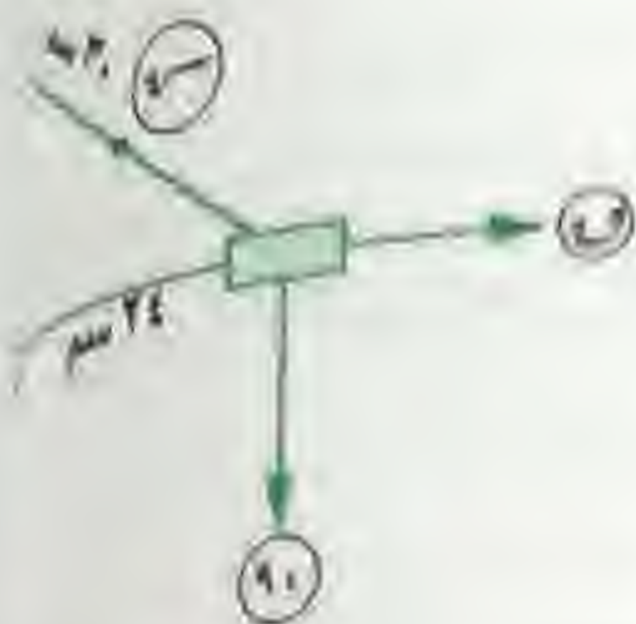
١٨ إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى متلاقية في نقطة ومتزنة
فإن : مقدار محصلة $ق_1$ ، $ق_2$ = ...

(أ) $ق_3$ (ب) $ق_1 + ق_2$ (جـ) $ق_3^2$ (د) صفر

---

١٩ في الشكل المقابل :

جسم وزنه ٩٠ ث.جم معلق في نهاية خيط طوله ٣٠ سم جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٢٤ سم من الحائط
فإن : ش - ق = ... ث.جم



(أ) ١٥٠ (ب) ١٢٠
(جـ) ٥٠ (د) ٣٠

---

٢٠ معادلة الدائرة التي مركزها (−٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هي ....

(أ) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٥$ (ب) $(س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 = ٢٥$
(جـ) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٢٥$

---

٢١ هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم فإن حجمه = ... سم^3

(أ) $٢٧\sqrt{٣}$ (ب) $٣٦\sqrt{٣}$ (جـ) $٥٤\sqrt{٢}$ (د) $١٨\sqrt{٢}$

---

٢٢ إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٤ : ٣
فإن النسبة بين القوتين ....

(أ) ٤ : ٧ (ب) ٥ : ٤ (جـ) ١ : ٧ (د) ٧ : ٣

---

٢٣ إذا كان : $ل_1$ ، $ل_2$ مستقيمان متخالفان فإن : $ل_1 \cap ل_2$ = ...

(أ) $\varnothing$
(ب) $ل_1$
(جـ) $ل_2$
(د) المستوى الذي يجمع $ل_1$ ، $ل_2$

---

٢٤ إذا كان $\overrightarrow{ق_1} = ٥ \overleftarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٧ \overleftarrow{س} - ٥ \overleftarrow{ص}$
فإن : $\|\overrightarrow{ح}\|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٢ (ب) ٥ (جـ) ١٣ (د) $\sqrt{٧٣}$

٢٥ قوتان مقدارهما ق، ، ق٢ ث.جم ومقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها ٣٠° فإن ق٢ = ... ث.جم

(أ) ٨   (ب) $8\sqrt{3}$ (ج) $8\sqrt{2}$ (د) ١٢

---

٢٦ حللت القوة التي مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠° على الترتيب كما بالشكل المقابل فإن ق٢ = ... نيوتن



(أ) ١٠   (ب) $10\sqrt{3}$ (ج) $6\sqrt{3}$ (د) $4\sqrt{3}$

---

٢٧ المعادلة (س ص ٨) $\begin{pmatrix} س \\ ص \\ ٢٠ \end{pmatrix}$ = ☐ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طول

حيث ☐ المصفوفة الصفرية.

(أ) ٢   (ب) ٤   (ج) ٦   (د) ٨

---

٢٨ في الشكل المقابل :

المستوى أ ب ء ∩ المستوى م جـ ء = ...



(أ) $\overleftrightarrow{م أ}$

(ب) $\overleftrightarrow{جـ ء}$

(ج) {ء}

(د) $\overleftrightarrow{م جـ}$

---

٢٩ النقطة التي تقع على الدائرة $(س - ٢)^2 + ص^2 = ١٣$ هي ....

(أ) (٢ ، ٣)   (ب) (٣ ، -٢)   (ج) (٢ ، ٥)   (د) (٤ ، ٣)

---

٣٠ أي المجسمات الآتية يعبر عن الشبكة المقابلة ؟

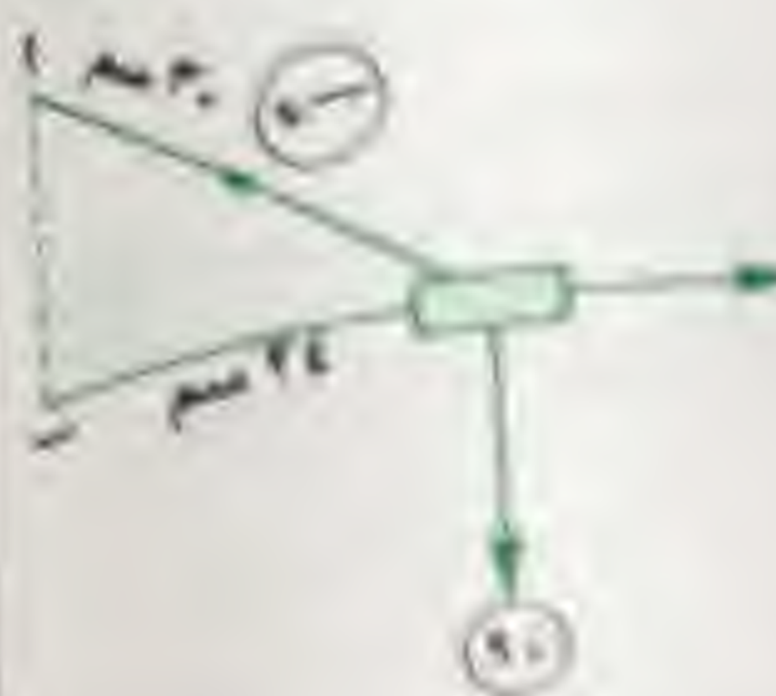


(أ) هرم رباعي.

(ب) هرم رباعي منتظم.

(ج) هرم ثلاثي منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.



أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ثلاث قوى مستوية متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكان مقدارى قوتين منهما هو ٧ ، ٣ نيوتن فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يكون .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ١١ (جـ) ٥ (د) ٣

٢ هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم^2. وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^2.

(أ) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٣٦٠

٣ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٨ $\overleftarrow{ص}$

فإن : $\| \overleftarrow{ح} \|$ = ... وحدة قوة.

(أ) ١٤ (ب) $\sqrt{٨٤}$ (جـ) ١٠٠ (د) ١٠

٤ هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم فإن حجمه يساوى .... سم^3.

(أ) ٣٢٠ $\sqrt{٣}$ (ب) ٩٦٠ $\sqrt{٣}$ (جـ) $\frac{٣٢٠ \sqrt{٣}}{٣}$ (د) ٥٥٤,٢٥

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما ١٦ نيوتن عندما كان قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن القيمة العظمى لمحصلتيهما تساوى .... نيوتن.

(أ) ٣٢ (ب) ٨ $\sqrt{٢}$ (جـ) ١٦ $\sqrt{٢}$ (د) صفر

٦ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه ومساحته الكلية هى ....

(أ) ٤ : ١ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٤ : ٣ (د) ٣ : ٤

٧ إذا كانت ى الزاوية بين قوتين مقداراهما ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ى $\in$]٠ ، π[فإن مقدار محصلة القوتين مقاسة بالنيوتن $\in$ ....

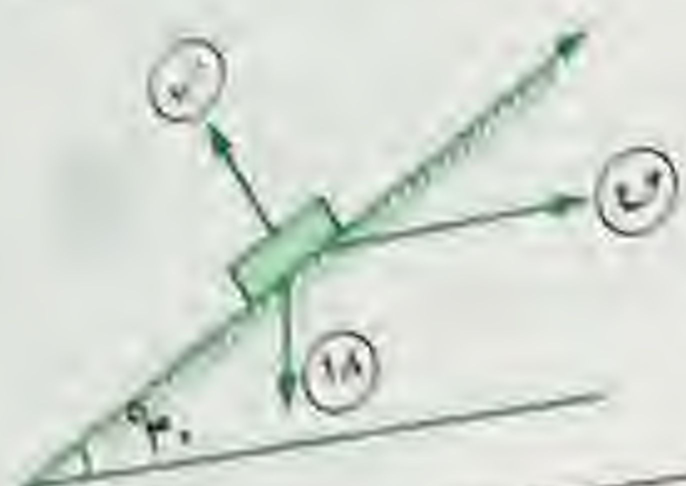
(أ)]٤ ، ٨[(ب) [٤ ، ٨[(جـ)]٤ ، ٨] (د) [٤ ، ٨]

٨ إذا كانت الدائرة التى معادلتها : س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٨ ص + حـ = ، تمس محور السينات فإن : حـ = ...

(أ) -٩ (ب) ٩ (جـ) ٦ (د) -٦

٩ فى الشكل المقابل :

ق + ر = ...



(أ) ١٢ $\sqrt{٣}$ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤ $\sqrt{٣}$

١٠ طول القطعة المماسة للدائرة : س^{٢} + ص^{٢} = ٩ من النقطة (٥ ، ٠) يساوى .... وحدة طول.

(أ) ١٤ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٤

١١ أقل عدد من القوى المستوية الغير متساوية مقدارًا ويمكن أن تكون متزنة هو ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ١

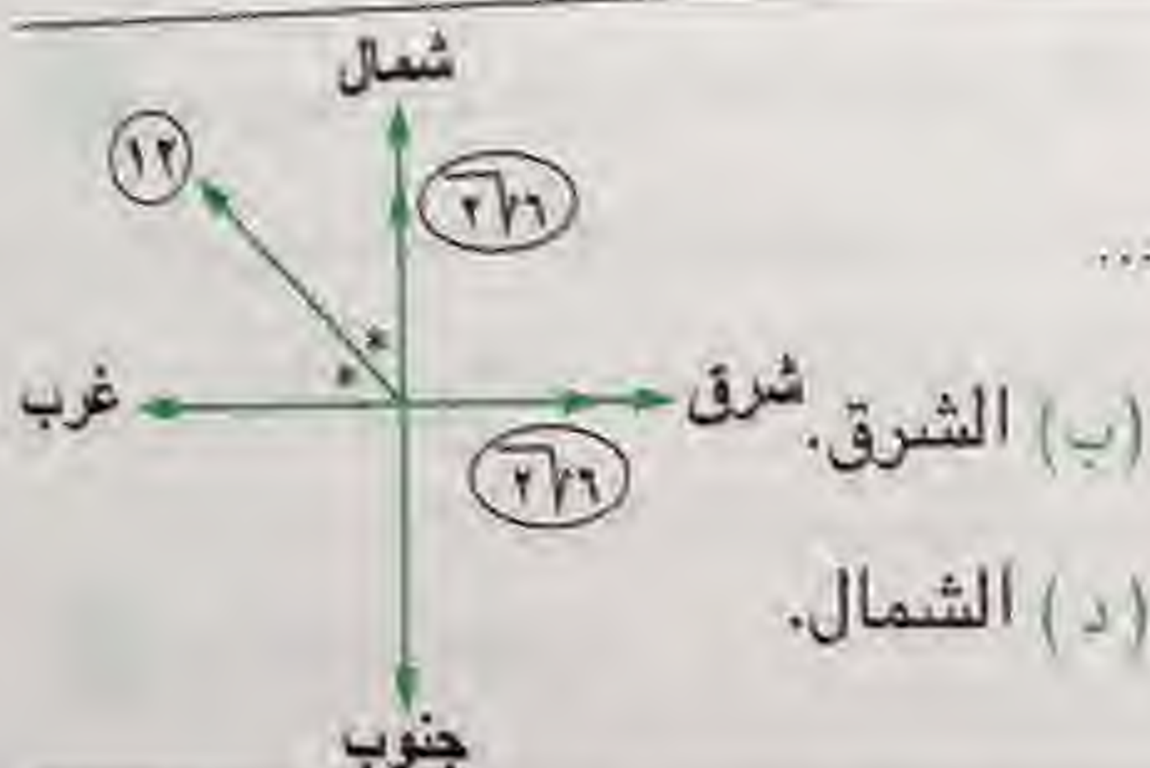
١٢ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ماعدا ....

(أ) مستقيمين متقاطعين. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيم ونقطة تنتمى إليه. (د) ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

١٣ فى الشكل المقابل :

تكون محصلة القوى تعمل فى اتجاه ....



(أ) الجنوب. (ب) الشرق.

(جـ) الغرب. (د) الشمال.

١٤ أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوة مقدارها ١٠ نيوتن فى $\overleftarrow{\text{أء}}$ فإن مركبتى القوة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$ على الترتيب هما .... نيوتن.

(أ) ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٥ (ب) ٥ ، ٥ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٠ $\sqrt{٣}$ ، ٥ (د) ١٠ $\sqrt{٣}$ ، ١٠

١٥ الشكل الذي أمامك يصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم³
فإن مساحته الجانبية = ... سم²



(أ) ٦٠ π (ب) ١٠٨ π

(جـ) ٩٦ π (د) ١١٦ π

---

١٦ إذا كانت ح هي محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ وكانت ى قياس الزاوية بينهما
وكان ق١ ، ق٢ ، ح = ٤ ، ٢ √١٣ فإن ى =

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٦٠° (د) ٣٠°

---

١٧ مركز الدائرة التي معادلتها ٢ س² + ٢ ص² + ١٢ س − ١٦ ص = ٠ هو ......

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (−٦ ، ٨) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٦ ، −٨)

---

١٨ في الشكل المقابل :



كرة منتظمة مركزها م ، وطول قطرها ٦ سم
وزنها ١٠٠ نيوتن ، ب جـ = ٢ سم
فإنه في وضع الاتزان يكون ر + ش = ... نيوتن

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٦٠ (د) ٨٠

---

١٩ مخروط قائم طول راسمه يساوي طول قطر قاعدته
فإن مساحته الكلية تساوي .... سم²

(أ) ٣ π نق² (ب) ٢ π نق² (جـ) ٤ π نق² (د) ٤ π نق²

---

٢٠ في الشكل المقابل :



ش١ : ش٢ : و = ...

(أ) ٥ : ٣ : ٤ (ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٣ : ٥ (د) ٥ : ٤ : ٣

٢١ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٦٤ سم، وارتفاعه ٣ سم، فإن حجمه يساوى .... سم^{٣}.

(أ) ٢٦٥ (ب) ٥٦٢ (جـ) ٢٥٦ (د) ٦٥٢

٢٢ قياس الزاوية بين $\overline{ق_١}$ ومحصلة القوتين ($\overline{ق_١}$ + $\overline{ق_٢}$) ، ($\overline{ق_١}$ - $\overline{ق_٢}$) هى

(أ) صفر° (ب) π (جـ) $\frac{\pi}{٢}$ (د) $\frac{\pi}{٣}$

٢٣ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤ سم، وطول راسمه ٥ سم، يكون حجمه .... سم^{٣}.

(أ) ٣٦ π (ب) ١٥ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٢ π

٢٤ إذا وضع جسم وزنه و نيوتن على مستوى أملس يميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ فإن مركبة وزن الجسم فى اتجاه المستوى هى ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و (د) و ظا هـ

٢٥ إذا كان : $\overleftrightarrow{أب}$ ⊂ المستوى س ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ // المستوى س

فإن : $\overleftrightarrow{حـ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ ....

(أ) متوازيان فقط. (ب) متخالفان فقط.

(جـ) متوازيان أو متخالفان. (د) متقاطعان.

٢٦ إذا كانت القوى $\overline{ق_١}$ = ٤ $\overline{س}$ + ٥ $\overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢}$ = أ $\overline{س}$ - ٧ $\overline{ص}$

، $\overline{ق_٣}$ = ٣ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ متزنة فإن : أ + ٢ ب = ...

(أ) ٧ (ب) -٥ (جـ) ٥ (د) -٣

٢٧ إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ محور تماثل للدائرة التى معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}

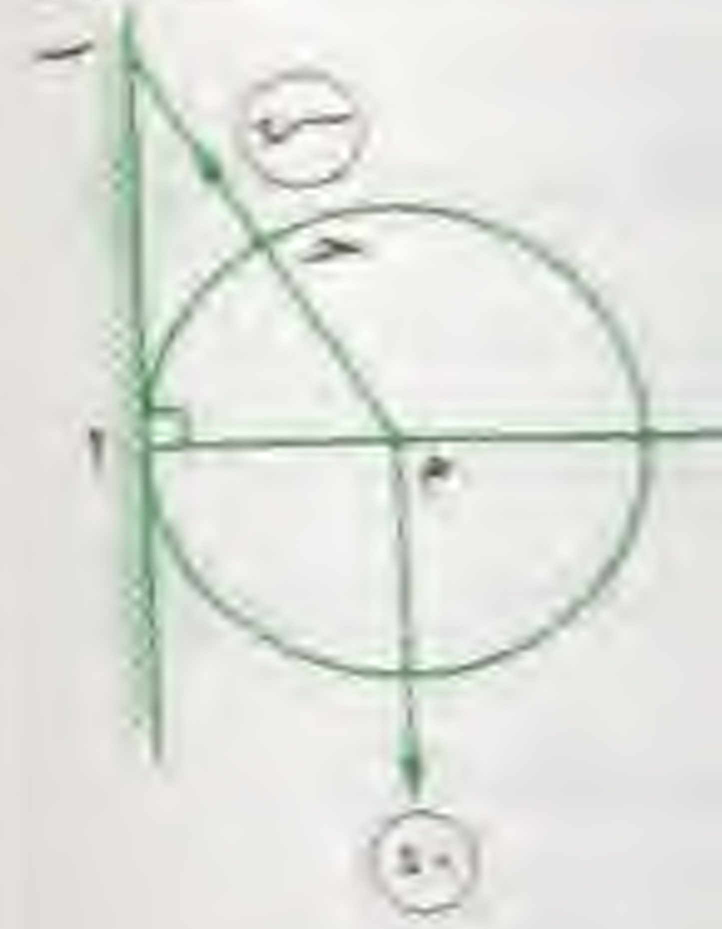
وكان أ ، ب ∈ للدائرة حيث أ = (-٢ ، ٥) فإن : ب = ...

(أ) (٢ ، -٥) (ب) (٢ ، ٥) (جـ) (٠ ، ٠) (د) (٥ ، -٢)

٢٨ إذا كانت ص^{٢} + (س - ٥)^{٢} = ٢٠ هى معادلة دائرة

فإن النقطة .... تقع على الدائرة.

(أ) (٤ ، ٢) (ب) (٣ ، ٤) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٠ ، ٥)


29 في الشكل المقابل :
اتجاه رد فعل المفصل على القضيب عند أ ....



(أ) في اتجاه $\overleftarrow{أب}$
(ب) في اتجاه $\overleftarrow{أجـ}$
(جـ) ينصف $\overline{بجـ}$
(د) عمودي على $\overline{بجـ}$

30 إذا قطع محور السينات الدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 = 49$ في النقطتين أ ، ب فإن طول $\overline{أب}$ = ... وحدة طول.

(أ) 49 (ب) 7 (جـ) 2 (د) 14

5 محافظة الشرقية

إدارة شرق الزقازيق
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1 إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطي عملهما يساوي ....

(أ) $180°$ (ب) $120°$ (جـ) صفر° (د) $60°$

2 حجم مخروط قائم طول راسمه = 15 سم ومساحته الكلية = 216 π سم² يساوي .... سم³

(أ) 205 π (ب) 220 π (جـ) 280 π (د) 324 π

3 إذا كان : $\overleftarrow{ق}_1 = 5\overleftarrow{س} + 3\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_2 = أ\overleftarrow{س} + 6\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_3 = -14\overleftarrow{س} + ب\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن ومتزنة ومتلاقية في نقطة فإن : أ + ب = ...

(أ) صفر (ب) 18 (جـ) -18 (د) 9

4 إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ل (ب) {أ} (جـ) ∅ (د) س

٥ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط على استقامة واحدة = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائي.

٦ طول قطر الدائرة : ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} + ١٦ س − ٨ ص − ١٦ = ٠ يساوى .... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ٢٤

٧ الدائرة التى معادلتها : (س − أ)^{٢} + (ص − ب)^{٢} = أ^{٢} ، حيث (أ ≠ ب) ....

(أ) تمس محور السينات. (ب) تمس محور الصادات.

(جـ) تمس المحورين. (د) لا تمس أي من المحورين.

٨ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مقدار مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى يساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ (د) ٦

٩ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٤ (ب) ١٦ (جـ) ٢ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

١٠ أثرت القوى المستوية التى مقاديرها ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث.كجم فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠° فإن : (ق ، ك) = ... علمًا بأن المجموعة متزنة.

(أ) (٣ ، ٩) (ب) (٩ ، ٦) (جـ) (٤ ، ٣) (د) (٥ ، ٤)

١١ فى الشكل المقابل :

إذا كانت الكرة فى وضع توازن

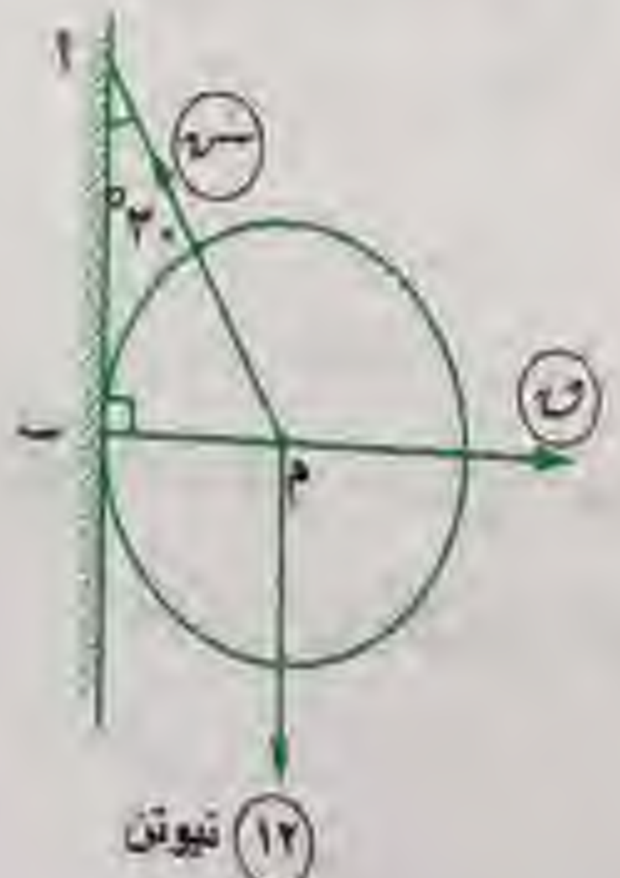
فإن : (ش ، ر) = ...

(أ) (٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

(ب) (٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن ، ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن)

(جـ) (١٢ نيوتن ، ٨ نيوتن)

(د) (٤ نيوتن ، ٨ نيوتن)





فى النقطتين أ ، ب

(د) ١٤



زاوية بين خطى

(د) ٦٠°

سم^{٣}

٣٢٤ π

٩

١٢ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها … وحفظ في حالة توازن بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة الأفقية =

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (جـ) $٤\sqrt{٣}$ (د) ٦

١٣ النقطة التي تقع على الدائرة : $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ هي ……………

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٢)

١٤ هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبي ١٢ سم فإن مساحته الجانبية = ……………

(أ) ٣٦٠ سم^{٢} (ب) ٢٦٠ سم^{٢} (جـ) ١٣٠ سم^{٢} (د) ٥٢٠ سم^{٢}

١٥ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم ارتفاعه ١٥ سم ، وطول راسمه ١٧ سم يساوي …………… سم

(أ) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٧ (د) ٩

١٦ المستقيمان المتخالفان هما المستقيمان اللذان ……………

(أ) لا يتقاطعان. (ب) لا يتعامدان.

(جـ) لا يتوازيان. (د) لا يتقاطعان ولا يتوازيان.

١٧ قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران في نقطة فإن مقدار محصلتهما = …………… نيوتن

(أ) ١٧ (ب) ٧ (جـ) ١٣ (د) ١٤

١٨ في الشكل المقابل :



القوة مقدرة بالنيوتن فإن : $(ق_{١} ، ق_{٢})$ = ……………

(أ) $(٥٠ ، ٥٠\sqrt{٣})$ (ب) $(٥٠\sqrt{٣} ، ١٠)$

(جـ) (٥٠ ، ٥٠) (د) (١٠ ، ١٠)

١٩ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ١٠ ، $٤\sqrt{٧}$ نيوتن تؤثر في نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية يساوي ٦٠° فإن القيمة العظمى لمحصلة القوى الثلاثة هي ……………

(أ) $٥\sqrt{٧}$ (ب) $١٤\sqrt{٧}$ (جـ) $٩\sqrt{٧}$ (د) $١٥\sqrt{٧}$

٢٠ مركز الدائرة : س^{٢} + ص^{٢} − ٦ س + ٨ ص = ٠ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤)　　(ب) (٤ ، −٣)　　(جـ) (−٣ ، ٤)　　(د) (−٤ ، ٣)

---

٢١ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° يتزن بتأثير قوة ق نيوتن في اتجاه المستوى لأعلى فإن : ق + ر = ... نيوتن.

(أ) ٦ $\sqrt{٣}$　　(ب) ٩ $\sqrt{٣}$

(جـ) ١٨ $\sqrt{٣}$　　(د) ٩ + ٩ $\sqrt{٣}$

---

٢٢ مصباح وزنه ٢٨٠ ث.جم معلق في نهاية خيط اتزن بتأثير قوة عمودية على الخيط عندما يميل الخيط على الرأسي بزاوية قياسها ٦٠° فإن : $\frac{\text{ق}}{\text{ش}}$ = ...

(أ) ٢　　(ب) $\sqrt{٣}$　　(جـ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$　　(د) $\frac{١}{٢}$

---

٢٣ أقل بعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة التي معادلتها :

(س − ٧)^{٢} + (ص − ٥)^{٢} = ١٦ هو .... وحدة طول.

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٧

---

٢٤ مركز الدائرة التي $\overline{\text{أب}}$ قطر فيها حيث أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٥ ، −٣) هو ....

(أ) (٤ ، ٠)　　(ب) (٢ ، ٠)　　(جـ) (−٦ ، −٦)　　(د) (٠ ، ٤)

---

٢٥ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم ، وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}.

(أ) ٣٧٥ π　　(ب) ٦٠٠ π　　(جـ) ١٥٠٠ π　　(د) ١٨٧٥ π

---

٢٦ هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^{٢} ، ارتفاعه الجانبي = ٥ سم. فإن محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٦　　(ب) ١٢　　(جـ) ٢٤　　(د) ٣٦

٢٧ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ......

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) عدد لا

٢٨ إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى = ...

(أ) و (ب) و طا θ (ج) و جتا θ (د) و جا θ

٢٩ إذا كانت النسبة بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة قوتين كنسبة ٧ : ١ فإن النسبة بين القوتين = ...

(أ) ٧ : ٤ (ب) ٧ : ٣ (ج) ٥ : ٢ (د) ٥ : ٣

٣٠ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولهما ٦٠ سم، ٨٠ سم. من نقطتين على أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. وكان الشد فى الخيط الأول $ش_1$ والشد فى الثانى $ش_2$ فإن : $ش_1 + ش_2$ = ... ث.جم.

(أ) ١٦٠ (ب) ١٢٠ (ج) ٢٤٠ (د) ٢٨٠

٦ محافظة المنوفية

إدارة شبين الكوم
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة والكتاب المدرسى)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ الكتلة تقاس بوحدة ....

(أ) داين. (ب) نيوتن. (ج) كيلوجرام. (د) ث.جرام

٢ إذا كان : $\overrightarrow{أ} = (٣ ، ٤)$ فإن : $\|\overrightarrow{أ}\|$ = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٢

٣ عدد المستويات التى تمر بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة تساوى ......

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

٤ في الشكل المقابل :



إذا كان : أب = ٣ سم ، ب ء = ء حـ = ١ سم

، ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° فإن حجم الجسم الناشئ

من دوران المنطقة المظللة دورة كاملة حول المحور $\overleftrightarrow{أب}$

كما بالشكل المقابل = ...

(أ) π (ب) ٢ π (جـ) ٣ π (د) ٤ π

---

٥ في الشكل المقابل :



ثلاث قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٣ $\sqrt{٣}$ نيوتن

وتؤثر في النقطة و في اتجاهات $\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و أ}$ ، $\overrightarrow{و ب}$ ، $\overrightarrow{و ص}$

، ق (∠ أ و حـ) = ٦٠° ، ق (∠ ب و ء) = ٣٠°

فإن مقدار واتجاه محصلة القوى يساوى ....

(أ) (٤ ، ١٨٠°) (ب) (٤ ، ٠°) (جـ) (٣ ، ٠°) (د) (٥ ، ٩٠°)

---

٦ في الشكل المقابل :



إذا كان : أ ء = ٣ سم ، أ ب = ٥ سم

فإن المساحة الكلية للمخروط = ... سم^{٢}.

(أ) ٨ π (ب) ٢٤ π (جـ) ٤٨ π (د) ٣٦ π

---

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم.

هى : س^{٢} + ص^{٢} .... = ٠

(أ) −٤ س + ٢ ص − ٩ (ب) −٤ س + ٢ ص − ٤

(جـ) + ٢ س − ص + ٣ (د) + ٢ س − ص + ٩

---

٨ إذا كانت $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٣}}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية في نقطة بحيث :

$\overrightarrow{ق_{١}}$ = (٢ ، −٥) ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ = (−٣ ، ٢) فإن : $\overrightarrow{ق_{٣}}$ = ...

(أ) (٢ ، ١) (ب) (−١ ، −٣) (جـ) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

٩ قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى جسيم وتحصران زاوية قياسها هـ حيث جا هـ = $\frac{٤}{٥}$ فإن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والقوة الأولى = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) خلاف ذلك

١٠ فى الشكل المقابل :

ثلاث قوى متزنة مقاديرها ق ، ك ، ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن

، ق (∠ ب أ حـ) = ٩٠° ، ق (∠ ب أ ء) = ١٣٥°

فإن : ق ، ك تساوى .... على الترتيب.



(أ) ٤ ، ٤ (ب) ٤ ، $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ ، ٤ (د) ٢ ، ٢

١١ مركز الدائرة : ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٣٢ = ٠ هو ....

(أ) (٠ ، ٠) (ب) (٢ ، ٢) (جـ) (١ ، ١) (د) (−١ ، −١)

١٢ عدد المستويات التى تمر بمستقيمين متوازيين مختلفين = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى

١٣ فى الشكل المقابل :

م أ ب حـ ء هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨ سم^{٣} وارتفاعه ٤ سم

، ك حـ = ك ب ، أ حـ ∩ ب ء = {ح}

، ق (∠ م ح ك) = ق (∠ ح ك ب) = ق (∠ م ك ب) = ٩٠°

فإن المساحة الجانبية للهرم = ... سم^{٢}



(أ) ١٨ (ب) ٢٤ (جـ) ٣٦ (د) ٦٠

١٤ مخروط دائرى قائم ، طول راسمه ١٧ سم، وارتفاعه ١٥ سم.

فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

١٥ إذا كان : ق ، ٢ مقدارى قوتين تؤثران فى جسيم وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°

، المحصلة تنصف الزاوية المحصورة بين القوتين فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) خلاف ذلك.

١٦ الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ = ٢$\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ + ٢$\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$ هى ....

(أ) (٢ ، ١٣٥°) (ب) (٤ ، ٤٥°) (جـ) (٢ ، ٤٥°) (د) (٤ ، ١٣٥°)

١٧ قوتان مقداراهما ٨$\sqrt{٣}$ ، ٨ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن

(أ) ٦٤ (ب) ٣٢ (جـ) ١٦ (د) ٨

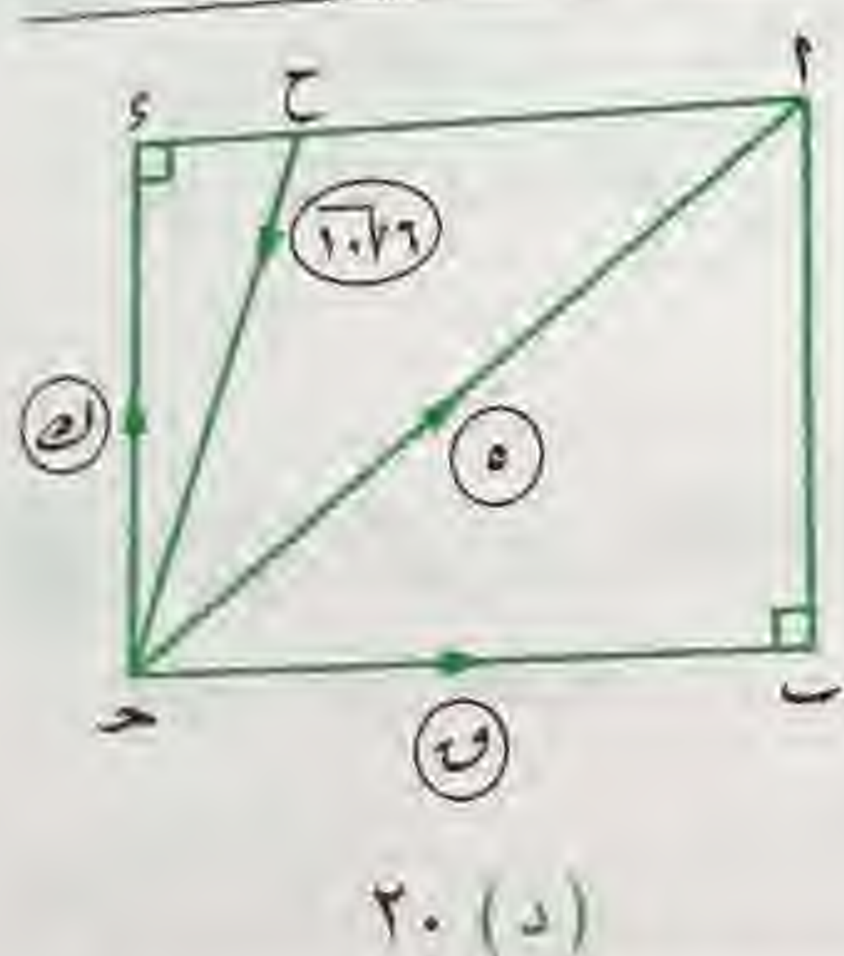
١٨ إذا كان : $\overrightarrow{ق_١}$ = (٥ ، ٣) ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = (أ ، ٦) ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = (-١٤ ، ب) ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ومحصلتهم $\overrightarrow{ح}$ = (١٠$\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) فإن قيمتى أ ، ب على الترتيب هما ....

(أ) -١ ، ١ (ب) ١ ، -١ (جـ) ٢ ، ١ (د) ١ ، ٢

١٩ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل التمام

٢٠ فى الشكل المقابل :

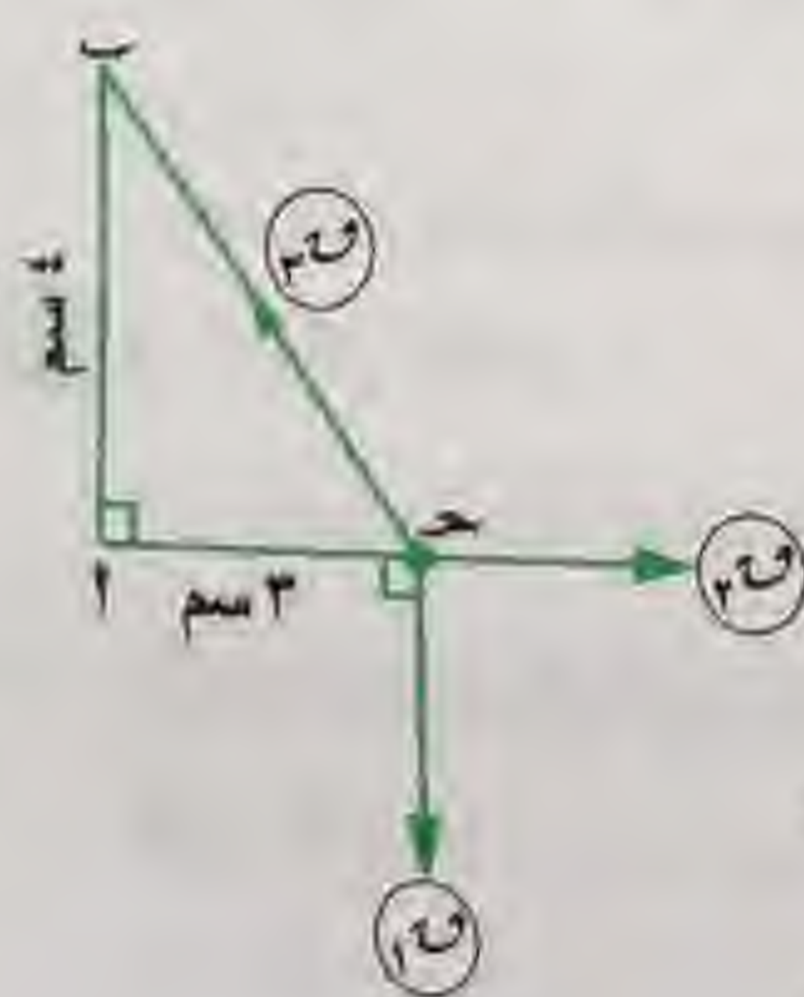


إذا كانت مقادير القوى ق ، ٥ ، ك ، ٦$\sqrt{١٠}$ متزنة وتؤثر فى المستطيل أ ب جـ ء فى الاتجاهات $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ أ}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$ ، $\overrightarrow{ح جـ}$ بحيث أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ ح = ٦ سم

فإن قيمة ك = ... نيوتن.

(أ) ١٢ (ب) ١٥ (جـ) ١٨ (د) ٢٠

٢١ فى الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها ق١ ، ق٢ ، ق٣ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد ، أ ب = ٤ سم ، أ جـ = ٣ سم

فإن : ق١ : ق٢ : ق٣ = ...

(أ) ٣ : ٤ : ٣ (ب) ٣ : ٥ : ٤ (جـ) ٤ : ٥ : ٣ (د) ٤ : ٣ : ٥

٢٢ عدد المستقيمات التي تمر بنقطتين مختلفتين

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٢

٢٣ إذا كان الخط المستقيم ل // المستوى سـ فإن ل ∩ سـ = ...

(أ) ل (ب) المستوى سـ (جـ) ∅ (د) خلاف ذلك

٢٤ إذا كان سـ ، صـ مستويان بحيث سـ ∩ صـ = ∅

فإن سـ ...... صـ

(أ) ⊥ (ب) // (جـ) = (د) ≡

٢٥ إذا كانت الدائرة : سـ^{٢} + ص^{٢} + ٦ سـ − ١٢ ص + ٥ = ٠ ، تمر برؤوس خماسي منتظم علمًا بأن كل وحدة في المستوى الاحداثي تمثل ٥ سم.

فإن مساحة سطح الخماسي المنتظم ≈ .... سم^{٢}.

(أ) ٨٧٣٢ (ب) ٧٨٢٣ (جـ) ٣٢٨٧ (د) ٢٣٧٨

٢٦ وضع جسم وزنه ٨ ث.جم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ بحيث جا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم في حالة الاتزان بواسطة قوة أفقية فإن مقدار هذه القوة = ... داين.

(أ) ٦ (ب) −٥٨٨ (جـ) ٥٨٨ (د) خلاف ذلك

٢٧ الدائرة التي تمر بالثلاث نقط أ = (−٢ ، ٠) ، ب = (٢ ، −١) ، حـ = (٣ ، ٢) يكون طول قطرها = ... وحدة طول.

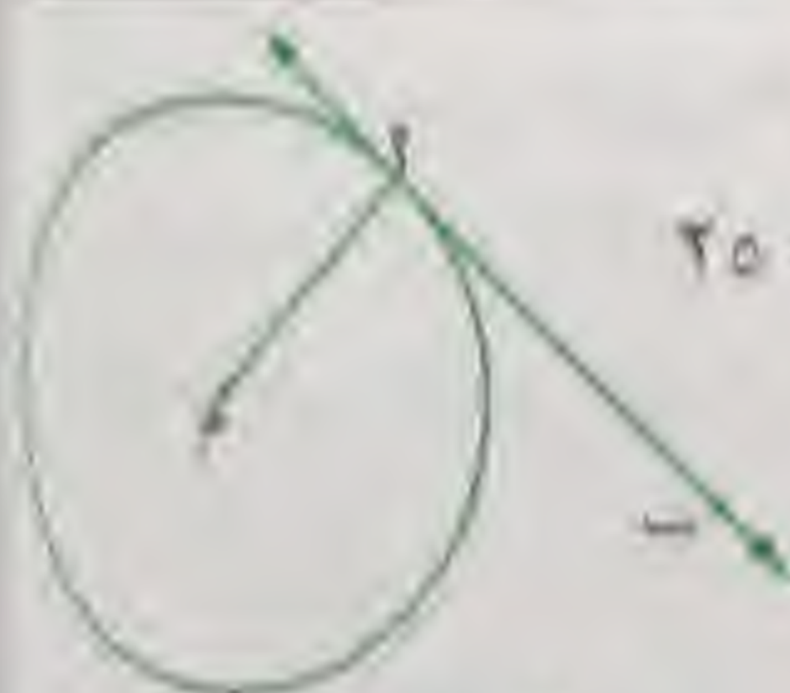
(أ) $\sqrt{٣٤}$ (ب) $\sqrt{٣٣}$ (جـ) $\sqrt{٣٢}$ (د) $\sqrt{٣١}$

٢٨ إذا كان محور الصادات يمس الدائرة : سـ^{٢} + ص^{٢} + ٤ سـ + ك ص + ٤ = ٠

فإن : ك = ...

(أ) ± ٢ (ب) ± ٣ (جـ) ± ٤ (د) ± ٥

٢٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الدائرة م هي (سـ − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} = ٢٥

، $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ حيث : ب = (−٢ ، ١٠)

فإن : أب = ... وحدة طول.

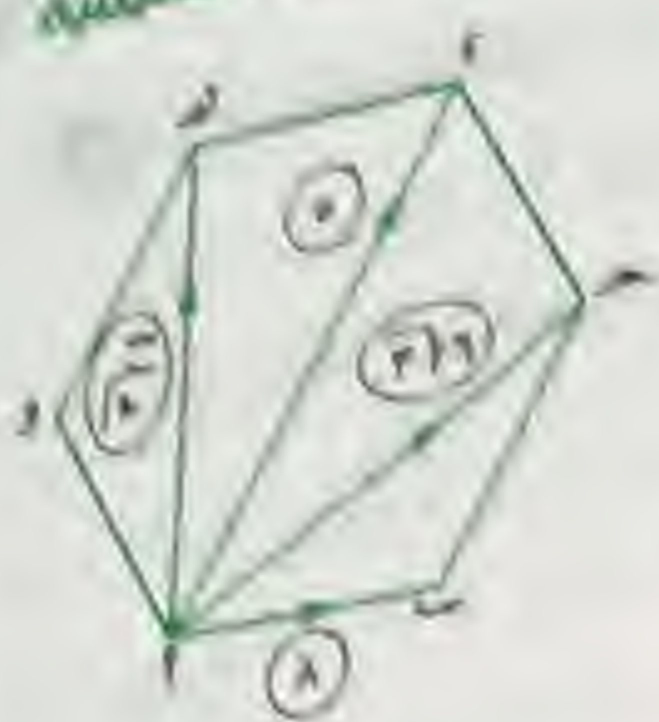
(أ) ١٣ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٥

٣٠ في الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و سداسي منتظم ، القوى التي مقاديرها ٨ ، ٦$\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤$\sqrt{٣}$ نيوتن

أثرت في $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ بالترتيب

فإن مقدار محصلتهم = ... نيوتن.



(أ) $\sqrt{٥٦١}$ (ب) $\sqrt{٦٥١}$

(جـ) $\sqrt{١٥٦}$ (د) $\sqrt{١٦٥}$

٧ محافظة الغربية



إدارة السنطة
توجيه الرياضيات الفترة الصباحية

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا وضع جسم وزنه و على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فإن مقدار مركبة وزنه في اتجاه عمودي على المستوى هي ....

(أ) و جا هـ (ب) و جتا هـ (جـ) و ظا هـ (د) و قتا هـ

٢ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_١}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = -٣ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$

فإن : $\overrightarrow{ح}$ = (............ ، ....)

(أ) (٦ ، ١) (ب) (١ ، ٦) (جـ) (-١ ، ٦) (د) (١ ، ٧)

٣ إذا كان : المستقيم ل // المستوى س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ل (ب) س (جـ) ∅ (د) لا شيء مما سبق.

٤ يتقاطع المستويان في ....

(أ) نقطة. (ب) خط مستقيم. (جـ) قطعة مستقيمة. (د) شعاع.

٥ أقل زاوية يمكن أن يدورها مثلث متساوي الساقين حول محور تماثله لينتج مخروط دائري قائم هي .... درجة.

(أ) ٩٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ٢٧٠° (د) ٦٠°

٦ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥ ، ٦ ، ٧ نيوتن تؤثر في نقطة مادية فإذا كانت القوى متزنة فإن جيب تمام الزاوية بين القوتين الثانية والثالثة = ...

(أ) $\frac{٧}{٥}$ (ب) $\frac{-٥}{٧}$ (جـ) $\frac{١٥}{١٧}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٧ في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٢٠ نيوتن تعمل في اتجاه ٣٠ شمال الشرق

فإن مقدار مركبتها في اتجاه الشمال = ... نيوتن



(أ) $10\sqrt{3}$ (ب) ٢٠

(جـ) ١٠ (د) ٥

٨ في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوتين = ... نيوتن



(أ) ٢ ق (ب) ق

(جـ) $\sqrt{3}$ ق (د) صفر

٩ عدد أوجه الهرم الخماسي المنتظم = ...

(أ) ٧ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١٠ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة ومتزنة إذا كان مقداري قوتين منهم ٨ ، ٤ نيوتن

فإن مقدار القوة الثالثة يمكن أن يكون .... نيوتن.

(أ) ١ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) صفر

١١ إذا قطع المخروط الدائري القائم بمستوى يوازي قاعدته فالمقطع الناتج هو ....

(أ) مثلث متساوي الساقين. (ب) مثلث متساوي الأضلاع.

(جـ) دائرة. (د) شبه منحرف.

١٢ وضع جسم يزن ٢٠ ث. كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها ى

حيث جا ى = $\frac{3}{5}$ ومنع من الانزلاق بواسطة قوة أفقية ق فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٣٠ (ب) ١٥ (جـ) ١٠ (د) $5\sqrt{3}$

١٣ قوتان مقداراهما ٥ ، ق نيوتن أصغر محصلة لهم ١٠ نيوتن ، ق > ٥

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

١٤ إذا كانت المعادلة : ٢ $س^٢$ + (أ - ١) $ص^٢$ + ٥ س - ٢ ص = ٧ تمثل دائرة فإن : أ = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

---

١٥ كرة مصمتة ملساء وزنها ٢٠ ث.جم طول نصف قطرها ٥ سم. متزنة بربطها بخيط طوله ٥ سم. مربوط بنقطة على سطحها وطرفه الآخر بنقطة فى المستوى الرأسى الأملس فوق نقطة التماس فإن رد فعل المستوى الرأسى ر = ... ث.جم

(أ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٣}}$ (ب) ٢٠ (جـ) $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}}$ (د) صفر

---

١٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٦ سم. ، وطول حرفه الجانبى ٨ سم فإن ارتفاعه = ... سم.

(أ) ٥ $\sqrt{٢}$ (ب) $\sqrt{٤٦}$ (جـ) $\sqrt{٨٥}$ (د) ٤٨

---

١٧ فى الشكل المقابل :



حللت قوة مقدارها ٢٠ $\sqrt{٢}$ ث.كجم تعمل فى اتجاه الشمال الغربى إلى مركبتين إحداهما $ق_١$ نحو الشمال الشرقى والأخرى $ق_٢$ نحو الغرب فإن : $ق_٢$ = ... ث.كجم

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٥٠ (د) ٤٠ $\sqrt{٢}$

---

١٨ باستخدام الشبكة التى أمامك فإن المساحة الجانبية للمجسم الناتج = ... $سم^٢$.



(أ) ٨ $\sqrt{٣}$ (ب) ١٢ $\sqrt{٣}$ (جـ) ١٦ $\sqrt{٣}$ (د) ٢٤

---

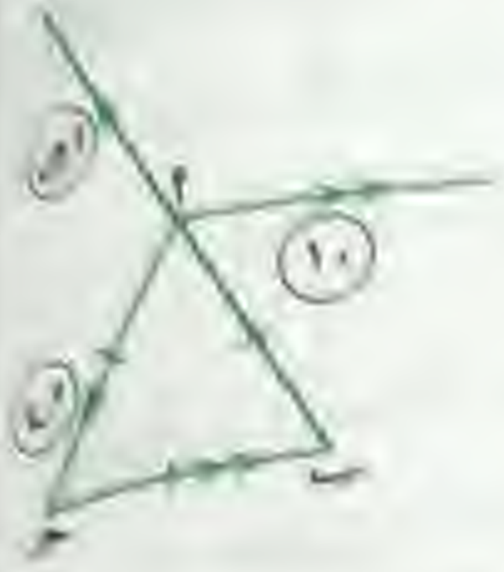
١٩ فى الشكل المقابل :



طول راسم المخروط = ... سم.

(أ) ١٢ (ب) ١٣ (جـ) ٥ (د) ١٠

٢٠ في الشكل المقابل :



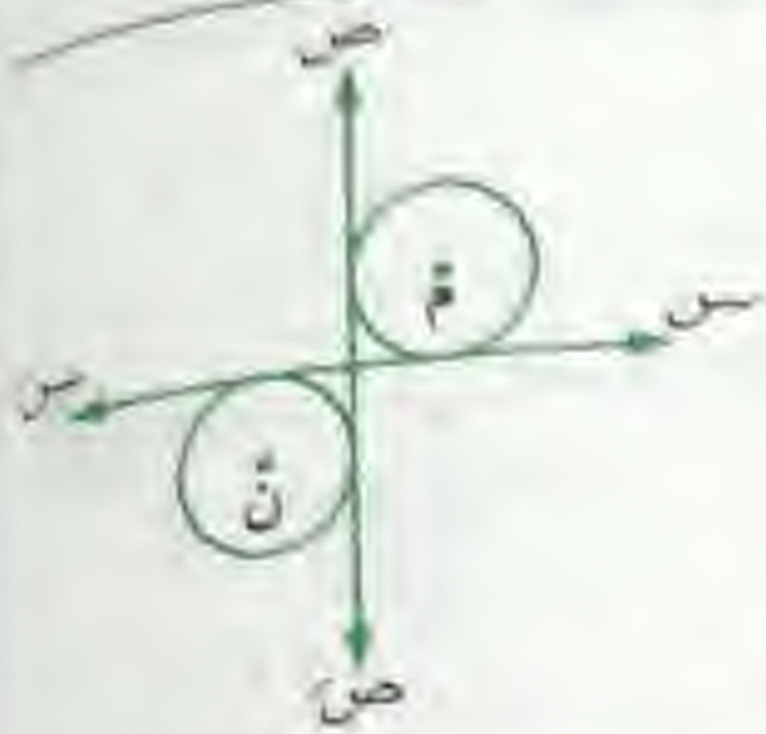
إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ١٠　　(ب) ١٢

(جـ) ٢٠　　(د) ١٣

٢١ في الشكل المقابل :



م ، نَ دائرتان متطابقتان طول نصف قطر أي منهما يساوي ٣ سم

فإن : م نَ = ... سم.

(أ) ٦　　(ب) ٦ $\sqrt{2}$

(جـ) ٩ $\sqrt{2}$　　(د) ٤

٢٢ ثلاث قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة مادية ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين = ... °

(أ) ١٢٠　　(ب) ٢٤٠　　(جـ) ١٨٠　　(د) صفر

٢٣ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروط دائري قائم



فإن طول نصف قطر قاعدته = ... سم.

(أ) ١٢　　(ب) ١٠

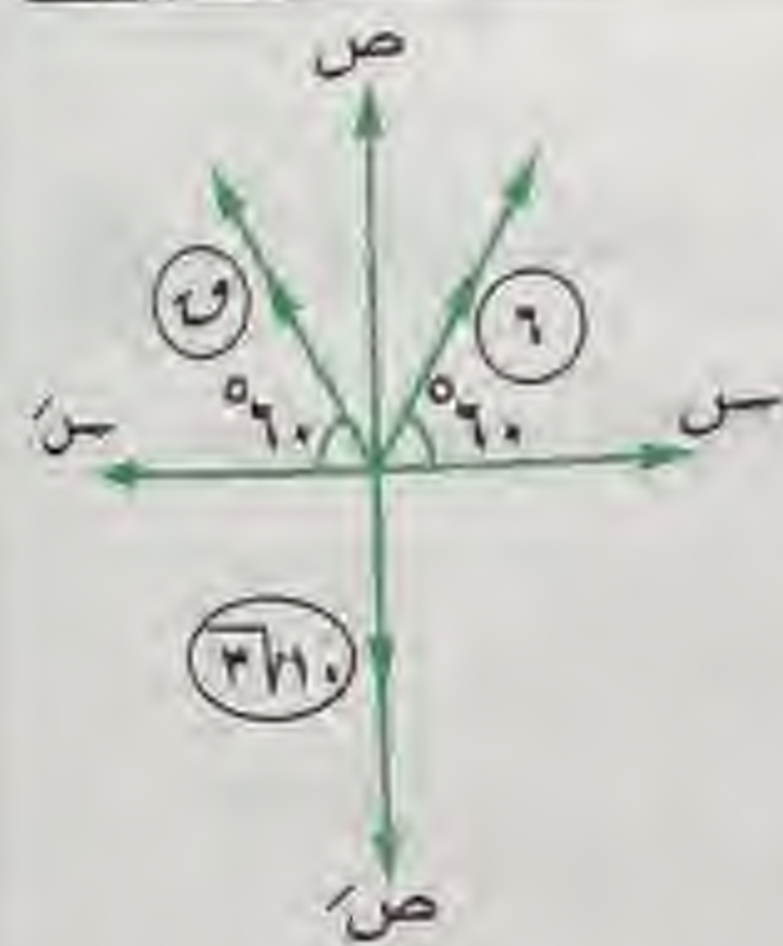
(جـ) ٦　　(د) ٣

٢٤ طول نصف قطر الدائرة : ٢ $س^2$ + ٢ $ص^2$ + ٨ س − ٤ ص − ٨ = صفر

يساوي .... وحدة طول.

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٢

٢٥ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل تؤثر في محور السينات



فإن : ق = ... نيوتن.

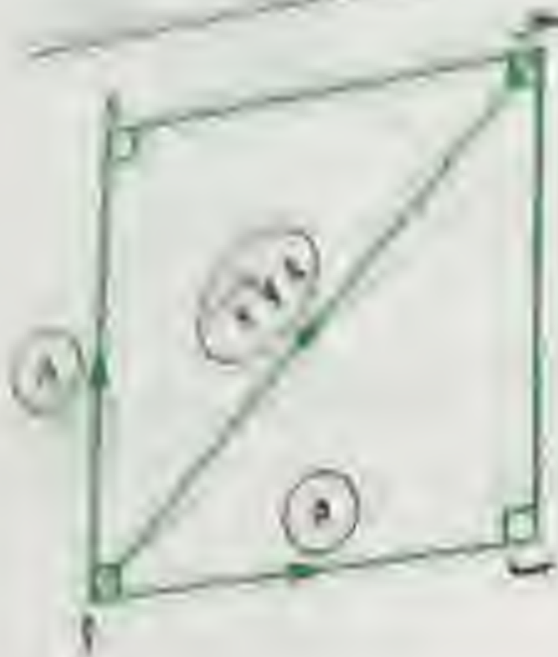
(أ) ١٠　　(ب) ١٤

(جـ) ١٨　　(د) ٦

٢٦ هرم قائم قاعدته معين طولا قطريه ٦ سم، ٤ سم، وارتفاعه ٥ سم.
فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١٠ (ب) ٢٤ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٢٧ أ ب جـ ء مربع أثرت القوى ٥، ٨، ٤ $\sqrt{2}$ نيوتن في الأضلاع $\overleftarrow{أب}$، $\overleftarrow{أء}$، $\overleftarrow{أجـ}$ على الترتيب فإن المحصلة في الصورة القطبية هي (................، ....)



(أ) (٥، ٥٤°) (ب) (١٥، ٦٠°) (جـ) (١٥، ٥٣° ٨َ) (د) (١٣، ٩٠°)

٢٨ سداسي منتظم مرسوم داخل دائرة طول نصف قطرها ٤ سم
فإن مساحته = ... سم^2.

(أ) ٨ $\sqrt{3}$ (ب) ١٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٦ (د) ٢٤ $\sqrt{3}$

٢٩ قوتان مقداراهما ق، ٢ نيوتن. تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٦٠°
إذا كانت محصلتهما ٢ $\sqrt{3}$ نيوتن. فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٢

٣٠ إذا كان المستقيمان : س = −٣ ، س = ٤ يمسان الدائرة م
فإن محيطها = ... سم. حيث $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(أ) ٢٢ (ب) ٤٤ (جـ) ١٢ (د) ١٤

٨ محافظة بورسعيد



إدارة شمال
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ حيث ق$_1$، ق$_2$ مقاسه بالنيوتن فإن : مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{5}$ (جـ) $\sqrt{13}$ (د) ٥

٢ أي ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحد. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

٣ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران في نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما تساوى ....°

(أ) ٩٠ (ب) صفر (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

٤ إذا كان حجم هرم رباعي منتظم ١٢ سم^3 وارتفاعه ٤ سم فإن : طول حرف قاعدته = ... سم.

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٥ فى الشكل الموضح :

ح$_1$ = ...

(أ) ١٢ جتا ٧٥°

(ب) ١٢ جتا ٤٥°

(جـ) ٦ قتا ٤٥°

(د) ٦ قتا ٧٥°

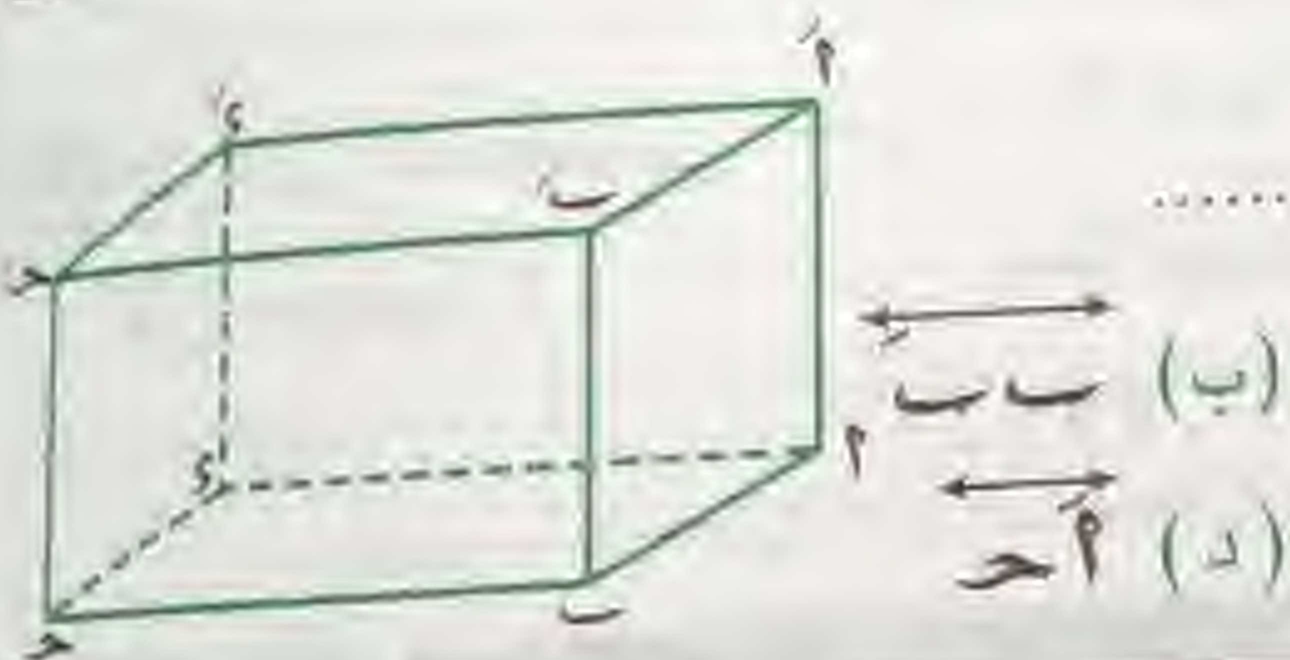


٦ فى الشكل المقابل :

المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ حـ حـَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{}$أ أَ (ب) $\overleftrightarrow{}$ب بَ

(جـ) $\overleftrightarrow{}$حـ حـَ (د) $\overleftrightarrow{}$أَ حـ



٧ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن : ق تساوى .... نيوتن.

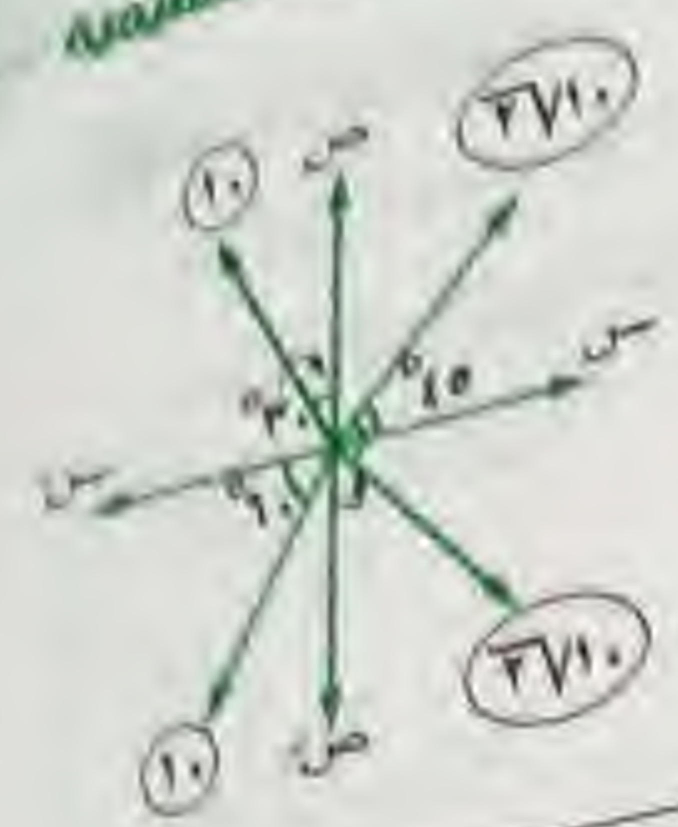
(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٢

٨ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط قائم ٦ سم. وارتفاعه ٨ سم. ، فإن مساحته الجانبية تساوى .... سم^2.

(أ) ٦٠ π (ب) ٢٨ π (جـ) ١٠ π (د) ٤٨ π

٩ في الشكل المقابل :

مقدار محصلة القوى ح = ... نيوتن.



(أ) ٢٠

(ب) $١٠\sqrt{٢}$

(جـ) ١٠

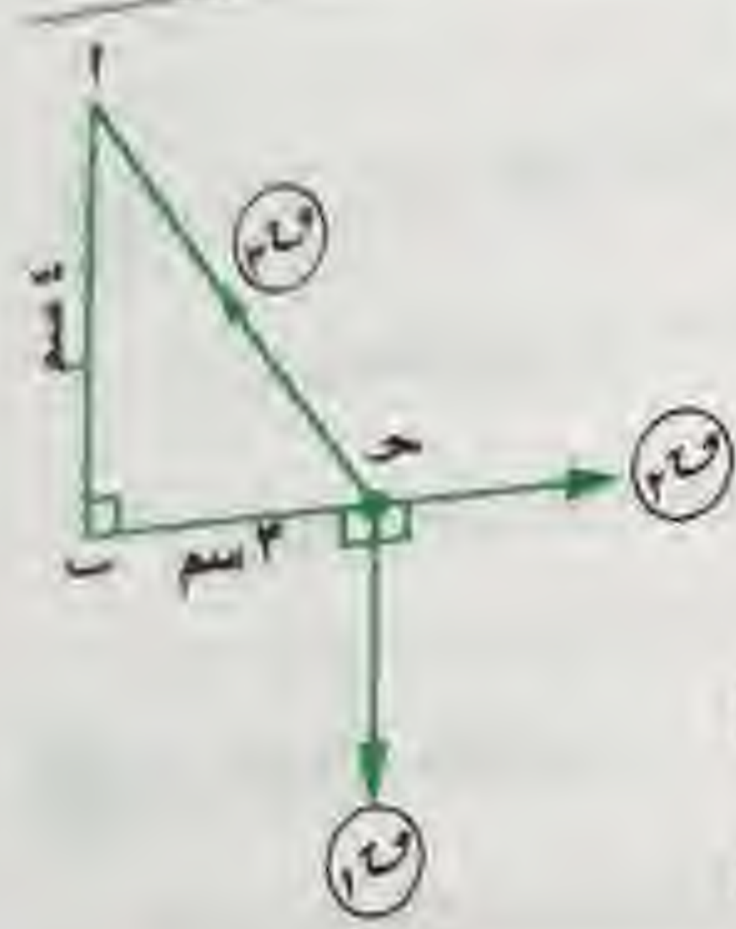
(د) صفر

١٠ مركز الدائرة : $س^2 + ص^2 - ٦ س + ٨ ص$ = صفر هو النقطة ....

(أ) (−٤ ، ٣)　　(ب) (٤ ، −٣)　　(جـ) (−٣ ، ٤)　　(د) (٣ ، −٤)

١١ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد

فإن $ق_1 : ق_2 : ق_3$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥

(ب) ٣ : ٥ : ٤

(جـ) ٤ : ٥ : ٣

(د) ٤ : ٣ : ٥

١٢ محيط الدائرة التى معادلتها : $(س - ٣)^2 + (ص + ٢)^2 = ٢٥$

يساوى .... وحدة طولية.

(أ) ٢ π　　(ب) ٣ π　　(جـ) ١٠ π　　(د) ٢٥ π

١٣ إذا كان : $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ق_3}$ = −١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ وكانت المحصلة $\overrightarrow{ح}$ = ($١٠\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π)

فإن : أ + ب = ...

(أ) −١　　(ب) ١　　(جـ) صفر　　(د) ١٤

١٤ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الوجوه يساوى ١٨ سم

فإن : مساحته الكلية = ... سم²

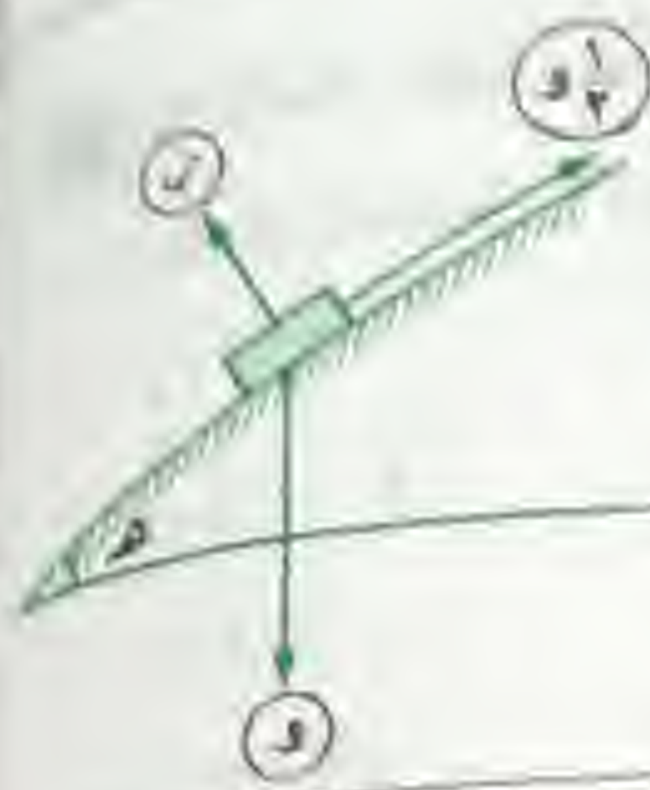
(أ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٤}$　　(ب) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٤}$　　(جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٣}}{٢}$　　(د) $٩\sqrt{٣}$

١٥ في الشكل المقابل :

إذا كان الجسم متزن

تحت تأثير القوى المبينة بالشكل

فإن : ق (∠ هـ) = ...



(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°　　(د) ١٥°

١٦ مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣. ومحيط قاعدته ٦ π سم.

فإن : ارتفاعه يساوي .... سم.

(أ) ٢٧　　(ب) ١٨　　(جـ) ٩　　(د) ٦

١٧ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعي منتظم فإن حجمه ....

(أ) يتضاعف.　　(ب) لا يتغير.

(جـ) يتضاعف ثلاث مرات.　　(د) يتضاعف أربع مرات.

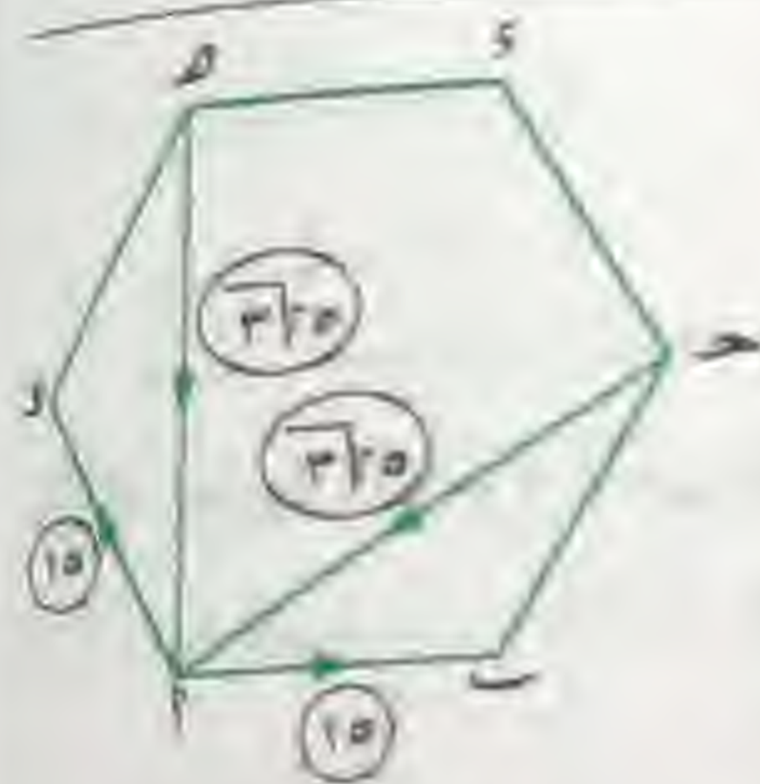
١٨ في الشكل المقابل :

أ ب جـ د هـ و سداسي منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ٥ $\sqrt{3}$ ، ١٥ نيوتن

على الترتيب في الأضلاع $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{جـأ}$ ، $\overrightarrow{هـأ}$ ، $\overrightarrow{أو}$

فإن : مقدار المحصلة ح = ... نيوتن



(أ) ٥　　(ب) ١٠　　(جـ) ٢٥　　(د) صفر

١٩ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية في نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام　　(ب) جيب　　(جـ) ظل　　(د) ظل تمام

٢٠ طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^٢. وطول راسمه ١٠ سم. يساوي .... سم.

(أ) ٦　　(ب) ١٤　　(جـ) ١٦　　(د) -١٦

٢١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين. (ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين. (د) لا يجمعهما مستوى واحد.

٢٢ في الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن في طرف خيط مثبت طرفه الآخر في حائط رأسي وشد الثقل بقوة أفقية مقدارها ق نيوتن حتى أصبح الخيط مائلاً على الحائط بزاوية قياسها θ

فأي الجمل الآتية غير صحيح في وضع الاتزان ....

(أ) ق = و ظا θ (ب) ش = ق + و

(جـ) $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ق} + \overrightarrow{ش}$ = صفر (د) $ش^2 = ق^2 + و^2$

٢٣ إذا كان حجم هرم سداسي منتظم يساوي $٨\sqrt{٣}$ سم^٣، وارتفاعه يساوي ٤ سم.

فإن : محيط قاعدته = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ١٢ (جـ) ٦ (د) $٦\sqrt{٣}$

٢٤ قوة مقدارها $٥\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثر في اتجاه ٣٠° شرق الشمال حللت إلى مركبتين متعامدتين

فإن : مقدار المركبة في اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $٧\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ (د) ١٥

٢٥ معادلة الدائرة التي تمس المحورين ومركزها النقطة (-٤ ، ٤) هي ....

(أ) $س^2 + ص^2 + ٨ س - ٨ ص + ١٦ = ٠$

(ب) $س^2 + ص^2 = ١٦$

(جـ) $س^2 + ص^2 - ٨ س + ٨ ص + ١٦ = ٠$

(د) $س^2 + ص^2 = ٨$

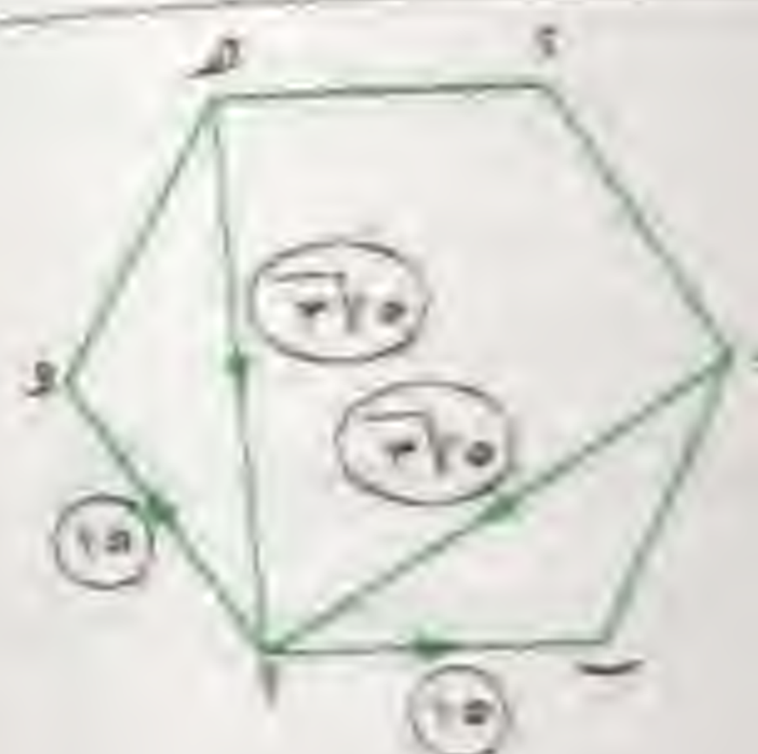
٢٦ قوتان متساويتان في المقدار وقياس الزاوية بينهما يساوي ٩٠° ومقدار محصلتهما ٨ نيوتن فإن مقدار كل منهما يساوي .... نيوتن.

(أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) $٤\sqrt{٢}$ (د) ٨



(د) ٦

ـبع مرات.



(د) صفر

.... الزاوية

(د) ظل تمام

. وطول راسمه

(د) -١٦

٢٧ هرم منتظم حجمه ١٢ سم^3 ومساحة قاعدته ٤ سم^2 فإن ارتفاعه يساوى .... سم

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢

٢٨ أقل عدد من المستويات التي تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات. (جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

٢٩ فى الشكل المقابل :



إذا وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°
وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية $\overrightarrow{ق}$
فإن مقدار القوة الأفقية + مقدار رد الفعل = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) ٦ $\sqrt{3}$ (جـ) ١٨ (د) ٢٤

٣٠ فى الشكل المقابل :



$\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{2}$ سم، مثبت طرفه الآخر عند حـ على الحائط فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد الفعل المفصل على القضيب ....

(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبتعد عن الحائط مسافة ١٠ سم.

(جـ) ينصف $\overline{ب حـ}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

٩ محافظة كفر الشيخ

إدارة مطوبس
توجيه الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية : (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت : $\overrightarrow{ق_1} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$

فإن مقدار محصلتهما .... وحدة قوة.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٢ أى أربع نقط ليست فى مستوى واحد تعين ....

(أ) مستوى. (ب) مستويان. (جـ) ثلاثة مستويات. (د) أربعة مستويات.

٣ قوتان متساويتان فى المقدار تؤثران فى نقطة والزاوية بينهما $\frac{\pi}{2}$ ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن مقدار كلاً منهما .... نيوتن.

(أ) $2\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{2}$ (جـ) $3\sqrt{2}$ (د) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

٤ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيم ونقطة خارجة. (ب) مستقيمين متخالفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متوازيين.

٥ إذا وضع جسم وزنه «و» نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى .... نيوتن.

(أ) و جتا هـ (ب) و ظا هـ (جـ) و جا هـ (د) و

٦ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم، وارتفاعه ١٠ سم، فإن حجمه = ... سم^{3}

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

٧ فى الشكل المقابل :



$ق_1$ = ... وحدة قوة.

(أ) ٢ جا ٧٥ (ب) ١٢ جا ٤٥

(جـ) ٦ قا ٤٥ (د) ٦ قتا ٧٥

٨ محيط الدائرة $(س - ٣)^{2} + (ص - ٢)^{2} = ٢٥$ هو ....

(أ) ٥ π (ب) ٣ π (جـ) ١٠ π (د) ٢٥ π

٩ إذا كانت $\overrightarrow{ق}$ تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٧ (ب) ٢٢ (جـ) ١٧ (د) ١٩

...ساوى ....

سم. (د) ٢

(د) ٥ مستويات



(د) ٢٤



سم.



١٠ هرم ثلاثى منتظم الوجوه مساحته ٩ $\sqrt{3}$ فإن طول حرفه ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) $\sqrt{3}$٣

١١ إذا بلغت محصلة قوتان تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بينهما ....

(أ) صفر (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٨٠

١٢ قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ∈] ٠ ، π[ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) $\sqrt{2}$٢

١٣ عدد الدوائر التى تمس محورى الإحداثيات وتقع مراكزها على الدائرة : $س^2 + ص^2 = ٢٥$ هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

١٤ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم. وطول راسمه ٢٥ سم.

فإن حجمه هو .... $سم^3$. حيث $\left(\pi = \frac{٢٢}{٧}\right)$

(أ) ١٢٣٢ (ب) ١٧٦ (جـ) ٥٢٤ (د) ٦٧١

١٥ القيمة العظمى والصغرى على الترتيب لمحصلة قوتين ٨ ، ١٣ نيوتن هى .... نيوتن

(أ) ١٢ ، ٨ (ب) ١٣ ، ٥ (جـ) ٢١ ، ٨ (د) ٢١ ، ٥

١٦ المساحة الجانبية لمخروط قائم ارتفاعه ٨ سم ، نق = ٦ سم. هى .... $سم^2$.

(أ) ١٠ π (ب) ٨ π (جـ) ٦٠ π (د) ١٤ π

١٧ إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة

فإن كل قوة تتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب (ب) جيب تمام (جـ) ظل (د) ظل التمام

١٨ معادلة الدائرة التى مركزها (٤ ، ٣) وتمس محور السينات هى ....

(أ) $(س - ٣)^2 + (ص - ٤)^2 = ١٦$ (ب) $(س - ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$

(جـ) $(س + ٣)^2 + (ص + ٤)^2 = ٩$ (د) $(س + ٣)^2 + (ص - ٤)^2 = ١٦$

قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٣ ق فإذا كانت القيمة العظمى لمحصلتهما ٤٠ نيوتن فإن القيمة الصغرى لمحصلتهما .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٥ (د) صفر

طول نصف قطر قاعدة مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^2 وطول راسمه ٣٠ سم هو .... سم.

(أ) ٤٤ (ب) ١٤ (جـ) ٣٠ (د) ٣٤

إذا كانت : $\overleftarrow{ق_1}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ = −١٤ $\overleftarrow{س}$ + ب $\overleftarrow{ص}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ، $\overleftarrow{ح}$ = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π)

فإن : (أ ، ب) = ...

(أ) (−١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (−١ ، ٢) (د) (١ ، −١)

---

٢١ غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط قاعدته ٨٨ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته ≃ .... سم^2. (π = $\frac{٢٢}{٧}$)

(أ) ٨٨ (ب) ٥٩٦ (جـ) ١٠٧٤ (د) ١٠٤٧

---

٢٢ علق ثقل مقداره ١٠٠ نيوتن بخيطين طوليهما ٣٠ سم ، ٤٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ٥٠ سم فإن مجموع مقدارى الشد فى الخيطين = ... نيوتن.

(أ) ٦٠ (ب) ٨٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٤٠

---

٢٣ معادلة الدائرة التى هى صورة الدائرة : س^2 + ص^2 − ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = ٠ بالانتقال (س + ٢ ، ص − ٢) هى ....

(أ) (س + ٨)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥

(ب) (س − ٨)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥

(جـ) (س − ٨)^2 + (س − ٥)^2 = ٢٥

(د) (س + ٥)^2 + (ص − ٨)^2 = ٢٥

---

٢٤ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين.

(ب) غير منطبقين.

(جـ) لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) يقعان فى مستوى واحد.

٢٦ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل عند أ ويتزن أفقيًا بخيط طرفاه عند ب ، حـ أعلى أ على الحائط ، أ حـ = ٤٠ سم. فإن مقدار الشد فى الخيط = ... نيوتن.

(أ) ٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ١٥ (د) ١٥ $\sqrt{٢}$

٢٧ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٨٠ سم^{٣} وطول ضلع قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه ....

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٥

٢٨ ثلاث قوى متساوية المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين ....

(أ) °٦٠ (ب) °٩٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٥٠

٢٩ النقطة التى تقع على الدائرة $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٠) (د) (٤ ، ٣)

٣٠ ثلاث قوى ليست على استقامة واحدة متزنة متلاقية فى نقطة مقاديرها ٣ ، ٧ ، ق فإن ق يمكن أن تساوى ....

(أ) صفر (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) ٤

١٠ محافظة الأقصر

إدارة الطود والقرنة
توجيه الرياضيات



أجب عن الأسئلة الآتية :

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٣ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٥ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) °٦٠ (ب) صفر° (جـ) °٢٠ (د) °١٨٠

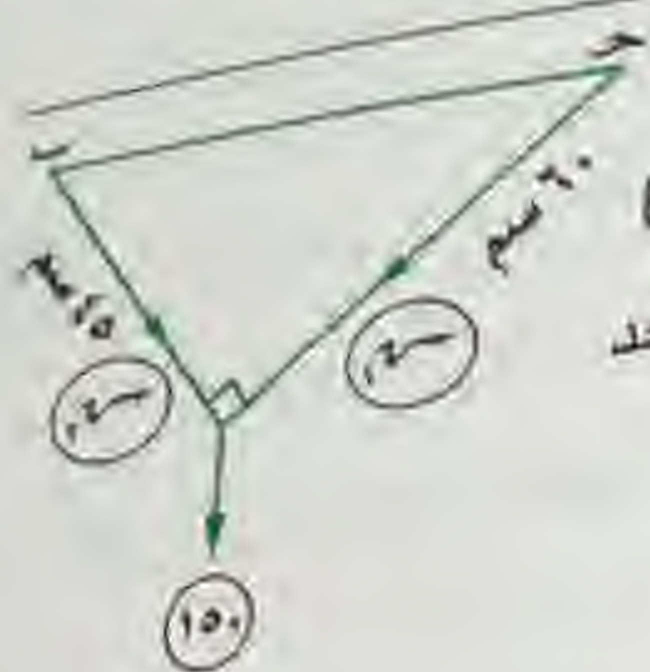
٢ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق محصلتهما تكون عمودية على إحداهما فإن : ح = ...

(أ) $\sqrt{٥}$ ق (ب) $\sqrt{٣}$ ق (جـ) ٣ ق (د) ق

٣ إذا أثرت القوى $\overline{ق_١} = ٤ \overline{س} + ٥ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٢} = ا \overline{س} - ٧ \overline{ص}$ ، $\overline{ق_٣} = ٣ \overline{س} + ب \overline{ص}$ في نقطة مادية وكانت القوى متزنة فإن : ا + ٢ ب = ...

(ا) −٥ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) −٣

٤ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٥٠ ث.جم متزن بربطه بخيطين متعامدين طولاهما ٦٠ سم ، ٤٥ سم وطرفا الخيطين حـ ، ب على خط أفقي واحد

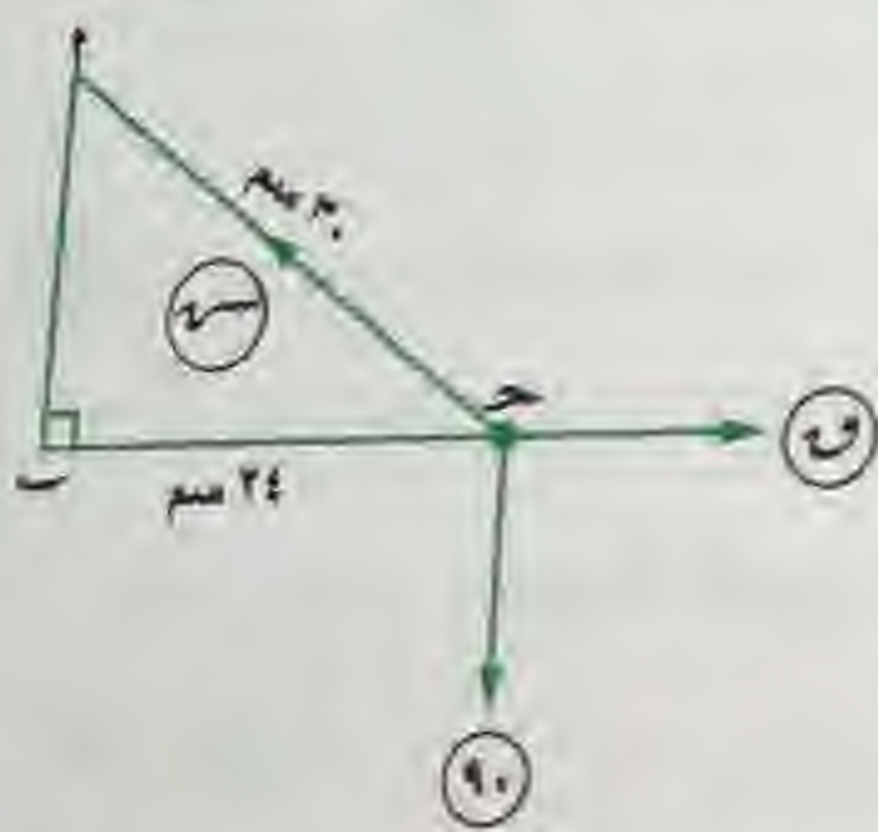
فإن : $ش_٢ - ش_١$ = ... ث.جم

(ا) ١٢٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٥ ثلاثة قوى متساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة متزنة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين = ...

(ا) °٦٠ (ب) °٩٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٥٠

٦ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ٩٠ ث.جم ، على بعد ٢٤ سم.

من الحائط وطول الخيط ٣٠ سم.

فإن : ش − ق = ... ث.جم.

(ا) ١٥٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٥٠ (د) ٣٠

٧ ا ب حـ ء شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من ا ، ء فيه :

اء = حـ ء = ٤٠ سم ، ا ب = ٧٠ سم ، م $\in \overline{اب}$ حيث ا م = ٤٠ سم أثرت القوى ٢٥ ، ق ، ١٠ $\sqrt{٢}$ ، ٣٥ ث.جم في $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ م}$ ، $\overrightarrow{حـ ا}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى يساوي ٥٠ ث.جم فإن : قيمة ق = ... ث.جم

(ا) ١٠ (ب) ٥٠ (جـ) ٢٠ (د) ٣٠

٨ قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران في نقطة واحدة وقياس الزاوية بينهما °١٢٠ فأي قيم ق التالية تجعل المحصلة أصغر ما يمكن ؟

(ا) ١ نيوتن. (ب) ٢ نيوتن. (جـ) ٣ نيوتن. (د) ٤ نيوتن.

...يوتن متصل بمفصل عند ا ويتزن أفقيًا
... ا حـ = ٤٠ سم، فإن مقدار الشد في

(د) ١٥ $\sqrt{٢}$ ... ١٥

... قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه ....

(د) ١٥ ... ٣٠

... قياس الزاوية بين أي قوتين ....

(د) °١٥٠ ... °١٢٠

... ١٢ هي ....

(د) (٤ ، ٣) ... (٠ ، ...

... نقطة مقاديرها ٣ ، ٧ ، ق

(د) ٤



...ه الطرد والقرنة
...جيه الرياضيات

... محصلتهما ٥ ق فيكون قياس

(د) °١٨٠

...هما فإن : ع = ...

(د) ق

٩ أى مجموعات القوى التى مقاديرها كالتالى لا يمكن أن تكون متزنة

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن.
(ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن
(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن.
(د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن

١٠ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٠
وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.
فإن مقدار القوة الأفقية = ... نيوتن.

(أ) ١٠٠
(ب) ٥٠
(جـ) $\frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$
(د) ١٥٠

١١ قوتان مقداراهما ق ، $\sqrt{٣}$ ق نيوتن متلاقيتان فى نقطة وكان مقدار محصلتهما ح
عندما كان قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبح مقدار محصلتهما $ح_٢$ عندما كان قياس
الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) $ح_١ = ح_٢$
(ب) $ح_١ = ٢ ح_٢$
(جـ) $ح_١ = \frac{٣}{٥} ح_٢$
(د) $ح_١ = \frac{١}{٢} ح_٢$

١٢ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٥ $\sqrt{٢}$ ، ك نيوتن فى نقطة مادية فى اتجاهات
الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى ، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب.
وكان مقدار محصلة القوى = ٢ نيوتن فى اتجاه الشمال فإن : ق - ك = ...

(أ) ١٢
(ب) ٢٧
(جـ) ٦
(د) ١٣

١٣ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق - ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية.
مقدار محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{٥}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٢
(ب) ٣
(جـ) ٤
(د) ٥

١٤ ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شدت جانبًا بقوة أفقية تؤثر فى طرفها
الآخر وتساوى نصف ثقل الساق. فإن قياس زاوية ميل الساق على الرأسى
عندما تتزن = ...

(أ) ٦٠°
(ب) ٤٥°
(جـ) ٣٠°
(د) ٩٠°

١٥ كرة ملساء من الحديد وزنها و ث.كجم مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإذا اتزنت الكرة فإن مجموع مقدارى الضغط على كل من الحائط والمستوى المائل = ... ث.كجم.

(أ) $\frac{٤}{٣}$ و (ب) $\frac{٥}{٣}$ و (جـ) ٣ و (د) $\frac{١}{٣}$ و

١٦ عدد المستويات التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) عدد لا نهائى.

١٧ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^٣

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

١٨ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦ سم فإن مساحة قاعدته .... سم^٢

(أ) ٢٥ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠ π (د) ٥٠ π

١٩ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها (نق) يساوى حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته نق وارتفاعه ع فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٥}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق^٢ (د) ع = ٤ نق

٢٠ الدائرة التى معادلتها (س − أ)^٢ + (ص − ب)^٢ = ب^٢ حيث أ ≠ ب ....

(أ) تمس محور السينات. (ب) تمس محور الصادات.

(جـ) تمس المحورين. (د) لا تمس أى من المحورين.

٢١ طول قوس القطاع الدائرى الذى إذا طويناه أصبح مخروطًا دائريًا قائمًا حجمه ٤٩ π سم^٣ وارتفاعه ٣ سم يساوى .... سم

(أ) ٢ π (ب) ٤ π (جـ) ٨ π (د) ١٤ π

٢٢ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط دائرى قائم يمكن وضعه داخل الهرم يساوى ....

(أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ (جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

٢٣ إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثى منتظم الأوجه يساوى ١٨ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

(أ) $٩\sqrt{٢}$　(ب) $\frac{٩\sqrt{٢}}{٤}$　(جـ) $\frac{٢٧\sqrt{٢}}{٥}$　(د) $٩\sqrt{٣}$

---

٢٤ معادلة الدائرة التى مركزها (١ ، ٢) وتمس المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٩ = ٠ هى ....

(أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٤ ص = ١٦$　(ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص = ١١$

(جـ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س + ٤ ص - ١٦ = ٠$　(د) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٤ ص = ١١$

---

٢٥ الدائرتان $(س + ٢)^{٢} = ١ - ص^{٢}$ ، $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س - ٨ ص - ١٩ = ٠$

تكونان ....

(أ) متقاطعتين.　(ب) متماستين من الداخل.

(جـ) متباعدتين.　(د) متماستين من الخارج.

---

٢٦ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه (ل) دار دورة كاملة حول ب حـ كمحور للدوران فإن حجم الجسم الناشئ من الدوران بدلالة π ، ل هو ....

(أ) $\frac{\pi ل}{٤}$　(ب) $\frac{\pi}{٤} ل^{٣}$　(جـ) $\frac{\pi ل^{٣}}{٤}$　(د) $\sqrt{٣} \pi ل^{٣}$

---

٢٧ هرم رباعى قائم قاعدته معين طول ضلعه يساوى أحد قطرى المعين = ٦ سم فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = ... سم^{٣}

(أ) $٧٢\sqrt{٣}$　(ب) $١٦\sqrt{٣}$　(جـ) ١٤٤　(د) ٧٢

---

٢٨ هرم سداسى منتظم حجمه $٨\sqrt{٣}$ سم^{٣} وارتفاعه ٤ سم

فإن محيط قاعدته = ... سم

(أ) ١٢　(ب) ٢٤　(جـ) ٣٦　(د) ٤٨

---

٢٩ مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلعًا وتمر برؤوسه الدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} - ١٦ = ٠$ هى .... وحدة مربعة.

(أ) ٢٤　(ب) ٣٦　(جـ) ٤٨　(د) ٧٢

---

٣٠ طول القطعة المماسة للدائرة : $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$

من النقطة (٠ ، ٢ نق) = ... وحدة طول

(أ) نق　(ب) ٢ نق　(جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق　(د) $\sqrt{٣}$ نق

الإجابات

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الاستاتيكا

الاختبـار الأول

1 ① (د) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)

2 ق = ٨ نيوتن / قياس زاوية ميل المحصلة على ق = ٣٠°

3 ق = ٨ نيوتن

الاختبـار الثانى

1 ① (أ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (د)

2 ق = ٤ $\sqrt{٢}$ نيوتن ، ح = ٤ نيوتن

3 ٥٠ ، ٥٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

الاختبـار الثالث

1 ① (ب) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (جـ)

2 ح = ١٦,١٥ ث.كجم ، هـ = ٩٩,٢٠°

3 ٢٢ ، ١٠ ث.كجم ، ح = ٢ $\sqrt{٢٠١}$ ث.كجم

الاختبـار الرابع

1 ① (هـ) ② (د) ③ (ب) ④ (أ)

2 ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

3 أ = -١٠ ، ب = ١

الاختبـار الخامس

1 ١٣٠° ، الكيت يلفسك.

2 [illegible]

3 $ـــ = \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم ، س = $\frac{١٠\sqrt{٢}}{٣}$ ث.جم

4 ٩ $\sqrt{٧}$ نيوتن ، $\sqrt{٧}$ نيوتن.

إرشادات الاختبارات التراكمية القصيرة فى الهندسة والقياس

الاختبـار الأول

1 ① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (د)

2 ① المستويان أ ب جـ ء ، أ ب جـ ءَ

(يوجد إجابات أخرى)

② المستويان أ ب جـ ء ، أ ب ب َ أ َ

(يوجد إجابات أخرى)

③ المستقيمان $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{ب َ جـ َ}$

(يوجد إجابات أخرى)

④ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، المستوى أ ب َ جـ َ ءَ

(يوجد إجابات أخرى)

⑤ $\overleftrightarrow{أ ب}$

الاختبـار الثانى

1 ① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د)

2 ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم^{٢}

② الحجم = $\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

3 المساحة الكلية = ٥٧٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

الاختبـار الثالث

1 ① (أ) ② (أ) ③ (د) ④ (د)

---

2 ارتفاعه الجانبي = ١٥ سم

المساحة الجانبية = ٥٤٠ سم^{٢}

3 ١٤ سم

الاختبـار الرابع

1 ① (أ) ② (جـ) ③ (أ) ④ (د)

2 س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س - ١٠ ص - ٥ = ٠

3 ① المساحة الكلية = ٩٦ π سم^{٢}

② الحجم = ٩٦ π سم^{٣}

٤ $100\sqrt{3}$ ث.جم ، $100\sqrt{3}$ ث.جم

٥ أ = −١ ، ب = ١

الاختبار الخامس

١ ١٣٥° ، أثبت بنفسك.

٢ ع = ٤ $\sqrt{2}$ نيوتن وتعمل في اتجاه $\overrightarrow{أ ح}$

٢ ① المساحة الجانبية = ٨٠٠ سم^2

② الحجم = $\frac{4000\sqrt{3}}{3}$ سم^3

٣ المساحة الكلية = $576\sqrt{3}$ سم^2

الاختبار الثالث

١ ①(أ) ②(أ) ③(د) ④(د)

---

١ ①(أ) ②(د) ③(د) ④(ب)

٢

(أ) أ = −١ ، ب = ١

(ب) $100\sqrt{3}$ ث.جم ، $100\sqrt{3}$ ث.جم

٣

(أ) س^2 + ص^2 − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

(ب) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ث.جم

(ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم

٥

(أ) ع = $\sqrt{651}$ نيوتن ، هـ ≈ ٩ ،٤°

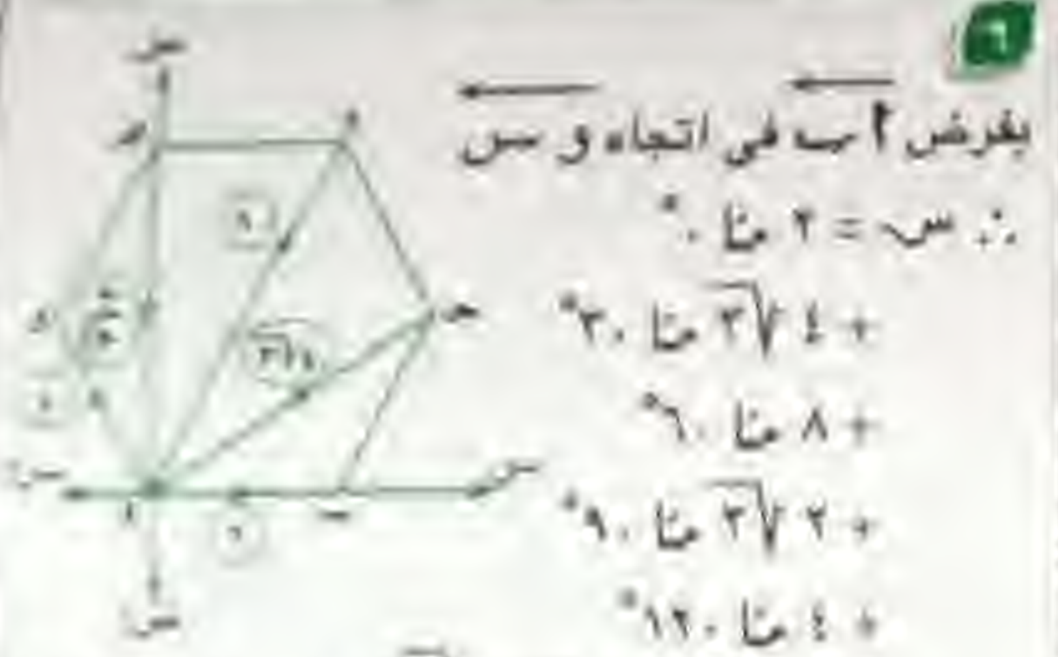
(ب) $15\sqrt{2}$ ، $15\sqrt{2}$ نيوتن.

النموذج الأول

١ (ب) **٢** (ج) **٣** (أ)

٤ (ج) **٥** (د)

٦



بفرض $\overrightarrow{أ ب}$ في اتجاه $\overrightarrow{و س}$

∴ س = ٢ جتا ٠°

+ $4\sqrt{3}$ جتا ٣٠°

+ ٨ جتا ٦٠°

+ $2\sqrt{3}$ جتا ٩٠°

+ ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ × ١ + $4\sqrt{3}$ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + ٨ × $\frac{1}{2}$ + $2\sqrt{3}$ × صفر + ٤ × $\frac{-1}{2}$ = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + $4\sqrt{3}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠°

+ $2\sqrt{3}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠° = ٢ × صفر

+ $4\sqrt{3}$ × $\frac{1}{2}$ + ٨ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $2\sqrt{3}$ ×

+ ٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = $10\sqrt{3}$

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ١٠ $\overrightarrow{س}$ + $10\sqrt{3}$ $\overrightarrow{ص}$

∴ ع = $\sqrt{(10)^2 + (10\sqrt{3})^2}$ = ٢٠ ث.كجم

، ظا هـ = $\frac{10\sqrt{3}}{10}$ = $\sqrt{3}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة = ٢٠ ث.كجم وتصنع زاوية قياسها ٦٠° مع $\overrightarrow{و س}$

٧ (د)

٨

① مساحة القاعدة = π نق^2



النموذج الثاني

١ (أ) ٢ (ب) ٣ (أ)

٤ (ب) ٥ (د)

٦

ح١ = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ = ١٢

∴ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ = ٦ (١)

، ح٢ = ٢ ق جتا $\left(\frac{١٨٠° - ى}{٢}\right)$ = ٦

∴ ق جا $\frac{ى}{٢}$ = ٣ (٢)

بتربيع المعادلتين وجمعهما :

∴ ق² جتا² $\frac{ى}{٢}$ + ق² جا² $\frac{ى}{٢}$ = ٦² + ٣²

∴ ق² (جتا² $\frac{ى}{٢}$ + جا² $\frac{ى}{٢}$) = ٤٥

∴ ق² = ٤٥

∴ ق = $\sqrt{٤٥}$ = ٣ $\sqrt{٥}$ ثقل.كجم.

٧ (جـ) ٨ (أ) ٩ (د)

١٠ (جـ) ١١ (ب)

١٢

① في Δ م ن هـ :

م ن = $\sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢}$

= ١٥ سم

∴ الارتفاع = ١٥ سم

② المساحة الجانبية

= $\frac{١}{٢}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٤٠ × ٢٥) = ٢٠٠٠ سم²

③ المساحة الكلية = ٢٠٠٠ + (٤٠)² = ٣٦٠٠ سم²

١٣ (د) ١٤ (جـ) ١٥ (جـ)

١٦

طول القوس أب

= م ب × θ^ء

= ٣٦ × $\frac{٢١٠}{١٨٠}$ π

= ٤٢ π سم

∵ محيط قاعدة المخروط = ٤٢ π

∴ ٢ π نق = ٤٢ π

∴ نق = ٢١

∴ ع = $\sqrt{(٣٦)^٢ - (٢١)^٢}$

= ٣ $\sqrt{٩٥}$ سم ≃ ٢٩,٢ سم

١٧ (أ) ١٨ (أ) ١٩ (ب)

٢٠ (أ) ٢١ (جـ) ٢٢ (ب)

٢٣ (أ) ٢٤ (أ)

النموذج الثالث

١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (ب)

٥

∵ (٦٠)² + (٨٠)² = (١٠٠)²

∴ Δ أ حـ ب قائم

الزاوية في حـ

، باستخدام قاعدة لامي :

$\frac{٢٠٠}{جا ٩٠°} = \frac{ش_١}{جا هـ} = \frac{ش_٢}{جا هـ}$

∴ ٢٠٠/١ = ش١/($\frac{٤}{٥}$) = ش٢/($\frac{٣}{٥}$)

∴ ش١ = ٢٠٠ × $\frac{٤}{٥}$ = ١٦٠ ث جم

، ش٢ = ٢٠٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٢٠ ث جم

٦ (د) ٧ (جـ) ٨ (جـ)

٩ (ب)

١٠

بفرض أن :

و س هو اتجاه القوة الأولى

س = ٨ جتا صفر°

+ ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٦ $\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠°

+ ١٤ جتا ٢٤٠°

= ٨ × ١ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٦ $\sqrt{٣}$ × ($\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$)

+ ١٤ × ($\frac{-١}{٢}$) = -٢

، ص = ٨ جا صفر + ٤ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٦ $\sqrt{٣}$ جا ١٥٠°

+ ١٤ جا ٢٤٠° = ٨ × صفر + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$

+ ٦ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ١٤ × ($\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$) = -٢ $\sqrt{٣}$

∴ ح = -٢ س - ٢ $\sqrt{٣}$ ص

∴ ح = $\sqrt{(-٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-٢\sqrt{٣}}{-٢}$ = $\sqrt{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢٤٠°

∴ مقدار المحصلة = ٤ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع و س

١١ (أ) ١٢ (د) ١٣ (د)

١٤

∵ مركز الدائرة الأولى م١ (١ ، -٣)

، الدائرة الثانية

س² + ص² - ٢ س + ٦ ص + $\frac{١٥}{٤}$ = ٠

∴ مركز الدائرة الثانية م٢ = (١ ، -٣)

∴ الدائرتان لهما نفس المركز

∴ الدائرتان متحدتا المركز

نق١ = $\sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - ١}$ = ٣ وحدة طول

نق٢ = $\sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - \frac{١٥}{٤}}$ = $\frac{٥}{٢}$ وحدة طول

١٥ (ب) ١٦ (د) ١٧ (د)

٢٠ (د) ٢١ (أ) ٢٢ (جـ)

٢٣ (ب) ٢٤ (ب)

النموذج الرابع

١ (د) ٢ (ب) ٣ (جـ)

٤

من هندسة الشكل

حـ هـ = ٢ $\sqrt{١٠}$ سم

∵ القوى متزنة

∴ س = صفر

، ص = صفر

∴ ق جتا صفر + ٤ جتا هـ - ٦ $\sqrt{١٠}$ جتا ى

- ك جتا ٩٠° = صفر

= صفر

= $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{1}{2}$ × (٤ × ٤٠ × ٢٥) = ٢٠٠٠ سم^2

③ المساحة الكلية = ٢٠٠٠ + (٤٠)^2 = ٣٦٠٠ سم^2

④ الحجم = $\frac{1}{3}$ × (٤٠)^2 × ١٥ = ٨٠٠٠ سم^3

، باستخدام قاعدة لامي

∴ مقدار المحصلة = ٤ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع و س

∴ ك = ١٥ نيوتن.

٥ (د) ٦ (د)

٧

طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٦ وحدات

، ارتفاعه = ٨ وحدات.

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × π (٦)^2 × ٨

= ٩٦ π وحدة مكعبة.

، طول الراسم = $\sqrt{(٦)^2 + (٨)^2}$ = ١٠ وحدات.

∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٦ (١٠ + ٦)

= ٩٦ π وحدة مربعة.

٨ (د) ٩ (ب) ١٠ (د)

١١ (أ) ١٢ (أ)

١٣

نفرض أن المركز (س ، ٠) ∈ محور السينات.

∴ المركز يقع على أبعاد متساوية من (١ ، ٣) ، (٢ ، -٤)

∴ المركز = (٥ ، ٠)

∴ معادلة الدائرة هي (س - ٥)^2 + ص^2 = ٢٥

٢٣ (د) ٢٤ (د)

النموذج الخامس

١ (د) ٢ (أ) ٣ (د)

٤ (ب) ٥ (جـ)

٦

∵ المساحة الكلية

= π نق (ل + نق)

∴ ٩٦ π = π × نق × (١٠ + نق)

∴ ٩٦ = نق × (١٠ + نق)

∴ نق^2 + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ نق = −١٦ (مرفوض) أ، نق = ٦ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$ = ٨ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π (٦)^2 × ٨ = ٩٦ π سم^3

٧

من الشكل:

Δ أ ب جـ يمثل مثلث القوى

ب جـ = $\sqrt{(٢٠)^2 - (١٠)^2}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ش = ٢٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم

ر = ١٠ $\sqrt{٣}$ ث كجم.

٨ (ب)

١٠

اعتبر جـ ب ، جـ ء هو المحوران و س ، و ص

∴ س = ٢ جتا صفر°

+ ٧ $\sqrt{٥}$ جتا θ

+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٤ جتا ٩٠°

= ٢ + ٧ $\sqrt{٥}$ × $\frac{١٠}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

+ صفر = ٢٠ نيوتن.

، ص = ٢ جا صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ جا θ + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ٤ جا ٩٠° = صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ × $\frac{٥}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$

× $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ = ١٥ نيوتن.

∴ ح = $\sqrt{(٢٠)^2 + (١٥)^2}$ = ٢٥ نيوتن.

، طا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٥}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ θ = ٣٦° ٥٢َ مع القوى الأولى.

١١ (ب) ١٢ (د) ١٣ (ب)

١٤ (ب) ١٥ (جـ) ١٦ (ب)

١٧ (د) ١٨ (ب)

١٩ (جـ) ٢٠ (جـ) ٢١ (ب)

٢٢ (د) ٢٣ (ب) ٢٤ (ب)

النموذج السادس

١ (ب) ٢ (ب) ٣ (ب)

٤ (ب) ٥ (جـ)

٦ (ب) ٧ (أ)

∴ ش$_١$ = ٩٠ ث كجم ، ش$_٢$ = ١٢٠ ث كجم

٩ (ب)

١٠

∵ حجم الهرم = ١٢٩٦

∴ ع = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبي = ١٥ سم

$\therefore$ ٤٢ = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$ = ٨ سم

$\therefore$ حجم الجسم الناتج = ٢ ($\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع)

= ٢ × $\frac{١}{٣}$ × π × $(٨)^2$ × ٦

= ٢٥٦ π سم^3

١٧ (أ) ١٨ (ج) ١٩ (ج) ٢٠ (د)

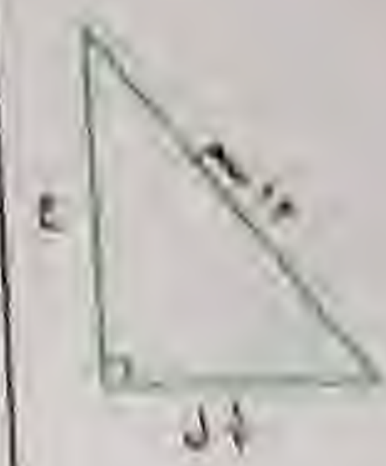
٢١ (أ) ٢٢ (ب) ٢٣ (ج) ٢٤ (ج)

النموذج السابع

١ (ج) ٢ (أ) ٣ (أ) ٤ (ب)

٥ (ج) ٦ (ب) ٧ (أ)

٨



$\because$ المساحة الجانبية = ٢٤٠

$\therefore$ $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبي = ٢٤٠

وبفرض طول ضلع القاعدة = ل سم

$\therefore$ $\frac{١}{٢}$ × ٤ ل × ١٢ = ٢٤٠

$\therefore$ ل = ١٠ سم

$\therefore$ ع = $\sqrt{(١٢)^2 - (٥)^2}$ = $\sqrt{١١٩}$ سم

، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $(١٠)^2$ × $\sqrt{١١٩}$

= $\frac{١٠٠}{٣}$ $\sqrt{١١٩}$ ≈ ٣٦٣,٦ سم^3

٩ (ج)

١٠



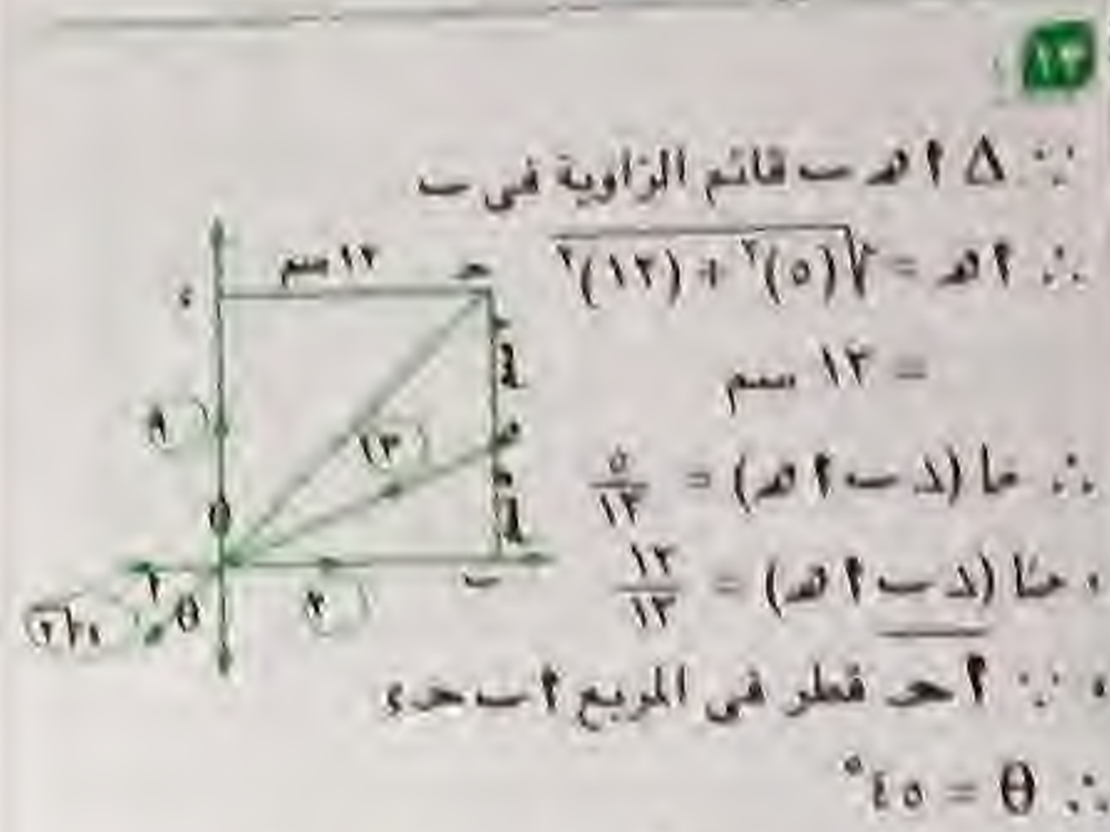
$\therefore$ $\frac{ق_١}{جا ١٥٠°}$ = $\frac{ق_٢}{جا ٩٠°}$ = $\frac{٤٠٠}{جا ١٢٠°}$

$\therefore$ $ق_١$ = $\frac{٤٠٠ × جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°}$ = $\frac{٤٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم.

$\therefore$ $ق_٢$ = $\frac{٤٠٠ × جا ٩٠°}{جا ١٢٠°}$ = $\frac{٨٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم.

١١ (د) ١٢ (ب)

١٣



$\because$ Δ أ هـ ب قائم الزاوية في ب

$\therefore$ أ هـ = $\sqrt{(٥)^2 + (١٢)^2}$

= ١٣ سم

$\therefore$ جا (د ب أ هـ) = $\frac{٥}{١٣}$

، جتا (د ب أ هـ) = $\frac{١٢}{١٣}$

، $\because$ أ حـ قطر في المربع أ ب حـ ء

$\therefore$ θ = ٤٥°

$\therefore$ س = ٢ جتا صفر° + ١٣ جتا (د ب أ هـ)

+ ٩ جتا ٩٠° + ٤$\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ٩ × صفر

+ ٤$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠

، ص = ٢ جا صفر° + ١٣ جا (د ب أ هـ)

+ ٩ جا ٩٠° + ٤$\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥°

= ٢ × صفر + ١٣ × $\frac{٥}{١٣}$ + ٩ × ١

+ ٤$\sqrt{٢}$ × $\frac{-١}{\sqrt{٢}}$ = ١٠

$\therefore$ $\overline{ح}$ = ١٠ $\overline{س}$ + ١٠ $\overline{ص}$

$\therefore$ ح = $\sqrt{(١٠)^2 + (١٠)^2}$ = ١٠$\sqrt{٢}$ ث.جم

، ظا هـ = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١

١٦ (د) ١٧ (ب) ١٨ (ب)

١٩ (ج) ٢٠ (ب) ٢١ (ج)

٢٢ (ب) ٢٣ (د) ٢٤ (ج)

النموذج الثامن

١ (ج) ٢ (د) ٣ (د)

٤ (ب) ٥ (د)

٦

$\because$ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

$\therefore$ ٨$\sqrt{٣}$ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ٤

$\therefore$ مساحة القاعدة = ٦$\sqrt{٣}$ سم^2

$\therefore$ $\frac{٦}{٤}$ × س^2 ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = ٦$\sqrt{٣}$

$\therefore$ س^2 = ٤ $\therefore$ س = ٢

$\therefore$ طول ضلع السداسي = ٢ سم

$\therefore$ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٧ (ج) ٨ (أ)

٩ (د) ١٠ (د)

١١



$\because$ س = ق جتا صفر

+ ٨٠ جتا ٦٠°

١٢ (د) ١٣ (أ) ١٤ (ج)

١٥

١٦

عمودى على مستويهما
ويمران بمركز الكرة
وبتطبيق قاعدة لامى

∴ ص > ٠
∴ هـ = ٤٥°
∴ ح يؤثر فى اتجاه أحـ

١٤ (جـ) **١٥** (ب)

+ ك حتا ٩٠°
+ ٥٠ حتا ١٨٠°
+ ٨٠ √٣ حتا ٢٧٠°

= ١٣ وحدة طول
فى حالة أن الدائرتين متماستين من الخارج

∴ √ك − ٤ = ١٣
ومنها √ك = ١٧ ومنها ك = ٢٨٩
، √ك − ٤ = −١٣ ومنها √ك = −٩ (مرفوض)
∴ قيم ك هى ٨١ ، ٢٨٩

١٧ (د) **١٨** (د)

١٩ (أ) **٢٠** (د) **٢١** (ب)

٢٢ (د) **٢٣** (ب) **٢٤** (ب)

النموذج التاسع

١ (جـ) **٢** (جـ) **٣** (ب) **٤** (د)

٥ (أ) **٦** (جـ) **٧** (د) **٨** (جـ)

٩

∵ أحـ = أء = ٤ متر
∴ ق(∠ أحـ ء) = ٤٥°
∴ حـ ء = ٤ √٢ متر
من Δ م حـ ن :
∴ م ن = ١ متر
، ق(∠ ن حـ م) = ٤٥° ، ق(∠ ن م حـ) = ٩٠°
∴ ن حـ = √٢ متر
∴ ء ن = ٤ √٢ − √٢ = ٣ √٢ متر
، من Δ أ م ن : أ ن = √١٠ متر
، ∵ Δ أ ن ء هو مثلث القوى
∴ ش / √١٠ = ص / ٣√٢ = ٨ / ٤
∴ ش = ٢ √١٠ ثقل كجم ، ص = ٦ √٢ ثقل كجم

١٢

∵ طول راسم المخروط
= ١٨ سم.
، ∵ محيط دائرة قاعدة
المخروط = طول القوس أب
= نق × هـ = ١٨ × (٦٠° × π) / ١٨٠° = ٦ π
، ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم
، ع = √(ل² − نق²) = √((١٨)² − (٣)²) = ٣ √٣٥
∴ حجم المخروط
= ⅓ π نق² ع
= ⅓ π × (٣)² × ٣ √٣٥
≃ ١٦٧٫٣ سم³

١٣ (جـ)

١٤

س = ١٠ حتا صفر°
+ ٢٠ حتا ١٢٠°
+ ٣٠ حتا ٢٤٠°
= ١٠ + ٢٠ × −½
+ ٣٠ × −½ = −١٥
، ص = ١٠ حا صفر° + ٢٠ حا ١٢٠° + ٣٠ حا ٢٤٠°
= صفر + ٢٠ × √٣/٢ + ٣٠ × −√٣/٢ = −٥ √٣
∴ ح = −١٥ س − ٥ √٣ ص
∴ ح = √((−١٥)² + (−٥ √٣)²) = ١٠ √٣ نيوتن
، ظا هـ = −٥√٣ / −١٥ = √٣ / ٣ ∴ هـ = ٢١٠°
∴ خط عمل المحصلة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

٢٣ (ب) **٢٤** (ب)

النموذج العاشر

١ (د) **٢** (أ) **٣** (جـ)

٤ (أ) **٥** (أ)

٦

الارتفاع الجانبى
= √((١٠ √٣)² + (١٠)²)
= ٢٠ سم.
المساحة الجانبية = ½ (محيط القاعدة)
× الارتفاع الجانبى
= ½ × (٤ × ٢٠) × ٢٠ = ٨٠٠ سم²
، الحجم = ⅓ مساحة القاعدة × ع
= ⅓ × (٢٠)² × ١٠ √٣ = ٤٠٠٠ √٣ / ٣ سم³

٧ (ب) **٨** (ب) **٩** (أ)

١٠ (جـ) **١١** (د)

١٢

∵ حجم المخروط = ⅓ × π (٢)² × ١٢ = ١٦ π سم³
∴ حجم الماء المرتفع فى الإناء الأسطوانى = ١٦ π سم³
∴ ١٦ π = π نق² × ١
∴ نق² = ١٦ ∴ نق = ٤ سم
∴ طول قطر قاعدة الإناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

= ٠ + ٩ حتا ٩٠°
+ ٥ √٢ حتا ١٣٥°
+ ٧ √٢ حتا ٢٢٥°
+ ٧ حتا ٢٧٠°
= ١٢ + صفر − ٥ − ٧ + صفر = صفر
، ص = ١٢ حا صفر° + ٩ حا ٩٠° + ٥ √٢ حا ١٣٥°
+ ٧ √٢ حا ٢٢٥° + ٧ حا ٢٧٠°
= صفر + ٩ + ٥ − ٧ − ٧ = صفر
∴ ح = صفر ∴ المجموعة متزنة

١٥ (أ) **١٦** (أ) **١٧** (ب) **١٨** (ب)

١٩ (ب) **٢٠** (أ) **٢١** (ب) **٢٢** (جـ)

٢٣ (ب) **٢٤** (جـ)

إجابات امتحانات الإدارات التعليمية

١ محافظة القاهرة

١ (د)

٢ (جـ)

الحل :

∵ ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ٦ = ٢ × ٦ × جتا $\frac{ى}{٢}$

∴ جتا $\frac{ى}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{ى}{٢}$ = ٦٠°

∴ ى = ١٢٠°

٣ (أ)

الحل :

ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{٢}$ ∴ ٦ = ٢ ق جتا $\frac{٩٠°}{٢}$

∴ ٦ = ٢ ق × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ق = ٣ $\sqrt{٢}$ نيوتن

٤ (جـ)

الحل :

ق = ح جتا هـ

∴ ق = ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° = ٤ نيوتن

٥ (جـ)

الحل :

$ق_٢$ = $\frac{١٠ \text{ جا } ٦٠°}{\text{جا } ١٥٠°}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

٦ (جـ)

الحل :

$\overline{ح}$ = $\overline{ق_١}$ + $\overline{ق_٢}$

∴ ٢ أ $\overline{س}$ − ٣ ب $\overline{ص}$ = ٢ $\overline{س}$ − ٢ $\overline{ص}$ + ٤ $\overline{س}$ − ٨ $\overline{ص}$ = ٦ $\overline{س}$ − ١٠ $\overline{ص}$

∴ ٢ أ = ٦ ومنها أ = ٣ ، ٣ ب = ١٠ ومنها ب = $\frac{١٠}{٣}$

∴ أ − ب = ٣ − $\frac{١٠}{٣}$ = − $\frac{١}{٣}$

٧ (د)

الحل :

$\overline{ق_١}$ + $\overline{ق_٢}$ + $\overline{ق_٣}$ = $\overline{٠}$

∴ ٤ $\overline{س}$ + ٥ $\overline{ص}$ + أ $\overline{س}$ − ٧ $\overline{ص}$ + ٣ $\overline{س}$ + ب $\overline{ص}$ = $\overline{٠}$

∴ (أ + ٧) $\overline{س}$ + (ب − ٢) $\overline{ص}$ = $\overline{٠}$

∴ أ + ٧ = ٠ ومنها أ = − ٧ ، ب − ٢ = ٠

ومنها ب = ٢

∴ أ + ٢ ب = − ٧ + ٢ (٢) = − ٣

٨ (ب)

الحل :

س = ٢ جتا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جتا ٣٠° + ٨ جتا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠° = ١٠

، ص = ٢ جا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٦٠° + ٢ $\sqrt{٣}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠° = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ مقدار المحصلة ح = $\sqrt{١٠^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$

= ٢٠ ث.كجم

٩ (جـ)

الحل :

∵ س = ١٠ ، ص = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ ظا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ اتجاه المحصلة يميل على $\overrightarrow{أب}$ بزاوية قياسها ٦٠°

١٠ (ب)

الحل :

$\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°}$ = $\frac{٨٠}{\text{جا } ٩٠°}$ ∴ ق = ٤٠ نيوتن

١١ (جـ)

الحل :

$\frac{[illegible]}{\text{جا } [illegible]}$ = $\frac{٨٠}{\text{جا } ٩٠°}$ ∴ [illegible] = ٤٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

١٢ (جـ)

١٣ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

ب حـ = $\sqrt{٤٠^٢ + ٤٠^٢}$ = ٤٠ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ء حـ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، Δ أ ء حـ مثلث القوى

∴ $\frac{ر}{٢٠\sqrt{٢}}$ = $\frac{٣٠}{٤٠}$ ∴ ر = ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن

١٤ (أ)

الحل :

$\frac{ش}{٢٠\sqrt{٢}}$ = $\frac{٣٠}{٤٠}$ ∴ ش = ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن

١٥ (جـ)

الحل :

$\frac{ق}{\text{جا } ١٥٠°}$ = $\frac{ر}{\text{جا } ٩٠°}$ = $\frac{١٨}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ ق = $\frac{١٨ \times \text{جا } ١٥٠°}{\text{جا } ١٢٠°}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ر = $\frac{١٨ \times \text{جا } ٩٠°}{\text{جا } ١٢٠°}$ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ ق + ر = ٦ $\sqrt{٣}$ + ١٢ $\sqrt{٣}$ = ١٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن

١٦ (أ)

١٧ (جـ)

١٨ (د)

١٩ (د)

٢٠ (ب)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= [illegible] سم٣

٢١ (ب)

الحل :

المساحة الكلية = مساحة الوجه الجانبي × ٢ + مساحة القاعدة = [illegible] سم٢

٢٢ (جـ)

الحل :

المساحة الكلية = [illegible] سم٢

٢٣ (د)

٢٤ (ب)

الحل :

ل = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

المساحة الجانبية للمخروط = ط نق ل

= [illegible] سم٢

٢٥ (ب)

الحل :

المساحة الكلية للمخروط = ط نق (ل + نق)

= [illegible]

= [illegible] سم٢

٢٦ (أ)

٢٧ [illegible]

الحل

مساحة المنطقة المظللة = ... سم²

الحل

معادلة الدائرة هي :

$\because$ س² + ص² + ... س + ... ص − ... = ٠

$\therefore$ مركز الدائرة م = (٣ ، −٢)

$\therefore$ نق = $\sqrt{(-3)^2 + ... - (-4)}$ = ٣ وحدة طول

$\therefore$ طول قطر الدائرة = ٦ وحدة طول

٢٩ (أ)

الحل

$\because$ حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ ط نق² ع

$\therefore$ ٩ ط = $\frac{1}{3}$ × ط × نق² × نق

$\therefore$ نق³ = ٢٧ $\qquad$ $\therefore$ نق = ٣ سم

$\therefore$ مساحة القاعدة = ط نق² = ط × ٣² = ٩ ط سم²

٣٠ (ب)

الحل

$\frac{\text{حجم المخروط قبل التغيير}}{\text{حجم المخروط بعد التغيير}} = \frac{\frac{1}{3} ط نق^2 ع}{\frac{1}{3} ط (٢ نق)^2 \times \frac{1}{2} ع}$

$\therefore$ حجم المخروط بعد التغيير = ٢ حجم المخروط قبل التغيير

٣ مستويات التفكير العليا

١ (ب)

٢ (ب)

الحل

القيمة العظمى المسببة = ... = ... جنيهًا

٤ (ج)

٥ (ب)

الحل

$(٢ س − ٥)^2 + (س + ٢)^2 = (٣ \sqrt{٥})^2$

$\therefore$ ٤ س² − ٢٠ س + ٢٥ + س² + ٤ س + ٤ = ٤٥

$\therefore$ ٥ س² − ١٦ س − ١٦ = ٠

$\therefore$ (س − ٤) (٥ س + ٤) = ٠

$\therefore$ س = ٤ أو س = $-\frac{4}{5}$ (مرفوضة)

٦ (ب)

٧ (ج)

٨ (أ)

الحل

...

١٠ (ج)

١١ (أ)

الحل

...

١٢ (ج)

١٣ (ب)

الحل

...

٢٣ (أ)

الحل :

بفرض أن :

طول ضلع القاعدة = ارتفاع الجانبي = س سم

∴ $\frac{\text{المساحة الجانبية}}{\text{المساحة الكلية}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \text{ س} \times \text{س}}{\frac{1}{2} \times 4 \text{ س} \times \text{س} + \text{س}^2}$

$= \frac{2\text{ س}^2}{3\text{ س}^2} = \frac{2}{3}$

٢٤ (د)

٢٥ (د)

الحل :

$\frac{1}{3} \pi$ نق$^2 \times 3 = 49 \pi$

∴ نق^2 = ٤٩ ∴ نق = ٧ سم

∴ طول قوس القطاع = محيط الدائرة التى تمثل قاعدة المخروط = ٢ π نق = ٢ π × ٧ = ١٤ π سم

٢٦ (جـ)

٢٧ (ب)

الحل :

$\frac{22}{7}$ نق × ٢٥ = ٥٥٠

∴ نق = ٧ سم

∴ ع = $\sqrt{25^2 - 7^2}$ = ٢٤ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 24$

= ١٢٣٢ سم^3

٢٨ (ب)

٢٩ (جـ)

الحل :

بفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = س سم

، ارتفاع الهرم الجانبى = ل سم

المساحة الكلية للهرم = مساحة القاعدة + المساحة الجانبية

∴ ٧٠ = مساحة القاعدة + ٤٥

∴ مساحة القاعدة = ٢٥ سم^2

∴ س^2 = ٢٥ ∴ س = ٥ سم

∵ المساحة الجانبية

= $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبى

∴ ٤٥ = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٥ × ل

∴ ل = ٤,٥ سم

∴ ع = $\sqrt{(4{,}5)^2 - (2{,}5)^2}$ = $\sqrt{14}$ سم

٣٠ (د)

الحل :

س^2 − ك^2 ص^2 − ٤٩ = ٠

∴ س^2 + ص^2 = ٤٩ ∴ نق = ٧ وحدة طول

٣ محافظة الإسكندرية

١ (جـ)

الحل :

ح = $\sqrt{5^2 + 3^2 + 2 \times 5 \times 3 \times \text{جتا } 60^\circ}$ = ٧ نيوتن

٢ (أ)



الحل :

نق = $\sqrt{15^2 - 12^2}$ = ٩ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2$ × ١٢ = ٣٢٤ π سم^3

٣ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

ا هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ = ١٠ √٢ ، ب هـ = ١٠ √٢ سم

ا حـ = $\sqrt{(20\sqrt{2})^2 - (20)^2}$ = ٢٠ سم



[illegible]

= ١٤ √٣ نيوتن

٤ (أ)

٥ (ب)

الحل :

ع$_1$ − ع$_2$ = ٣ (١)

، ع$_1$ + ع$_2$ = ١٢ (٢)

بضرب المعادلتين (١) × (٢)

∴ (ع$_1$ − ع$_2$) (ع$_1$ + ع$_2$) = ٣٦

∴ ع$_1^2$ − ع$_2^2$ = ٣٦

٦ (جـ)



الحل :

من هندسة الشكل

ا ب = $\sqrt{(2\text{ نق})^2 - \text{نق}^2}$

= √٣ نق وحدة طول

٧ (جـ)

الحل :

ل = − جا θ ، ك = جا θ ، حـ = − ٨

∴ نق = $\sqrt{\text{ل}^2 + \text{ك}^2 - \text{حـ}}$

= $\sqrt{\text{جا}^2\theta + \text{جا}^2\theta + 8}$

= $\sqrt{1 + 8}$ = ٣ وحدة طول

٨ (ب)

الحل :

[illegible]

٩

الحل :

[illegible]

١٠ (أ)

الحل :

[illegible]

١١ (جـ)

١٢ (أ)

الحل : [illegible]

١٣ (جـ)

١٤ (أ)

الحل :

[illegible]

١٥ (جـ)

الحل :

[illegible]

الحل :

من هندسة الشكل :

أ ء = ½ ب حـ = ١٠ $\sqrt{2}$ ، ء حـ = ١٠ $\sqrt{2}$ سم

أ حـ = $\sqrt{(20\sqrt{2})^2 - (20)^2}$ = ٢٠ سم

(جـ)

الحل :

بفرض أن : طول ضلع قاعدة الهرم = س سم

، ارتفاع الهرم الجانبي = ل سم

ل = − جا θ ، ك = جا θ ، حـ = − ٨

∴ نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - حـ}$

= $\sqrt{جا^2 θ + جتا^2 θ + ٨}$

= $\sqrt{1 + 8}$ = ٣ وحدة طول

حجم الهرم = ⅓ × ½ × ٦ × ٦ = ٣٦ سم³

١٥ (جـ)

الحل :

[illegible]

∴ ح = $\sqrt{س^2 + ص^2}$ = $\sqrt{60^2 + 0^2}$ = ١٠ نيوتن

١٦ (جـ)

الحل :

باستخدام قاعدة لامي

∴ $\frac{14}{جا 90°} = \frac{7}{جا (180° - θ)}$

∴ $\frac{14}{1} = \frac{7}{جا θ}$

∴ جا θ = $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ ∴ θ = ٣٠°

١٧ (جـ)

الحل :

من هندسة الشكل

(و حـ)² = حـ ب × حـ أ

= ٨ × ١٢,٥

= ١٠٠

∴ و حـ = ١٠ سم ∴ نق = ١٠

∴ معادلة الدائرة هي : س² + ص² = ١٠٠

١٨ (جـ)

١٩ (د)

الحل :

أ ب = $\sqrt{30^2 - 24^2}$ = ١٨ سم

وباستخدام قاعدة مثلث القوى

∴ $\frac{ش}{30} = \frac{ع}{24} = \frac{90}{18}$

∴ ش = $\frac{30 \times 90}{18}$ = ١٥٠ ث.جم

، ع = $\frac{24 \times 90}{18}$ = ١٢٠ ث.جم

∴ ش − ع = ١٥٠ − ١٢٠ = ٣٠ ث.جم

٢٠ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{(-4 - 0)^2 + (3 - 0)^2}$ = ٥ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : (س + ٤)² + (ص − ٣)² = ٢٥

٢١ (د)

الحل :

حجم الهرم المنتظم الوجوه = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ ل³ = $\frac{\sqrt{2}}{12}$ × ٢١٦

= ١٨ $\sqrt{2}$ سم³

٢٢ (جـ)

الحل :

$\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2} = \frac{4}{3}$ ∴ ٤ ق₁ − ٤ ق₂ = ٣ ق₁ + ٣ ق₂

∴ ٤ ق₁ − ٣ ق₁ = ٤ ق₂ + ٣ ق₂

∴ ق₁ = ٧ ق₂ ∴ $\frac{ق_1}{ق_2} = \frac{7}{1}$

٢٣ (أ)

٢٤ (جـ)

الحل :

ح = ٥ س + ٧ س − ٥ ص = ١٢ س − ٥ ص

∴ ‖ح‖ = $\sqrt{144 + 25}$ = $\sqrt{169}$ = ١٣ وحدة قوة

٢٥ (ب)

الحل :

ح = ٢ ق جتا $\frac{ى}{2}$ ∴ ٢ ق جتا ٣٠° = ٢٤

∴ ق = $\frac{24}{2 جتا 30°}$ = ٨ $\sqrt{3}$ ث.جم

٢٦ (د)

الحل :

ق₁ = $\frac{12 جا 30°}{جا 120°}$ = ٤ $\sqrt{3}$ نيوتن

٢٧ (د)

الحل :

س² + ص² − ١٦ = ٠ ∴ س² + ص² = ١٦

∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها ٤ وحدة طول

٢٨ (ب)

٢٩ (د)

٣٠ (جـ)

٤ محافظة القليوبية

١ (جـ)

٢ (أ)

الحل :

طول ضلع قاعدة الهرم = $\sqrt{100}$

= ١٠ سم

الارتفاع الجانبي = $\sqrt{12^2 + 5^2}$

= ١٣ سم

∴ المساحة الجانبية للهرم = ½ (١٠ × ٤) × ١٣

= ٢٦٠ سم²

٣ (د)

الحل :

ح = ٢ س + ٤ س + ٨ ص = ٦ س + ٨ ص

∴ ‖ح‖ = $\sqrt{36 + 64}$ = ١٠ وحدة قوة

٤ (أ)

الحل :

حجم الهرم = ⅓ (½ × ٦ × ٨ × ٨ × ظا [illegible]) = ٦٠

= ٢٠ $\sqrt{3}$ سم³

الحل :

[illegible]

∴ ق = ٨ $\sqrt{2}$ نيوتن

∴ القيمة العظمى للمحصلة = ٨ $\sqrt{2}$ + ٤ $\sqrt{2}$

= ١٢ $\sqrt{2}$ نيوتن

٦ (د)

٧ (ب)

الحل :

عندما ى = ٠° ∴ ح = ٦ + ٢ = ٨

، عندما ى = ١٨٠° ∴ ح = ٦ − ٢ = ٤

، ∵ ى ∈]٠ ، ١٨٠°[∴ ح ∈]٤ ، ٨[

٨ (ب)

الحل :

∵ الدائرة تمس محور السينات ∴ نق = |ك|

، ∵ ل = ٣ ، ك = −١

∴ نق = |−٤| = ٤ وحدة طول

∴ حـ = ل² + ك² − نق² = [illegible]

٩ (جـ)

الحل :

[illegible]

١٠ (د)

الحل :

نق = $\sqrt{٩}$

= ٣ وحدة طول

، أ ب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ وحدة طول



١١ (ب)

١٢ (جـ)

١٣ (د)

الحل :

س = ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جتا ٩٠° + ١٢ جتا ١٣٥° = ٠

، ص = ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٠° + ٦ $\sqrt{٢}$ جا ٩٠° + ١٢ جا ١٣٥°

= ١٢ $\sqrt{٢}$ وحدة قوة

∴ ح = ١٢ $\sqrt{٢}$ ص

∴ المحصلة تعمل في اتجاه الشمال

١٤ (أ)



الحل :

مقدار المركبة في اتجاه أجـ

= ١٠ جتا ٣٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، مقدار المركبة في اتجاه أو

= ١٠ جا ٣٠° = ٥ نيوتن

١٥ (أ)



الحل :

الشبكة تمثل مخروط محيط

قاعدته = ١٢ π سم

∴ ٢ π نق = ١٢ π

∴ نق = ٦ سم

، ∵ حجم المخروط = ٩٦ π سم^٣

∴ $\frac{١}{٣}$ × π × ٦^٢ × ع = ٩٦ π

∴ ع = ٨ سم

∴ ل (طول راسم المخروط) = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$ = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط

= π نق ل = π × ٦ × ١٠ = ٦٠ π سم^٢

١٦ (ب)

الحل :

بفرض أن : ق١ = ٤ ك ، ق٢ = ٣ ك

، ح = $\sqrt{١٣}$ ك من وحدات القوة

، ∵ ح^٢ = ق١^٢ + ق٢^٢ + ٢ ق١ ق٢ جتا ى

∴ ١٣ ك^٢ = ١٦ ك^٢ + ٩ ك^٢ + ٢

× ٤ ك × ٣ ك × جتا ى

∴ − ١٢ = ٢٤ جتا ى ∴ جتا ى = $-\frac{١}{٢}$

∴ ى = ١٢٠°

١٧ (جـ)

الحل :

بقسمة المعادلة على ٢

∴ س^٢ + ص^٢ + ٦ س − ٨ ص = ٠

∴ ل = − ٣ ، ك = ٤

∴ م (مركز الدائرة) = (−٣ ، ٤)

١٨ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

م ب = ٢ + ٣ = ٥ سم

، ∵ م أ = ٣ سم ∴ أ ب = $\sqrt{٥^٢ - ٣^٢}$ = ٤ سم

، Δ م ب أ مثلث القوى ∴ $\frac{ش}{٥} = \frac{ر}{٣} = \frac{٤٠}{٤}$

∴ ش = ٥٠ نيوتن ، ر = ٣٠ نيوتن

∴ ش + ر = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ نيوتن

١٩ (أ)

الحل :

∵ ل = ٢ نق

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (نق + ٢ نق)

= ٣ π نق^٢ وحدة مساحة

٢٠ (جـ)



الحل :

ب جـ = $\sqrt{٣٠^٢ + ٤٠^٢}$

= ٥٠ سم

، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٢٥ سم

$\frac{ش_١}{جا (٩٠° - ى)} = \frac{ش_٢}{جا (٩٠° - هـ)} = \frac{و}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_١}{جتا ى} = \frac{ش_٢}{جتا هـ} = \frac{و}{١}$ ∴ $\frac{ش_١}{\frac{٤٠}{٥٠}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣٠}{٥٠}} = \frac{و}{١}$

∴ ش١ : ش٢ : و = $\frac{٤}{٥}$: $\frac{٣}{٥}$: ١ بالضرب × ٥

= ٤ : ٣ : ٥

٢١ (جـ)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{٦٤}{٤}$ = ١٦ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × (١٦)^٢ × ٣ = ٢٥٦ سم^٣

٢٢ (أ)

الحل :

محصلة القوتين = ق١ + ق٢ + ق٣ − ق٣ = ٢ ق١

∴ قياس الزاوية بين ق١ ، ٢ ق١ تساوي صفر°

٢٣ (د)



الحل :

نق = $\sqrt{٥^٢ - ٤^٢}$ = ٣ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣}$ π × [illegible] سم^٣

٢٤ (ب)

٢٥ (جـ)

٢٦ (د)

الحل :

[illegible]

٢٧ (أ)

الحل :

مركز الدائرة [illegible]

بفرض أن ب (س ، ص)

[illegible]

٢٨ (ب)

٢٩ (ب)

٣٠ (د)

الحل :

[illegible]

∴ Δ م ب ٢ مثلث القوى ∴ $\frac{س}{٥} = \frac{ر}{٣} = \frac{٤٠}{٤}$

∴ س = ٥٠ نيوتن ، ر = ٣٠ نيوتن

∴ س + ر = ٥٠ + ٣٠ = ٨٠ نيوتن

∵ حجم المخروط = ٩٦ π سم^٣

∴ $\frac{١}{٣} \times \pi \times ٦^٢ \times$ ع = ٩٦ π

(د)

الحل :

نق = $\sqrt{٥^٢ - ١}$ = ٢ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

= $\frac{١}{٣} \pi \times ٩ \times ٤ = ١٢ \pi$ سم^٣



(د)

الحل :

نق = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ سم ، م (٠ ، ٠)

الدائرة م تقطع محور السينات في ٢ ، ب

∴ $\overline{٢ب}$ قطر في الدائرة

∴ ٢ب = ٢ × ٧ = ١٤ وحدة طول

١ (ب)

٢ (د)

الحل :

π نق (نق + ل) = ٢١٦ π

∴ نق (نق + ١٥) = ٢١٦

∴ نق^٢ + ١٥ نق − ٢١٦ = ٠

∴ (نق − ٩) (نق + ٢٤) = ٠

∴ نق = ٩ سم أو نق = −٢٤ (مرفوض)

∴ ع = $\sqrt{١٥^٢ - ٩^٢}$ = ١٢ سم

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع = $\frac{١}{٣} \pi \times ٩^٢ \times ١٢$

= ٣٢٤ π سم^٣



٣ (أ)

الحل :

٥ س + ٣ ص + ٢ س + ٦ ص

− ١٤ س + ب ص = ٠

∴ (٢ − ٩) س + (ب + ٩) ص = ٠

∴ ٢ − ٩ = ٠ ومنها ٢ = ٩

، ب + ٩ = ٠ ومنها ب = −٩

∴ ٢ + ب = ٩ + (−٩) = ٠

٤ (جـ)

٥ (د)

٦ (أ)

الحل :

بقسمة حدود المعادلة على ٢

∴ نق = $\sqrt{(-٢)^٢ + ٦^٢ + ...}$ = ٣ وحدة طول

٧ (ب)

الحل :

∵ معادلة الدائرة هي : (س − ٢)^٢ + (ص − ب)^٢ = ٢^٢

∴ ل = ٢ ، ك = ب ، نق = ٢

∵ نق = ل

∴ الدائرة تمس محور الصادات

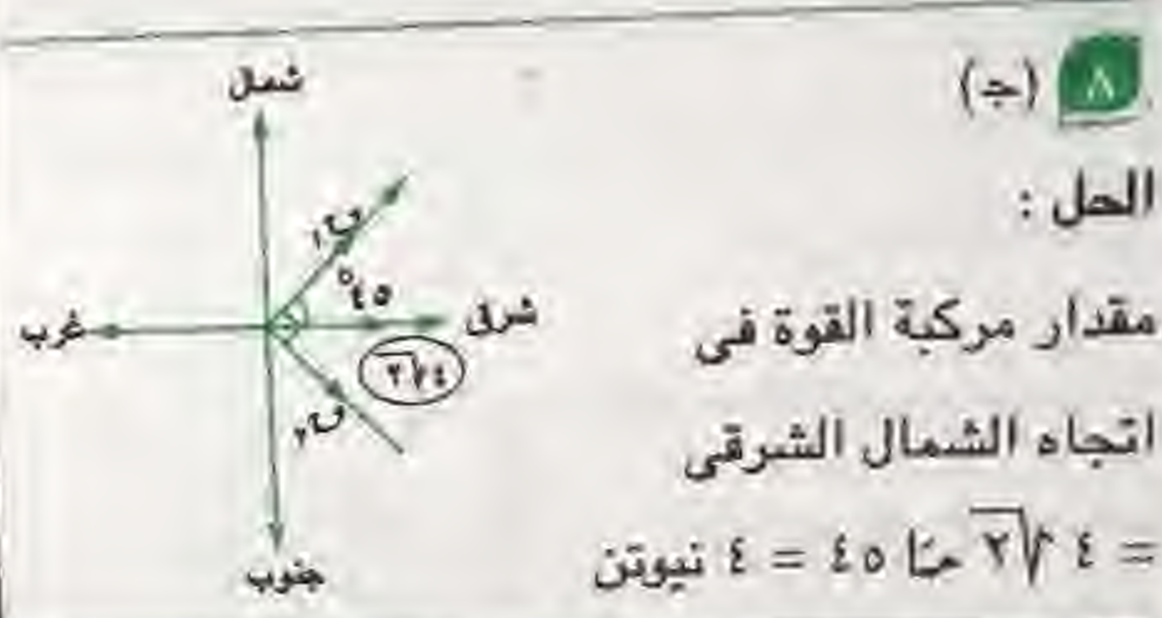
٨ (جـ)

الحل :

مقدار مركبة القوة في

اتجاه الشمال الشرقي

= ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥ = ٤ نيوتن



٩ (د)

الحل :

∵ المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين

∴ القوتان متساويتان في المقدار

∴ ق = ٨ ث.جم

١٠ (ب)

الحل :

س = ٥ جتا ٠° + ٤ جتا ٦٠°

+ ق جتا ١٢٠°

+ ٣ جتا ١٨٠°

+ ك جتا ٢٤٠° + ٧ جتا ٣٠٠°

= ٥ + ٢ − $\frac{١}{٢}$ ق − ٣ − $\frac{١}{٢}$ ك + $\frac{٧}{٢}$

= $\frac{٧}{٢}$ − ... $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك − $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$

∵ المجموعة متزنة ∴ س = ٠

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٧ − $\frac{١}{٢}$ ق − $\frac{١}{٢}$ ك = ٠

∴ ق + ك = ١٥ ⟵ (١)

، ص = ٠

∴ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ق − $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ك − $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ = ٠

∴ ق − ك = ٣ ⟵ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ق = ٩ ث.جم ، ك = ٦ ث.جم

∴ (ق ، ك) = (٩ ، ٦)

١١ (ب)

الحل :

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامي :

$\frac{ر}{جا ١٥٠°} = \frac{س}{جا ٩٠°} = \frac{١٢}{جا ١٢٠°}$

∴ ر = $\frac{١٢ \times جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، س = $\frac{١٢ \times جا ٩٠°}{جا ١٢٠°}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ (س ، ر) = (٨ $\sqrt{٣}$ ، ٤ $\sqrt{٣}$)

١٢ (ب)

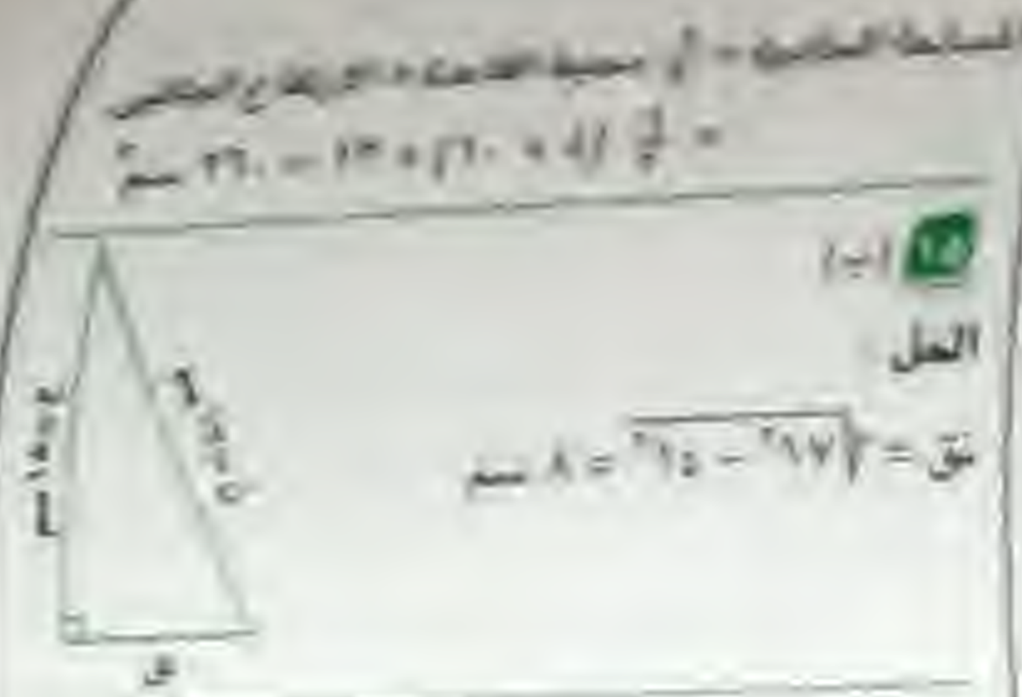
الحل :

باستخدام قاعدة لامي

١٥ (ب)

الحل :

نق = $\sqrt{١٧^٢ - ١٥^٢}$ = ٨ سم



١٦ (د)

١٧ (جـ)

الحل :

ع = $\sqrt{١٢^٢ + ٥^٢}$ = ١٣ نيوتن

١٨ (أ)

الحل :

١٩ (جـ)

الحل :

٢١ (د)

الحل :

باستخدام قاعدة لامي :

ق ÷ جا ١٥٠° = ك ÷ جا ١٢٠°

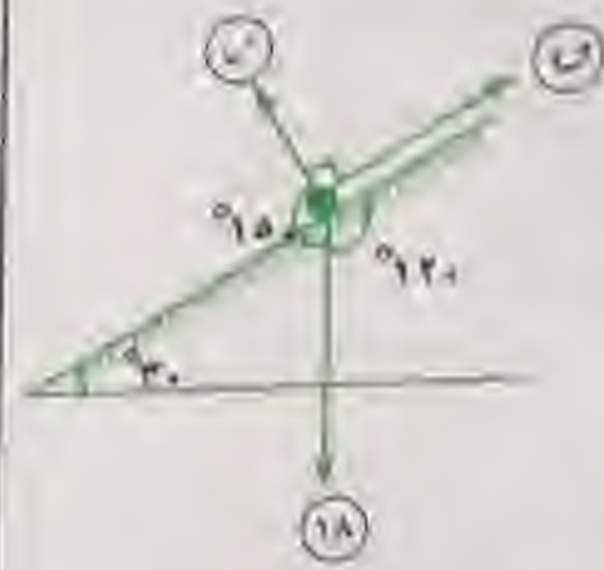
= ١٨ ÷ جا ٩٠°

∴ ق = (١٨ × جا ١٥٠°) ÷ جا ٩٠°

= ٩ نيوتن

، ر = (١٨ × جا ١٢٠°) ÷ جا ٩٠° = ٩ $\sqrt{3}$ نيوتن

∴ ق + ر = ٩ + ٩ $\sqrt{3}$ نيوتن



٢٢ (ب)

الحل :

من هندسة الشكل وباستخدام قاعدة لامي :

∴ ق ÷ جا ١٢٠° = ش ÷ جا ١٥٠°

∴ ق ÷ ش = جا ١٢٠° ÷ جا ١٥٠° = $\sqrt{3}$

٢٣ (أ)

الحل :

(م) مركز الدائرة = (٧ ، ٥) ، نق = $\sqrt{16}$ = ٤ وحدة طول

∴ أقل بعد بين محور الصادات ونقطة على الدائرة

= ٧ − ٤ = ٣ وحدة طول

٢٤ (ب)

الحل :

[illegible] = (٢ ، ٠)

٢٥ (أ)

الحل :

ل = $\sqrt{20^2 + 15^2}$ = ٢٥ سم

المساحة الجانبية للمخروط

= π نق ل = π × ١٥ × ٢٥

= ٣٧٥ π سم^2



٢٦ (ب)

الحل :

$\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي = ٣٠

∴ $\frac{1}{2}$ × محيط القاعدة × ٥ = ٣٠

∴ محيط القاعدة = ١٢ سم

٢٧ (أ)

٢٨ (د)

٢٩ (جـ)

الحل :

بفرض أن : ق$_1$ > ق$_2$ ∴ (ق$_1$ + ق$_2$) ÷ (ق$_1$ − ق$_2$) = $\frac{7}{3}$

∴ ٧ ق$_1$ − ٧ ق$_2$ = ٣ ق$_1$ + ٣ ق$_2$

∴ ٤ ق$_1$ = ١٠ ق$_2$ ∴ ق$_1$ ÷ ق$_2$ = $\frac{10}{4}$ = $\frac{5}{2}$

٣٠ (د)

الحل :

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامي :

ش$_1$ ÷ جا هـ = ش$_2$ ÷ جا هـ = ٢٠٠ ÷ جا ٩٠°

∴ ش$_1$ ÷ $\frac{80}{100}$ = ش$_2$ ÷ $\frac{60}{100}$ = $\frac{200}{1}$



∴ ش$_1$ = ٢٠٠ × $\frac{80}{100}$ = ١٦٠ ث.جم

، ش$_2$ = ٢٠٠ × $\frac{60}{100}$ = ١٢٠ ث.جم

∴ ش$_1$ + ش$_2$ = ١٦٠ + ١٢٠ = ٢٨٠ ث.جم

٦ محافظة المنوفية

١ (جـ)

٢ (ب)

الحل :

‖أ‖ = $\sqrt{3^2 + 4^2}$ = ٥

٣ (أ)

٤ (جـ)

الحل :

حجم الجسم الناشئ = حجم المخروط الناتج من دوران Δ أ ب جـ حول $\overleftrightarrow{أب}$ − حجم المخروط الناتج من دوران Δ أ ب ء حول $\overleftrightarrow{أب}$

= $\frac{1}{3}$ π × (ب جـ)^2 × أ ب − $\frac{1}{3}$ π (ب ء)^2 × أ ب

= $\frac{1}{3}$ π × ٣ (٤ − ١) = ٣ π سم^3

٥ (أ)

الحل :

س = ١ جتا ٠° + ٢ جتا ٦٠° + ٤ $\sqrt{3}$ جتا ١٥٠°

+ ٢ $\sqrt{3}$ جتا ٢٧٠° = ١ + ١ − ٦ + ٠ = −٤

، ص = ١ جا ٠° + ٢ جا ٦٠° + ٤ $\sqrt{3}$ جا ١٥٠°

+ ٢ $\sqrt{3}$ جا ٢٧٠° = ٠ = $\sqrt{3}$ + ٢ $\sqrt{3}$

− ٢ $\sqrt{3}$ = صفر

∴ ح = $\sqrt{(-4)^2 + 0^2}$ = ٤ نيوتن

، ∴ $\overline{ح}$ = −٤ $\overline{س}$ ∴ $\overline{ح}$ تعمل في اتجاه $\overline{س}$

∴ $\overline{ح}$ = (٤ ، ١٨٠°)

٦ (ب)

الحل :

∵ ع = ٣ سم ، ل = ٥ سم

∴ نق = $\sqrt{5^2 - 3^2}$ = ٤ سم

∴ المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

= π × ٤ (٥ + ٤)

= ٣٦ π سم^2

٧ (ب)

الحل :

حـ = ٤ + ١ − ٩ = −٤

∴ معادلة الدائرة هي :

س^2 + ص^2 − ٤ س + ٢ ص − ٤ = ٠

٨ (جـ)

الحل :

$\overline{ق_3}$ = − ($\overline{ق_1}$ + $\overline{ق_2}$) = − (−١ ، −٣) = (١ ، ٣)

٩ (جـ)

الحل :

ظا θ = ق$_2$ جا هـ ÷ (ق$_1$ + ق$_2$ جتا هـ)

= (١٥ × $\frac{4}{5}$) ÷ (١٢ + ١٥ × −$\frac{4}{5}$) = $\frac{9}{0}$

∴ θ = ٩٠°

∴ المحصلة عمودية على القوة الأولى

١٠ (أ)

الحل :

[illegible]

...رم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

...ساحة القاعدة × ٤ = ٤٨

...ة القاعدة = ٣٦ سم^٢

...ضلع القاعدة = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

... فيه : م ك = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

... الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ × ٥

= ٦٠ سم^٢

... $\sqrt{١٧^٢ - ١٥^٢}$ = ٨ سم

(ب)

(جـ)

... = $\sqrt{٢ + ٢}$ = ٢ وحدة طول.

... θ = $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$ = ١ ∴ θ = ٤٥°

... = (٢ ، ٤٥°)

(د)

الحل :

... = $\sqrt{(٨\sqrt{٣})^٢ + ٨^٢ + ٢ × ٨\sqrt{٣} × ٨ × جتا ١٥٠°}$

∴ (٥ ، ٣) + (٢ ، ٦) + (−١٤ ، ب) = (−١٠ ، ١٠)

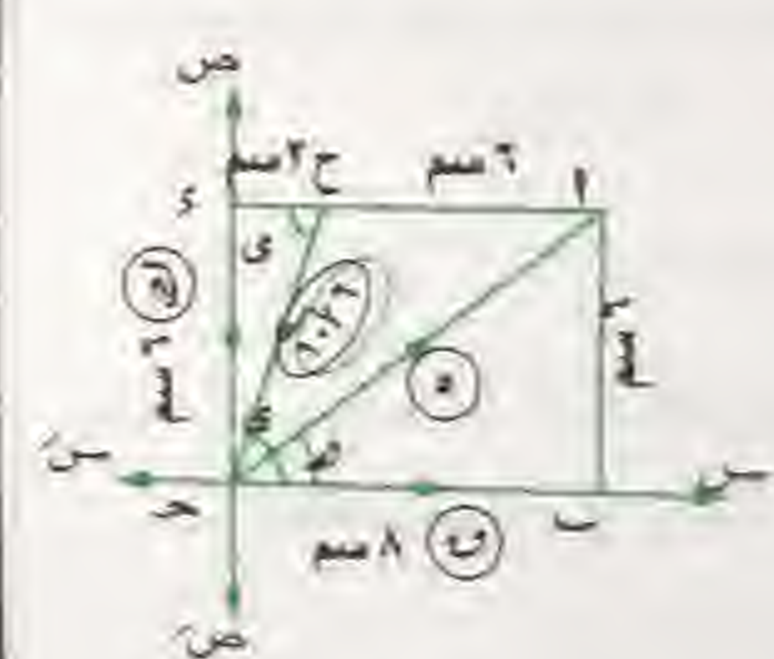
∴ (أ − ٩ ، ب + ٩) = (−١٠ ، ١٠)

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

١٩ (ب)

٢٠ (ب)



الحل :

أجـ = $\sqrt{٦^٢ + ٨^٢}$

= ١٠ سم

، جـ ح = $\sqrt{٢^٢ + ٦^٢}$

= ٢ $\sqrt{١٠}$ سم

، ∵ مجموعة القوى متزنة

∴ ص = ٠

∴ ق جا ٠° + ٥ جاهـ − ٦ $\sqrt{١٠}$ جاى + ك جا ٩٠° = ٠

∴ ٠ + ٥ × $\frac{٦}{١٠}$ − ٦ $\sqrt{١٠}$ × $\frac{٦}{٢\sqrt{١٠}}$ + ك = ٠

∴ ٣ − ١٨ + ك = ٠ ∴ ك = ١٥

٢١ (د)

الحل :

ب جـ = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم

∆ أ جـ ب مثلث القوى

---

٢٥ (أ)

الحل :

∵ ل = −٣ ، ك = ٦ ، جـ = ٥

∴ نق = $\sqrt{(-٣)^٢ + ٦^٢ - ٥}$ = $\sqrt{٤٠}$ = ٢ $\sqrt{١٠}$ وحدة

∴ نق = ٢ $\sqrt{١٠}$ × ٥ = ١٠ $\sqrt{١٠}$ سم

∴ مساحة سطح الخماسي المنتظم

= ٥ × ($\frac{١}{٢}$ × (١٠ $\sqrt{١٠}$)^٢ × جا $\frac{٣٦٠°}{٥}$)

= ٢٣٧٨ سم^٢

٢٦ (ب)



الحل :

$\frac{ق}{جا(١٨٠° - هـ)}$ = $\frac{ر}{جا ٩٠°}$

= $\frac{٨}{جا(٩٠° + هـ)}$

∴ $\frac{ق}{جاهـ}$ = $\frac{ر}{١}$ = $\frac{٨}{جتاهـ}$

٧ محافظة النوبة

١ (ب)

٢ (ج)

الحل:

٣ (ج)

٤ (ب)

٥ (ب)

٦ (ب)

الحل:

∵ القوى متزنة

∴ محصلة القوتين تساوي في المقدار وتضادها في الاتجاه

٧ (ب)

الحل:

مركبة القوة في اتجاه المستوى = ١٠ نيوتن

٨ (ب)

الحل:

١٠ (ب)

الحل:

∴ ... يمكن أن تكون ٧ نيوتن

١١ (ج)

١٢ (ب)

الحل:

من قاعدة لامي

∴ ق = ٢٥ نيوتن

١٣ (ب)

الحل:

∴ ق = ١٥ نيوتن

١٤ (ب)

الحل:

١٥ (أ)

الحل:

من هندسة الشكل

١٦ (ب)

الحل:



∵ طول ضلع القاعدة = ٦ سم

∴ طول قطر المربع أ ب جـ د

= ٦ √٢ سم

١٧ (ب)

الحل:

١٨ (ب)

الحل:

المساحة الجانبية = ٢ × مساحة الوجه الواحد

= ١٢ √٣ سم²

١٩ (ب)

الحل:

طول راسم المخروط ل = ١٣ سم

٢٠ (أ)

الحل:

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامي

٢١ (ب)

الحل:



٢٢ (أ)

٢٣ (ب)

الحل:

محيط قاعدة المخروط = ٦ π سم

∴ ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

٢٤ (أ)

الحل:

بقسمة حدود المعادلة على ٢

٢٥ (ب)

الحل:

∵ المحصلة تؤثر في محور السينات

٨ محافظة بورسعيد

٢٦ (جـ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤) × ٥ = ٢٠ سم³

٢٧ (جـ)

الحل :

س = ٥ جتا ٠° + ٤ √٢ جتا ٤٥° + ٨ جتا ٩٠° = ٩

، ص = ٥ جا ٠° + ٤ √٢ جا ٤٥° + ٨ جا ٩٠° = ١٢

∴ ح = ٩ س + ١٢ ص

∴ ‖ح‖ = √(٨١ + ١٤٤) = ١٥ نيوتن

، ظا θ = $\frac{١٢}{٩}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ θ = ٥٣ َ٨°

∴ ح = (١٥ ، ٥٣ َ٨°)

٢٨ (د)

الحل :

طول ضلع السداسى المنتظم = طول نصف قطر الدائرة

= ٤ سم

∴ مساحة السداسى المنتظم = $\frac{١}{٤}$ × ٦ × ٤² × ظتا $\frac{١٨٠°}{٦}$

= ٢٤ √٣ سم²

٢٩ (أ)

الحل :

(٢ √٣)² = ق² + ٢² + ٢ × ق × ٢ × جتا ٦٠°

∴ ١٢ = ق² + ٤ + ٢ ق

∴ ق² + ٢ ق − ٨ = ٠

∴ (ق + ٤) (ق − ٢) = ٠

∴ ق = −٤ (مرفوضة) أ، ق = ٢ نيوتن

٣٠ (أ)

الحل :

طول قطر الدائرة = ٣ + ٤ = ٧ سم

∴ نق = ٣,٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π × ٣,٥ = ٧ × $\frac{٢٢}{٧}$ = ٢٢ سم

٨ محافظة بورسعيد

١ (د)

الحل :

ح = ٢ س + ٣ ص + س + ص

= ٣ س + ٤ ص

∴ ‖ح‖ = √(٣² + ٤²) = ٥ نيوتن

٢ (أ)

٣ (ب)

٤ (جـ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

∴ ١٢ = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ٤

∴ مساحة القاعدة = ٩ سم²

∴ طول ضلع القاعدة = ٣ سم

٥ (د)

الحل :

ق١ = $\frac{١٢ \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا }(٤٥° + ٣٠°)}$ = ٦ قتا ٧٥°

٦ (أ)

٧ (ب)

الحل :

∵ ح ⊥ ق١ ∴ ق١ + ق٢ جتا ى = ٠

∴ ٤ + ق جتا ١٢٠° = ٠ ق = ٨ نيوتن

٨ (أ)

الحل :

ل = √(٦² + ٨²) = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل = π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π سم²

٩ (هـ)

الحل :

س = ١٠ √٢ جتا ٤٥° − ١٠ جتا ١٢٠°

+ ١٠ جتا ٢٤٠° − ١٠ √٢ جتا ٣١٥° = ١٠

، ص = ١٠ √٢ جا ٤٥° − ١٠ جا ١٢٠° − ١٠ جا ٢٤٠°

+ ١٠ √٢ جا ٣١٥° = ٠

∴ ح = ١٠ س

∴ مقدار المحصلة = ١٠ نيوتن

١٠ (د)

١١ (د)

الحل :

٢ جـ = √(٣² + ٤²) = ٥ سم

Δ أ ب جـ مثلث القوى ∴ $\frac{ق١}{٤}$ = $\frac{ق٢}{٣}$ = $\frac{ق٣}{٥}$

١٢ (جـ)

الحل :

نق = ٥ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ١٠ π سم

١٣ (جـ)

الحل :

٥ س + ٣ ص + أ س + ٩ ص

= ١٤ س + ب ص

= (١٠ √٢ جتا ١٣٥°) س + (١٠ √٢ جا ١٣٥°) ص

∴ (أ − ٩) س + (ب + ٩) ص

= −١٠ س + ١٠ ص

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

∴ أ + ب = −١ + ١ = ٠

١٤ (د)

الحل :

طول حرف الهرم = $\frac{١٢}{٤}$ = ٣ سم

المساحة الكلية للهرم المنتظم الوجوه

= مساحة الوجه الواحد × ٤ = ($\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٣ × جا ٦٠°) × ٤ = ٩ √٣ سم²

١٥ (أ)

الحل :

باستخدام قاعدة لامى

$\frac{ق}{\text{جا } ٩٠°}$ = $\frac{\frac{١}{٢} ق}{\text{جا }(١٨٠° − هـ)}$ ∴ $\frac{ق}{١}$ = $\frac{\frac{١}{٢} ق}{\text{جا هـ}}$

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

١٦ (د)

الحل :

٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ ٢٧ π = $\frac{١}{٣}$ × π × ٣² × ع

ع = ٩ سم

١٧ (د)

الحل :

يفرض أن طول ضلع قاعدة الهرم = ل وحدة طول

$\frac{\text{حجم الهرم قبل أن يتضاعف طول الضلع}}{\text{حجم الهرم بعد أن يتضاعف طول الضلع}}$ = $\frac{\frac{١}{٣} ل^٢ × ع}{\frac{١}{٣} (٢ ل)^٢ × ع}$

= $\frac{ل^٢}{٤ ل^٢}$ = $\frac{١}{٤}$

١٨ (د)

الحل :

ص = ١٥ جتا ٠° − ٤ √٣ جتا ٣٠° − ٤ √٢ جتا ٩٠°

+ ١٥ جتا ١٢٠° = ٠

، ص = ١٥ جا ٠° − ٥ √٣ جا ٣٠° − ٥ √٣ جا ٩٠°

+ ١٥ جا ١٢٠° = ٠

∴ ح = صفر نيوتن

١٩ (ب)

٢٠ (أ)

الحل :

المساحة الكلية للمخروط = π نق (ل + نق)

∴ ٩٦ π = π نق (١٠ + نق)

∴ نق^{٢} + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ (نق − ٦) (نق + ١٦) = ٠

∴ نق = ٦ سم أ، نق = −١٦ (مرفوضة)

٢١ (د)

٢٢ (ب)

٢٣ (ب)

الحل :

$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٨ √٣

∴ $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٤}$ × ٦ × س^{٢} × ظتا $\frac{π}{٦}$) × ٤ = ٨ √٣

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ٢

∴ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٢٤ (جـ)



الحل :

مقدار المركبة

في اتجاه الشرق

ق١ = ٥ √٣ جا ٣٠°

= $\frac{٥}{٢}$ √٣ نيوتن

٢٥ (أ)

الحل :

نق = ٤ وحدة طول ، م = (−٤ ، ٤)

∴ حـ = ١٦ + ١٦ − ١٦ = ١٦

∴ معادلة الدائرة هي

س^{٢} + ص^{٢} + ٨ س − ٨ ص + ١٦ = ٠

٢٦ (جـ)

٢ ق جتا ٤٥° = ٨

∴ ق = $\frac{٤}{\text{جتا ٤٥°}}$ = ٤ √٢ نيوتن

٢٧ (جـ)

الحل :

$\frac{١}{٣}$ × ٤ × ع = ١٢ ∴ ع = ٩ سم

٢٨ (ب)

٢٩ (ب)

الحل :

باستخدام قاعدة لامي :

∴ $\frac{ق}{\text{جا ١٥٠°}}$ = $\frac{ش}{\text{جا ٩٠°}}$ = $\frac{٦}{\text{جا ١٢٠°}}$

∴ ق = $\frac{\text{٦ × جا ١٥٠°}}{\text{جا ١٢٠°}}$ = ٢ √٣ ث.كجم

، ش = $\frac{\text{٦ × جا ٩٠°}}{\text{جا ١٢٠°}}$ = ٤ √٣ ث.كجم

∴ ش + ق = ٢ √٣ + ٤ √٣ = ٦ √٣ ث.كجم

٣٠ (جـ)

٩ محافظة كفر الشيخ

١ (جـ)

الحل :

ح⃖ = ٢ س⃖ + ٢ ص⃖ + س⃖ + ص⃖

= ٣ س⃖ + ٤ ص⃖

∴ ‖ح⃖‖ = √(٣^{٢} + ٤^{٢}) = ٥ وحدة قوة

٢ (د)

٣ (أ)

الحل :

٢ ق جتا $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٦ ∴ ٢ ق × $\frac{١}{√٢}$ = ٦

∴ ق = ٣ √٢

٤ (ب)

٥ (جـ)

٦ (د)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{٣٦}{٤}$ = ٩ سم

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × (٩)^{٢} × ١٠ = ٢٧٠ سم^{٣}

٧ (د)

الحل :

ق١ = $\frac{\text{١٢ جا ٣٠°}}{\text{جا (٤٥° + ٣٠°)}}$ = ٦ قتا ٧٥°

٨ (جـ)

الحل :

نق = √٢٥ = ٥ وحدة طول

∴ محيط الدائرة = ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول

٩ (جـ)

الحل :

ق = √(٨^{٢} + ١٥^{٢}) = ١٧ نيوتن

١٠ (أ)

الحل :

مساحة الوجه الواحد = $\frac{٩√٣}{٤}$ سم^{٢}

∴ $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} × جا ٦٠° = $\frac{٩√٣}{٤}$

∴ $\frac{١}{٢}$ ل^{٢} × $\frac{√٣}{٢}$ = $\frac{٩√٣}{٤}$

∴ ل^{٢} = ٩ ∴ ل = ٣ سم

١١ (أ)

١٢ (ب)

١٣ (د)

١٤ (أ)



الحل :

ع = √((٢٥)^{٢} − (٧)^{٢}) = ٢٤ سم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق^{٢} ع

= $\frac{١}{٣}$ π × ٤٩ × ٢٤

= ٣٩٢ π سم^{٣} = ٣٩٢ × $\frac{٢٢}{٧}$

= ١٢٣٢ سم^{٣}

١٥ (د)

الحل :

|٨ − ١٣| ≤ ح ≤ ٨ + ١٣ ∴ ٥ ≤ ح ≤ ٢١

∴ القيمتان العظمى والصغرى على الترتيب ٢١ ، ٥ نيوتن

١٦ (جـ)



الحل :

ل = √(٦^{٢} + ٨^{٢}) = ١٠ سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط

= π نق ل = π × ٦ × [illegible]

= ٦٠ π سم^{٢}

١٧ (أ)

١٨ (ب)

الحل :

∵ الدائرة تمس محور السينات

∴ نق = |٣| = ٣ وحدة

∴ معادلة الدائرة هي (س − ٤)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} = ٩

∴ معادلة الدائرة هى : $(س - ٤)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$

١٩ (أ)

الحل :

٥ ق + ٣ ق = ٤٠ ∴ ق = ٥

∴ القوتان ٢٥ ، ١٥ نيوتن

∴ القيمة الصغرى للمحصلة = ٢٥ − ١٥ = ١٠ نيوتن

٢٠ (ب)

الحل :

π نق (ل + نق) = ٦١٦ π ∴ نق (٣٠ + نق) = ٦١٦

∴ $نق^2$ + ٣٠ نق − ٦١٦ = ٠

∴ (نق − ١٤) (نق + ٤٤) = ٠

∴ نق = ١٤ سم.

أو نق = −٤٤ (مرفوض)

٢١ (أ)

الحل :

٥ س + ٣ ص + أ س + ٦ ص − ١٤ س + ب ص

= (١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°) س + (١٠ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°) ص

∴ (أ − ٩) س + (ب + ٩) ص = −١٠ س + ١٠ ص

∴ أ − ٩ = −١٠ ∴ أ = −١

، ب + ٩ = ١٠ ∴ ب = ١

∴ (أ ، ب) = (−١ ، ١)

٢٢ (جـ)



الحل :

٢ π نق = ٨٨

∴ ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٨٨

∴ نق = ١٤ سم

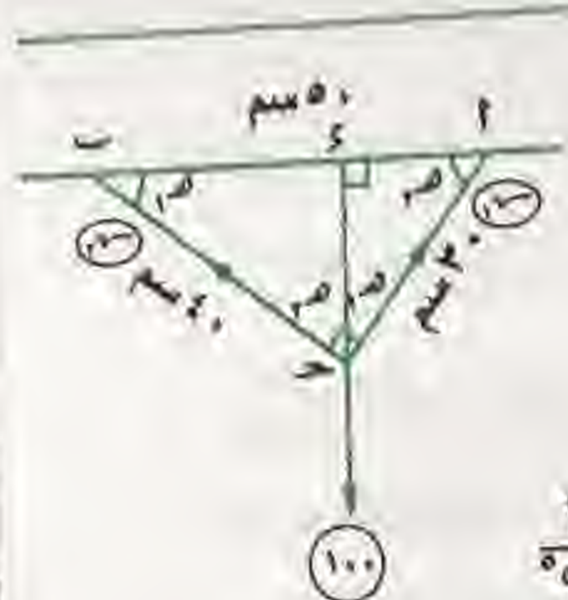
∴ ل = $\sqrt{١٤^2 + ٣٠^2}$ = ٢ $\sqrt{١٤٩}$ سم

∴ المساحة الجانبية = π نق ل

= $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ × ٢ $\sqrt{١٤٩}$

= ١٠٧٤ $سم^2$

٢٣ (د)



الحل :

من هندسة الشكل

وباستخدام قاعدة لامى :

∴ $\frac{ش_1}{جا هـ} = \frac{ش_2}{جا هـ} = \frac{١٠٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{٤٠}{٥٠}} = \frac{ش_2}{\frac{٣٠}{٥٠}} = \frac{١٠٠}{١}$

∴ $ش_1$ = ١٠٠ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ٨٠ نيوتن

، $ش_2$ = ١٠٠ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٦٠ نيوتن

∴ $ش_1 + ش_2$ = ١٤٠ نيوتن

٢٤ (ب)

الحل :

∵ مركز الدائرة م = (٦ ، −٣)

، نق = $\sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠}$ = ٥ وحدة طول

∴ صورة مركز الدائرة بانتقال (س + ٢ ، ص − ٢)

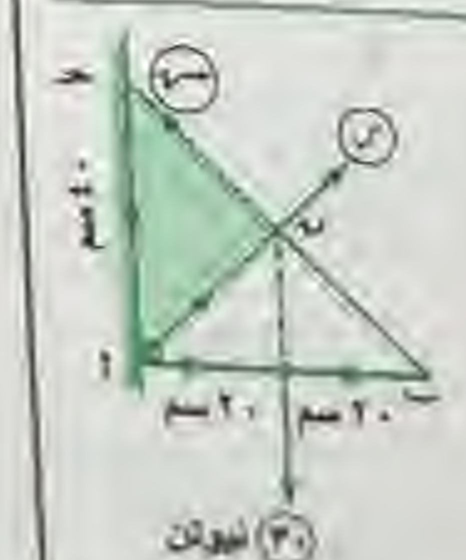
هى م = (٨ ، −٥)

، معادلة الدائرة الناتجة من الانتقال هى :

$(س - ٨)^2 + (ص + ٥)^2 = ٢٥$

٢٥ (جـ)

٢٦ (د)



الحل :

من هندسة الشكل :

ب جـ = ٤٠ $\sqrt{٢}$ سم

∴ ى جـ = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

، ٢٠ ى = ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم

Δ أ ى جـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ق}{٢٠\sqrt{٢}} = \frac{ش}{٢٠\sqrt{٢}} = \frac{٣٠}{٤٠}$

∴ ق = ش = $\frac{٢٠\sqrt{٢} \times ٣٠}{٤٠}$ = ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتن

٢٧ (أ)

الحل :

$\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = ٤٨٠

∴ $\frac{١}{٣}$ × $(١٢)^2$ × ع = ٤٨٠ ∴ ع = ١٠ سم

٢٨ (جـ)

٢٩ (د)

٣٠ (جـ)

الحل :

٧ − ٣ < ق < ٧ + ٣ ∴ ٤ < ق < ١٠

∴ ق يمكن أن تكون ٥

١٠ محافظة الأقصر

١ (ب)

٢ (ب)



الحل :

∴ ع = $\sqrt{(٢ ق)^2 - ق^2}$

= $\sqrt{٣}$ ق وحدة قوة

٣ (د)

الحل :

٤ س + ٥ ص + أ س − ٧ ص

+ ٣ س + ب ص = ٠

∴ (أ + ٧) س + (ب − ٢) ص = ٠

∴ أ + ٧ = ٠ ∴ أ = −٧

، ب − ٢ = ٠ ∴ ب = ٢

∴ أ + ٢ ب = −٧ + ٤ = −٣

٤ (د)



الحل :

ب جـ = $\sqrt{(٦٠)^2 + (٤٥)^2}$

= ٧٥ سم

وبتطبيق قاعدة لامى

$\frac{ش_1}{جا هـ} = \frac{ش_2}{جا هـ} = \frac{١٥٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_1}{\frac{٤٥}{٧٥}} = \frac{ش_2}{\frac{٦٠}{٧٥}} = \frac{١٥٠}{١}$

∴ $ش_1$ = ١٥٠ × $\frac{٤٥}{٧٥}$ = ٩٠ ث.جم

، $ش_2$ = ١٥٠ × $\frac{٦٠}{٧٥}$ = ١٢٠ ث.جم

∴ $ش_2 - ش_1$ = ١٢٠ − ٩٠ = ٣٠ ث.جم

٥ (جـ)

٦ (د)

الحل :

أ ب = $\sqrt{٣٠^2 - ٢٤^2}$ = ١٨ سم

Δ أ ب جـ مثلث القوى

∴ $\frac{ش}{٣٠} = \frac{ق}{٢٤} = \frac{٩٠}{١٨}$

∴ ش = $\frac{٩٠ \times ٣٠}{١٨}$ = ١٥٠ ث.جم

، ق = $\frac{٩٠ \times ٢٤}{١٨}$ = ١٢٠ ث.جم

∴ ش − ق = ١٥٠ − ١٢٠ = ٣٠ ث.جم

٧ (أ)



الحل :

∵ Δ جـ م ب فيه

ق (∠ جـ م ب)

= ٩٠°

∴ ب جـ = $\sqrt{٣٠^2 + ٤٠^2}$ = ٥٠ سم

∴ س = ٣٥ جتا ٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥°

+ ق جتا ٩٠° + ٢٥ جتا (٩٠° + هـ)

= ٣٥ + ١٠ + ٠ − ٢٥ جا هـ

= ٤٥ − ٢٥ × $\frac{٣٠}{٥٠}$ = ٣٠

، ص = ٣٥ جا ٠° + ١٠ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ق جا ٩٠° + ٢٥ جا (٩٠ + هـ)

= ٠ + ١٠ + ق + ٢٥ جتا هـ

= ١٠ + ق + ٢٥ × $\frac{٤٠}{٥٠}$ = ٣٠ + ق

∴ $\sqrt{(٣٠)^{٢} + (٣٠ + \text{ق})^{٢}}$ = ٥٠

∴ $(٣٠ + \text{ق})^{٢}$ = ١٦٠٠

∴ ٣٠ + ق = ٤٠ ومنها ق = ١٠ ث.جم

أ، ٣٠ + ق = − ٤٠ ∴ ق = − ٧٠ (مرفوض)

٨ (ب)

الحل :

ح = $\sqrt{١٦ + \text{ق}^{٢} + ٢ × ٤ × \text{ق} × \text{جتا } ١٢٠°}$

= $\sqrt{١٦ + \text{ق}^{٢} − ٤ \text{ ق}}$

= $\sqrt{\text{ق}^{٢} − ٤ \text{ ق} + ١٦}$

عندما : ق = ١

∴ ح = $\sqrt{١ − ٤ + ١٦}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة قوة

عندما : ق = ٢

∴ ح = $\sqrt{٤ − ٨ + ١٦}$ = $\sqrt{١٢}$ وحدة قوة

عندما : ق = ٣

∴ ح = $\sqrt{٩ − ١٢ + ١٦}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة قوة

عندما ق = ٤

∴ ح = $\sqrt{١٦ − ١٦ + ١٦}$ = ٤

∴ المحصلة أصغر ما يمكن عندما ق = ٢

٩ (د)

١٠ (جـ)

الحل :

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{ق}}{\text{جا } ١٥٠°} = \frac{١٠٠}{\text{جا } ١٢٠°}$

∴ ق = $\frac{١٠٠ × \text{جا } ١٥٠°}{\text{جا } ١٢٠°} = \frac{١٠٠}{\sqrt{٣}}$ نيوتن

١١ (ب)

الحل :

$\frac{\text{ح}_{١}}{\text{ح}_{٢}} = \frac{\sqrt{\text{ق}^{٢} + ٣ \text{ ق}^{٢}}}{\sqrt{\text{ق}^{٢} + ٣ \text{ ق}^{٢} + ٢ × \text{ق} × \sqrt{٣} \text{ ق} × \text{جتا } ١٥٠°}}$

= $\frac{\sqrt{٤ \text{ ق}^{٢}}}{\sqrt{٤ \text{ ق}^{٢} − ٣ \text{ ق}^{٢}}} = \frac{٢ \text{ ق}}{\text{ق}} = ٢$

∴ $\text{ح}_{١} = ٢ \text{ ح}_{٢}$

١٢ (جـ)

الحل :

ح = ٢ $\overline{\text{ص}}$

، س = ق جتا ٠° + ٦ جتا ٩٠°

+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥° + ك جتا ٢٧٠°

= ق + ٠ − ٤ − ٥ + ٠ = ق − ٩

، ص = ق جا ٠° + ٦ جا ٩٠° + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ ٥ $\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ك جا ٢٧٠°

= ٠ + ٦ + ٤ − ٥ − ك = ٥ − ك

∴ $\vec{\text{ح}}$ = (ق − ٩) $\overline{\text{س}}$ + (٥ − ك) $\overline{\text{ص}}$

∴ ق − ٩ = ٠ ، ومنها ق = ٩ نيوتن

، ٥ − ك = ٢ ومنها

ك = ٣ نيوتن

∴ ق − ك = ٩ − ٣ = ٦ نيوتن

١٣ (جـ)

الحل :

$(٢ \text{ ق} − ٥)^{٢} + (\text{ق} + ٢)^{٢} = (٣\sqrt{٥})^{٢}$

∴ ٤ ق² − ٢٠ ق + ٢٥ + ق² + ٤ ق + ٤ − ٤٥ = ٠

∴ ٥ ق² − ١٦ ق − ١٦ = ٠

∴ (ق − ٤) (٥ ق + ٤) = ٠

∴ ق = ٤ نيوتن أو ق = $\frac{−٤}{٥}$ (مرفوضة)

١٤ (ب)

الحل :

Δ م أ حـ هو مثلث القوى :

∴ $\frac{\frac{١}{٢} \text{ و}}{\text{م حـ}} = \frac{\text{و}}{\text{أ حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{م حـ}} = ٢$

∴ أ حـ = ٢ م حـ

، ∵ م منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ب حـ = أ حـ

∴ ق (∠ب أ حـ) = ٤٥°

١٥ (جـ)

الحل :

من هندسة الشكل

وبتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{\text{ش}_{١}}{\text{جا } (١٨٠° − \text{هـ})} = \frac{\text{ش}_{٢}}{\text{جا } ٩٠°} = \frac{\text{و}}{\text{جا } (٩٠° + \text{هـ})}$

∴ $\frac{\text{ش}_{١}}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{ش}_{٢}}{١} = \frac{\text{و}}{\text{جتا هـ}}$

∴ $\frac{\text{ش}_{١}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{\text{ش}_{٢}}{١} = \frac{\text{و}}{\frac{٣}{٥}}$

∴ $\text{ش}_{١} = \frac{\frac{٤}{٥} × \text{و}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٣} \text{ و}$

، $\text{ش}_{٢} = \frac{\text{و}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٥}{٣} \text{ و}$

∴ $\text{ش}_{١} + \text{ش}_{٢} = \frac{٤}{٣} \text{ و} + \frac{٥}{٣} \text{ و}$ = ٣ و ث.كجم

١٦ (أ)

١٧ (د)

الحل :

طول ضلع القاعدة = $\frac{٣٦}{٤}$ = ٩ سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

= $\frac{١}{٣} × ٩^{٢} × ١٠$ = ٢٧٠ سم³

١٨ (ب)

الحل :

نق = $\sqrt{٢٦^{٢} − ٢٤^{٢}}$ = ١٠ سم

∴ مساحة القاعدة = π نق²

= π × ١٠²

= ١٠٠ π سم²

١٩ (ب)

الحل :

حجم نصف الكرة = $\frac{١}{٢} × \frac{٤}{٣}$ π نق³

= $\frac{٢}{٣}$ π نق³ وحدة حجم

حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

∴ $\frac{١}{٣}$ π نق² ع = $\frac{٢}{٣}$ π نق³

∴ ع = ٢ نق

٢٠ (أ)

الحل :

ل = ٢ ، ك = ب ، نق = $\sqrt{\text{ب}^{٢}}$ = |ب|

، ∵ نق = |ك| ∴ الدائرة تمس محور السينات

٢١ (د)

الحل :

$\because$ حجم المخروط $= \frac{1}{3} \pi$ نق^2 ع

$\therefore \frac{1}{3} \pi$ نق$^2 \times 3 = 49 \pi$ $\therefore$ نق $= 7$ سم

$\therefore$ طول قوس القطاع = محيط الدائرة التي تمثل قاعدة المخروط $= 2 \pi \times 7 = 14 \pi$ سم

٢٢ (أ)

الحل :



نق $= \frac{1}{3} \sqrt{ل^2 - \left(\frac{1}{2} ل\right)^2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}$ ل

$\frac{\text{حجم الهرم الثلاثي المنتظم}}{\text{حجم أكبر مخروط يمكن وضعه داخل الهرم}}$

$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} ل^2 \times ع}{\frac{1}{3} \times \pi \text{ نق}^2 \times ع} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} ل^2}{\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{6} ل\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} ل^2}{\pi \times \frac{3}{36} ل^2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

٢٣ (ب)

الحل :

طول الحرف $= \frac{18}{6} = 3$ سم

حجم الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه

$= \frac{\sqrt{2}}{12} ل^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \times 27 = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ سم^3

٢٤ (د)

الحل :

نق $= \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 + 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4$ وحدة طول

، ل $= -1$ ، ك $= -2$ $\therefore$ جـ $= 1 + 4 - 16 = -11$

معادلة الدائرة هي :

س^2 + ص^2 − ٢ س − ٤ ص − ١١ = ٠

٢٥ (ب)

الحل :

د$_1$: (س + ٢)^2 + ص^2 = ١

$\therefore$ م$_1$ = (−٢ ، ٠) ، نق$_1$ = ١ وحدة طول

د$_2$: س^2 + ص^2 − ٢ س − ٨ ص − ١٩ = ٠

$\therefore$ م$_2$ = (١ ، ٤) ، جـ = −١٩

$\therefore$ نق$_2$ $= \sqrt{1 + 16 + 19} = 6$ وحدة طول

، $\because$ م$_1$ م$_2$ $= \sqrt{(-2 - 1)^2 + (0 - 4)^2} = 5$ وحدة

$\therefore$ م$_1$ م$_2$ = نق$_2$ − نق$_1$

$\therefore$ الدائرتان متماستان من الداخل

٢٦ (جـ)



الحل :

حجم الجسم الناتج

= ٢ حجم مخروط ارتفاعه $\frac{1}{2}$ ل

وطول نصف قطر قاعدته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ل

$= 2 \times \left(\frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} ل\right)^2\right) \times \frac{1}{2} ل$

$= \frac{1}{4} \pi$ ل^3 وحدة حجم

٢٧ (أ)



الحل :

مساحة المعين أ ب جـ ء

= ٢ × مساحة Δ أ ب ء

$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2$

$= 18\sqrt{3}$ سم^2

$\therefore$ حجم الهرم $= \frac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times 12 = 72\sqrt{3}$ سم^3

٢٨ (أ)

الحل :

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة الشكل السداسي × ارتفاع الهرم

$\therefore \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4} \times 6 \times \text{س}^2 \text{ ظتا } \frac{180^\circ}{6}\right) \times 4 = 8\sqrt{3}$

$\therefore$ ٢ س^2 × $\sqrt{3}$ = ٨ $\sqrt{3}$

$\therefore$ س^2 = ٤

$\therefore$ س = ٢ سم ويرفض السالب

$\therefore$ محيط القاعدة = ٢ × ٦ = ١٢ سم

٢٩ (جـ)

الحل :

معادلة الدائرة هي : س^2 + ص^2 = ١٦

$\therefore$ نق = $\sqrt{16}$ = ٤ وحدة طول

$\therefore$ مساحة سطح المضلع $= \frac{16}{2} \times 4^2 \times$ جا $\left(\frac{360}{16}\right)$

= ٤٨ وحدة مربعة

٣٠ (د)



الحل :

من هندسة الشكل

أ ب $= \sqrt{4 \text{ نق}^2 - \text{نق}^2}$

$= \sqrt{3}$ نق وحدة طول

النموذج الأول



امتحان إلكترونى ١

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ مخروط قائم طول راسمه يساوى طول قطر قاعدته فإن مساحته الكلية ....

(أ) ٤ π نق^{٢} (ب) ٣ π نق^{٢}

(جـ) ٣ π نق^{٣} (د) ٤ π نق^{٣}

٢ إذا كانت : أ ، ب ، حـ ثلاث نقط تعين مستوى فإن ....

(أ) أب = ب حـ = حـ أ (ب) أب + ب حـ = أ حـ

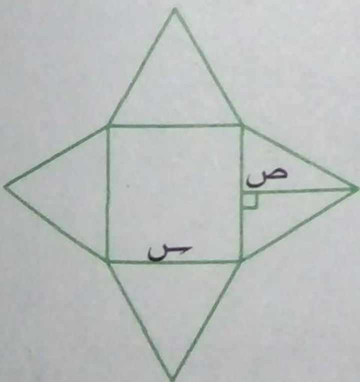
(جـ) أب + ب حـ > أ حـ (د) أب + ب حـ < أ حـ

٣ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٣}$ فإن مقدار كل منهما يساوى .... نيوتن.

(أ) $\sqrt{٣}$ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٣ $\sqrt{٣}$

٤ الشكل المقابل يمثل شبكة هرم رباعى منتظم ارتفاعه (ع)

فإن العلاقة بين س ، ص ، ع هى ....



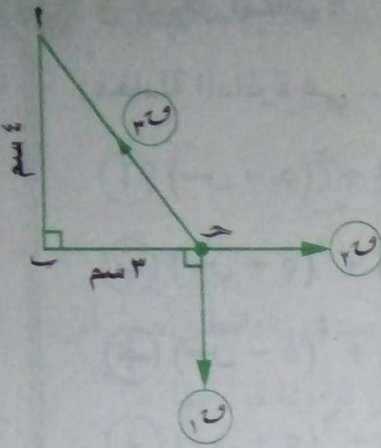
(أ) س^{٢} + ص^{٢} = ع^{٢}

(ب) س^{٢} + ع^{٢} = ص^{٢}

(جـ) $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ + ع^{٢} = ص^{٢}

(د) $\left(\frac{س}{٢}\right)^{٢}$ + ص^{٢} = ع^{٢}

٥ إذا كان الشكل المقابل يوضح اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $ق_٢$ ، $ق_٣$ نيوتن وأضلاع المثلث القائم توازى خطوط عمل هذه القوى وفى ترتيب دورى واحد فإن : $ق_١ : ق_٢ : ق_٣$ = ...



(أ) ٣ : ٤ : ٥
(ب) ٣ : ٥ : ٤
(جـ) ٤ : ٥ : ٣
(د) ٤ : ٣ : ٥

٦ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم ، أثرت القوى ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم فى الاتجاهات $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب.

أوجد المحصلة مقدارًا واتجاهًا.

٧ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^٣ وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^٢

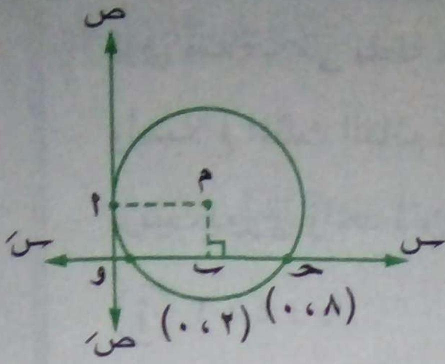
(أ) ٢٤٠
(ب) ٢٦٠
(جـ) ٣٠٠
(د) ٣٦٠

٨ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٣٦ π سم^٢ ، وطول راسمه ١٠ سم.

أوجد :

(١) مساحته الجانبية.
(٢) مساحته الكلية.
(٣) حجمه.

٩ في الشكل المقابل :



معادلة الدائرة هي ....

(أ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

(ب) $(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٣٦$

(د) $(س + ٥)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ٢٥$

---

١٠ قوتان مقداراهما ٦ ، ق ث.كجم تؤثران في نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التي مقدارها ق فإن مقدار المحصلة = ... ث.كجم

(أ) ٦ (ب) $٦\sqrt{٢}$ (جـ) $٦\sqrt{٣}$ (د) ١٠

---

١١ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم في حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ورد فعل المستوى.

---

١٢ إذا كانت : $\overleftarrow{ح}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ وكانت $\overleftarrow{ح َ}$ هي محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $-\overleftarrow{ق_٢}$ فإن : ....

(أ) $\overleftarrow{ح} + \overleftarrow{ح َ} = ٢ \overleftarrow{ق_١}$

(ب) $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ح َ} + ٢ \overleftarrow{ق_٢}$

(جـ) $ح^٢ + ح َ^٢ = ٢ (ق_١^٢ + ق_٢^٢)$

(د) كل ما سبق.

---

١٣ أوجد معادلة الدائرة التي هي صورة الدائرة :

$س^٢ + ص^٢ - ١٢ س + ٦ ص + ٢٠ = $ صفر بالانتقال (س + ٢ ، ص - ٢)

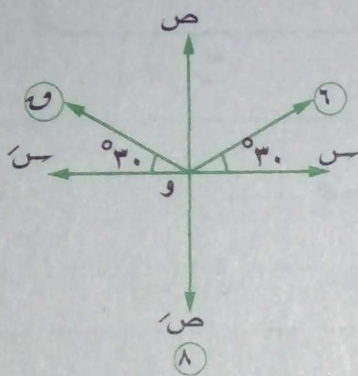
١٤ قوة مقدارها ٥ $\sqrt{3}$ نيوتن تؤثر فى اتجاه ٣٠° شرق الشمال حُللت إلى مركبتين متعامدتان فإن مقدار المركبة فى اتجاه الشرق = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) $7\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ (د) ١٥

١٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث.كجم متصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت عليه قوة أفقية ق عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° أوجد مقدار كل من القوة ورد الفعل.

١٦ إذا كانت محصلة القوى الموضحة بالشكل المقابل بوحدة النيوتن تؤثر فى محور ص

فإن : ق = ... نيوتن.



(أ) ٨ (ب) ٦

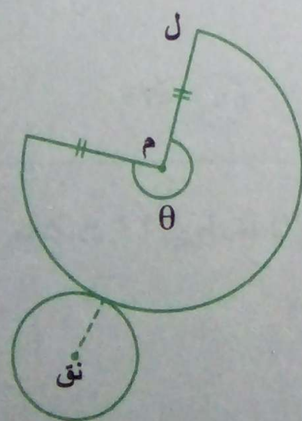
(جـ) ١٤ (د) ٢

١٧ مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠ سم صُهر وحُوّل إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١ سم أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢ ٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل. $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$

١٨ الشكل المقابل يمثل شبكة مخروط حيث أن

قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائرى = θ

حيث ١٨٠° $< \theta <$ ٣٦٠° فإن : ....



(أ) ل < ٢ نق (ب) ل = نق

(جـ) ل = ٢ نق (د) ل > ٢ نق

١٩ أى مجموعات القوى الآتية لا يمكن أن تكون متزنه ؟

(أ) ١٠ نيوتن ، ١٠ نيوتن ، ٥ نيوتن. (ب) ٤ نيوتن ، ٦ نيوتن ، ٨ نيوتن.

(جـ) ١١ نيوتن ، ٧ نيوتن ، ٨ نيوتن. (د) ٨ نيوتن ، ٤ نيوتن ، ١٤ نيوتن.

٢٠ إذا كانت المعادلة $(\text{س} \quad \text{ص} \quad ٢٥)\begin{pmatrix}\text{س}\\ \text{ص}\\ -٤\end{pmatrix} = \square$ تمثل معادلة دائرة فإن طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠



النموذج الثانى

امتحان إلكترونى ٢

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ أى ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة تعين ....

(أ) مستوى واحدًا. (ب) مستويين. (جـ) ٣ مستويات. (د) ٤ مستويات.

٢ إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتين فإن جيب زاوية ميل المحصلة على القوة الأولى يساوى ....

(أ) $\frac{٣}{٥}$ (ب) $\frac{٤}{٥}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٣ مركز الدائرة : $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، -٤) (ب) (-٤ ، ٣) (جـ) (-٣ ، ٤) (د) (-٣ ، -٤)

٤ ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين هى ....

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٥٠°

٥ حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤ سم وارتفاعه ١٥ سم = ... $سم^٣$

$(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

(أ) ٧٧ (ب) ١٠٥ (جـ) ١١٠ (د) ٧٧٠

٦ قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث.كجم وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث.كجم

أوجد مقدار كل من القوتين.

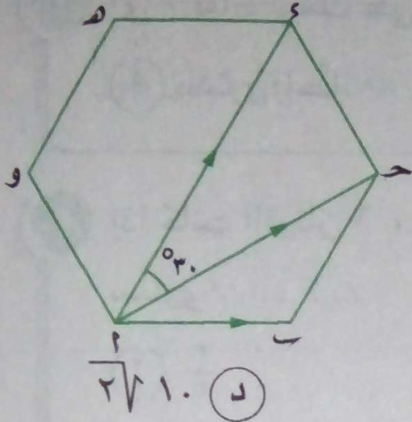
٧ قوى مستوية مقاديرها ٢ ك ، ٣ ك ، ٤ ك ث.جم تؤثر فى نقطة ، فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع فى ترتيب دورى واحد.

أوجد محصلة القوى مقدارًا واتجاهًا.

٨ أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم اثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أء}}$ حُللت هذه القوة إلى مركبتين فى الاتجاهين $\overleftarrow{\text{أحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$

فإن مركبة هذه القوة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أو}}$

تساوى .... نيوتن.



(أ) ١٠　(ب) ١٠ $\sqrt{3}$　(جـ) ٢٠　(د) ١٠ $\sqrt{2}$

٩ أوجد معادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −٣) وتمس المستقيم الذى معادلته :

٣ س − ٤ ص + ٢ = ٠.

١٠ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم رباعى منتظم فإن حجمه ....

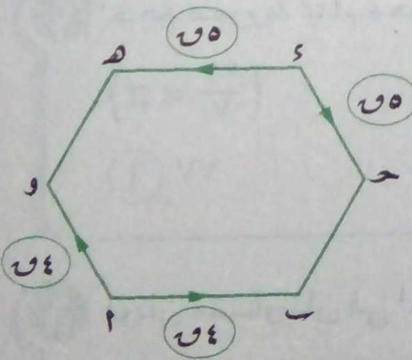
(أ) يتضاعف.　(ب) يتضاعف ثلاث مرات.

(جـ) يتضاعف أربع مرات.　(د) لا يتغير.

١١ فى الشكل المقابل :

أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم

فإن محصلة القوى تكون فى اتجاه ....



(أ) $\overleftarrow{\text{أء}}$　(ب) $\overleftarrow{\text{ءأ}}$

(جـ) $\overleftarrow{\text{أحـ}}$　(د) $\overleftarrow{\text{أهـ}}$

١٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.

أوجد :

(١) ارتفاع الهرم. (٢) المساحة الجانبية.

(٣) المساحة الكلية. (٤) حجم الهرم.

---

١٣ إذا كانت : $\overleftarrow{ق}_{١}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ − ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق}_{٢}$ = −٧ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{ق}_{٣}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ فإن : $\overleftarrow{ح}$ = ...

(أ) ٧ $\overleftarrow{س}$ − ٢ $\overleftarrow{ص}$ (ب) ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٤ $\overleftarrow{ص}$

(جـ) −١٤ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$ (د) $\overleftarrow{صفر}$

---

١٤ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ داين حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط.

أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط.

---

١٥ قوتان ق ، ق تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما ق فإن قياس الزاوية بين القوتان = ...

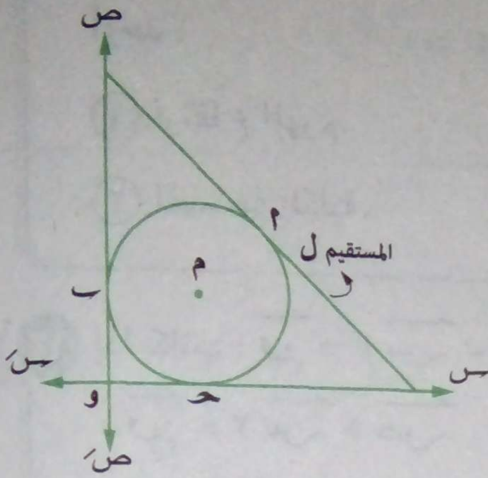
(أ) ٦٠° (ب) ٤٥° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

---

١٦ طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦ سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا.

أوجد ارتفاع المخروط.

١٧ في الشكل المقابل :



إذا كان معادلة المستقيم ل

هي $\frac{س}{٨} + \frac{ص}{٦} = ١$

فإن معادلة الدائرة هي ....

أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

ب) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ١٦$

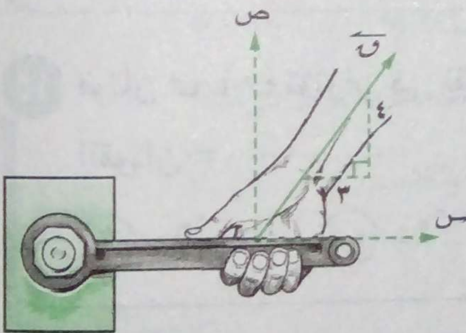
جـ) $(س + ٢)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ٤$

د) $(س + ٢)^٢ + (ص + ٢)^٢ = ١٦$

١٨ النسبة بين حجم هرم ثلاثى منتظم وحجم أكبر مخروط يمكن وضعه بداخل الهرم يساوى ....

أ) $\frac{٣\sqrt{٣}}{\pi}$ ب) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٢\pi}$ جـ) $\frac{\sqrt{٣}}{\pi}$ د) $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤\pi}$

١٩ في الشكل المقابل :



إذا كانت المركبة الصادية للقوة $(\overleftarrow{ق})$

لشخص يستخدم مفتاح للربط هى ٦٠ نيوتن.

فإن المركبة السينية للقوة $\overleftarrow{ق}$

تساوى .... نيوتن.

أ) ٣٠   ب) ٤٥

جـ) ٦٠   د) ٧٥



النموذج الثالث

امتحان إلكترونى ٣

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ، ٣ نيوتن وقياس الزاوية بينهما °٦٠ فإن مقدار محصلتهما ح يساوى .... نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٧ (د) ٨

٢ مخروط دائرى قائم ارتفاعه ١٢ سم وطول راسمه ١٥ سم يكون حجمه .... سم^{٣}

(أ) ٣٢٤ π (ب) ٧١٥ π (جـ) ٣٢ π (د) ١٨٠ π

٣ القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن ومتلاقيتان فى نقطة تساوى .... نيوتن.

(أ) صفر (ب) ٩ (جـ) ٤ (د) ٥

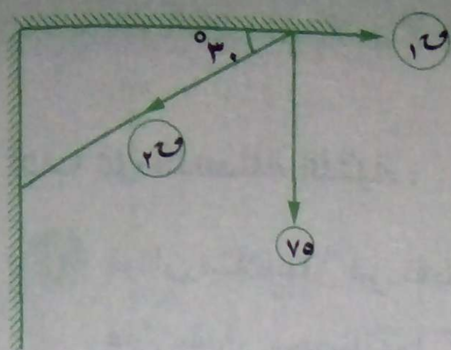
٤ أقل عدد من المستويات التى تحدد مجسمًا هو ....

(أ) ٣ مستويات. (ب) ٤ مستويات.

(جـ) مستويان. (د) ٥ مستويات.

٥ علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث.جم بخيطين طولاهما ٦٠ سم ، ٨٠ سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠ سم. **أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.**

٦ احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم وارتفاعه الجانبى ١٥ سم



٧ **فى الشكل المقابل :**

حُللت القوة الرأسية ٧٥ نيوتن

إلى مركبتين إحداهما أفقية ق_1 والأخرى ق_2

فإن : ق_2 = ... نيوتن

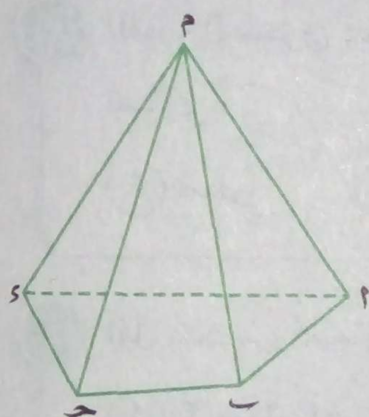
(أ) ٧٥ (ب) ٧٥ $\sqrt{3}$

(جـ) ١٥٠ (د) ١٥٠ $\sqrt{3}$

٨ قوتان مقداراهما ٦ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما 120°

أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الأولى.

٩ **فى الشكل المقابل :**



المستوى أ ب ء $\cap$ المستوى م جـ ء = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$

(جـ) {ء} (د) $\overleftrightarrow{\text{م جـ}}$

١٠ أثرت القوى ٨ ، ٤ $\sqrt{3}$ ، ٦ $\sqrt{3}$ ، ١٤ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية 30° وبين الثانية والثالثة 120° وبين الثالثة والرابعة 90° مرتبة فى اتجاه دورى واحد. **أوجد محصلة هذه القوى مقدارًا واتجاهًا.**

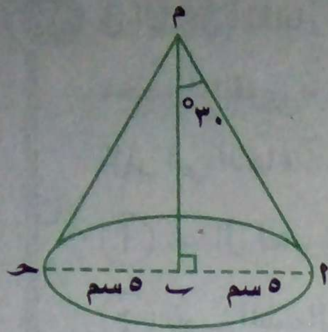
١١ شكل سداسى منتظم مركزه الهندسى نقطة الأصل ومساحته ٣ $\sqrt{3}$ سم^2

فإن معادلة الدائرة التى تمر برؤوسه هى ....

(أ) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 2$ (ب) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 4$

(جـ) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 6$ (د) $\text{س}^2 + \text{ص}^2 = 8$

١٢ في الشكل المقابل :



مخروط دائرى قائم فيه :

ق (∠ أ م ب) = ٣٠°

، طول نصف قطر القاعدة = ٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}

(أ) ٥٠ π (ب) ٧٥ π (جـ) ١٠٠ π (د) ١٢٥ π

١٣ قوتان ٦ ، ٢,٥ نيوتن ومحصلتهما تساوى ٦,٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بين القوتين تكون ....

(أ) حادة. (ب) منفرجة. (جـ) قائمة. (د) مستقيمة.

١٤ وضع جسم وزنه ١٠٠ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

١٥ هرم ثلاثى منتظم الوجوه إذا كان مجموع أطوال أحرفه = ٣٦ سم

فإن ارتفاع الهرم = ... سم

(أ) $\sqrt{٦}$ (ب) ٢ $\sqrt{٦}$ (جـ) ٦ (د) ٤

١٦ أثبت أن الدائرتين : س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س + ٦ ص + ١ = ٠

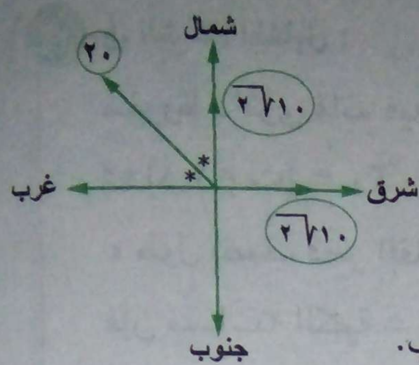
، ٤ س^{٢} + ٤ ص^{٢} − ٨ س + ٢٤ ص + ١٥ = ٠ متحدتان المركز

، أوجد طول نصف قطر كل منهما.

١٧ في الشكل المقابل :

محصلة القوى $١٠\sqrt{٢}$ ، $١٠\sqrt{٢}$ ، ٢٠ نيوتن

تؤثر في اتجاه ....



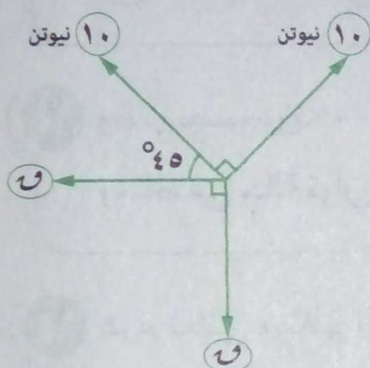
(أ) شمال الشرق. (ب) الشمال.

(جـ) غرب الشمال. (د) غرب الجنوب.

١٨ إذا كان حجم نصف كرة طول نصف قطرها نق يساوي حجم مخروط طول نصف قطر قاعدته (نق) وارتفاعه (ع) فإن : ....

(أ) ع = $\frac{٢}{٣}$ نق (ب) ع = ٢ نق (جـ) ع = ٢ نق^{٢} (د) ع = ٤ نق

١٩ شرط اتزان مجموعة القوى المقابلة ....



(أ) ق = ١٠ نيوتن.

(ب) ق = $١٠\sqrt{٢}$ نيوتن.

(جـ) ق = $٥\sqrt{٢}$ نيوتن.

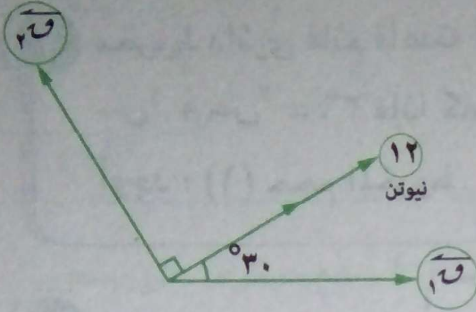
(د) المجموعة لا يمكن أن تتزن.



امتحان إلكترونى ٤

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ فى الشكل المقابل :



حللت القوة التى مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٩٠°

فإن : $ق_٢$ = ... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ١٠$\sqrt{٣}$ (جـ) ٦$\sqrt{٣}$ (د) ٤$\sqrt{٣}$

٢ هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩ سم ، حجمه ٣٠٠ سم^٣ يكون طول ضلع قاعدته يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٠

٣ قوتان متعامدتان مقداراهما ١٢ نيوتن ، ٥ نيوتن تؤثران فى نقطة فإن مقدار محصلتهما .... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٢ (جـ) ١٣ (د) ١٧

٤ أ ب حـ ء مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٨ سم. أخذت نقطة هـ على $\overline{أء}$ بحيث أ هـ = ٦ سم ، أثرت القوة التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦$\sqrt{١٠}$ نيوتن فى الاتجاهات $\overleftarrow{حـ ب}$ ، $\overleftarrow{حـ أ}$ ، $\overleftarrow{حـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ حـ}$ على الترتيب فإذا كانت مجموعة القوى متزنة.

أوجد قيمة كل من : ق ، ك

٥ جميع الحالات الآتية تعين مستوى ما عدا ....

(أ) مستقيمًا ونقطة لا تنتمى إليه. (ب) مستقيمين متوازيين مختلفين.

(جـ) مستقيمين متقاطعين. (د) مستقيمين متخالفين.

٦ أ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه : أ ب = ٣ سم ، ب حـ = ٤ سم

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المثلث أ ب حـ دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$

٧ مخروط دائرى قائم قاعدته أفقية تستند على مستوى الإحداثيات ومعادلتها

س^{٢} + ص^{٢} = ٣٦ فإذا كان ارتفاع المخروط ٨ وحدات طول.

أوجد : (١) حجم المخروط. (٢) مساحته الكلية.

٨ المعادلة (س ص ٨) $\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ -٢ \end{pmatrix}$ = ▱ تمثل دائرة طول قطرها = ... وحدة طولية.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٩ قوتان مقداراهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية قياس الزاوية بينهما ١٢٠°

فإذا كانت المحصلة عمودية على القوة الأولى فإن مقدار المحصلة = ... نيوتن.

(أ) ٤ $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٤ (د) ٤ $\sqrt{٥}$

١٠ علق جسم وزنه (و) نيوتن بواسطة خيطين خفيفين يميلان على الرأسى بزاويتين

قياساهما هـ° ، ٣٠° فاتزن الجسم عندما كان مقدار الشد فى الخيط الأول ١٢ نيوتن

والخيط الثانى ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

أوجد : (١) هـ° (٢) مقدار الوزن (و)

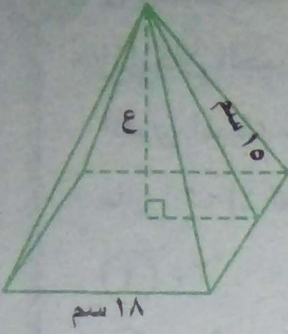
١١ إذا كان $\overline{\text{ق}}_١$ ، $\overline{\text{ق}}_٢$ قوتين فإن قياس الزاوية بين القوة $\overline{\text{ق}}_١$

ومحصلة القوتين ($\overline{\text{ق}}_١$ + $\overline{\text{ق}}_٢$) ، ($\overline{\text{ق}}_١$ − $\overline{\text{ق}}_٢$) تساوى ....

(أ) صفر (ب) ظا$^{-١}$ $\left(\frac{\text{ق}_١}{\text{ق}_٢}\right)$ (جـ) ظا$^{-١}$ $\left(\frac{\text{ق}_٢}{\text{ق}_١}\right)$ (د) ظا$^{-١}$ $\left(\frac{\text{ق}_١ - \text{ق}_٢}{\text{ق}_١ + \text{ق}_٢}\right)$

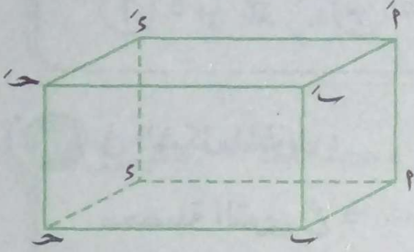
١٢ **فى الشكل المقابل :**

احسب حجم الهرم الرباعى المنتظم الذى طول ضلع قاعدته ١٨ سم ، وارتفاعه الجانبى ١٥ سم



١٣ أوجد معادلة الدائرة المارة بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، -٤) ويقع مركزها على محور السينات.

١٤ **فى الشكل المقابل :**

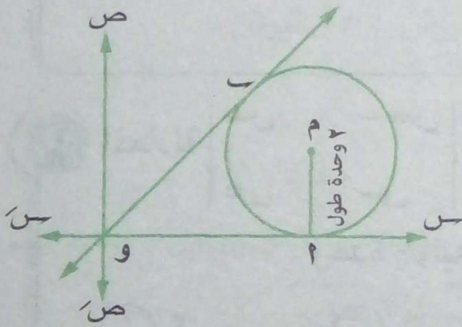


المستوى أ أَ بَ ∩ المستوى أَ حـ حـَ = ...

(أ) $\overleftrightarrow{\text{أ أَ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{ب بَ}}$

(جـ) $\overleftrightarrow{\text{حـ حـَ}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$

١٥ **فى الشكل المقابل :**



إذا كان : و ب = ٥ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م ....

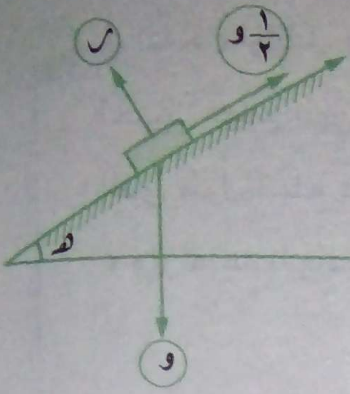
(أ) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(ب) $(س - ٢)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤$

(جـ) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٢٥$

(د) $(س - ٥)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

١٦ في الشكل المقابل :



إذا كان الجسم متزن تحت تأثير القوى المبينه بالشكل

فإن : ق (د هـ) = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ٤٥°　　(د) ١٥°

---

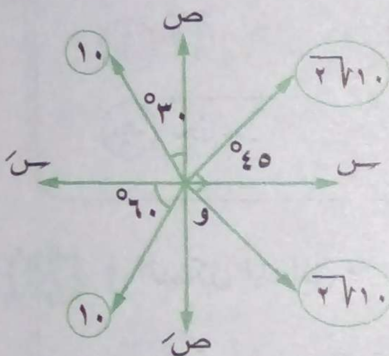
١٧ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٥ سم ومساحته الكلية ٩٠ π سم^2

فإن حجمه = ... سم^3

(أ) ١٠٥ π　　(ب) ٩٥ π　　(جـ) ١٠٠ π　　(د) ١٢٠ π

---

١٨ في الشكل المقابل :



محصلة القوى ح = ... نيوتن.

(أ) ٢٠　　(ب) ١٠√٢

(جـ) ١٠　　(د) صفر

---

١٩ المعادلة $\begin{vmatrix} س & -ص \\ ص & س \end{vmatrix}$ = ٣٦ تمثل معادلة دائرة طول نصف قطرها

= .... وحدة طوليه.

(أ) ٣　　(ب) ٦　　(جـ) ٩　　(د) ١٨

النموذج الخامس



امتحان إلكترونى ٥

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ يكون المستقيمان متخالفين إذا كانا ....

(أ) غير متوازيين.　　(ب) غير متقاطعين.

(جـ) غير منطبقين.　　(د) لا يجمعهما مستوى واحد.

---

٢ المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم ، ارتفاعه ٨ سم تساوى .... سم^2

(أ) ٦٠ π　　(ب) ٢٨ π　　(جـ) ١٠ π　　(د) ٤٨ π

---

٣ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما ٥ ق ، ٢ ق ومقدار محصلتهما ٧ ق فيكون قياس الزاوية بينهما ....

(أ) ١٨٠°　　(ب) ٦٠°　　(جـ) ٢٠°　　(د) صفر°

---

٤ إذا كانت ق تتزن مع قوتين متعامدتين مقداراهما ٨ نيوتن ، ١٥ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن.

(أ) ٧　　(ب) ١٧　　(جـ) ٢٣　　(د) ٧ $\sqrt{٢}$

---

٥ إذا كان : ق$_1$ = ٥ س + ٣ ص ، ق$_2$ = أ س + ٦ ص ، ق$_3$ = -١٤ س + ب ص ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة وكانت المحصلة ح = (١٠ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ π) فإن : أ + ب = ...

(أ) -١　　(ب) ١　　(جـ) صفر　　(د) ١٤

٦ مخروط دائرى قائم مساحته الكلية ٩٦ π سم^٢ وطول راسمه ١٠ سم

أوجد طول نصف قطر قاعدته ثم أوجد حجمه.

٧ كرة منتظمة ملساء طول نصف قطرها ١٠ سم ووزنها ٣٠ ث.جم علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ١٠ سم مثبت طرفه الآخر على حائط رأسى أملس.

أوجد فى وضع التوازن الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

٨ أثبت أن المساحة الكلية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه الذى طول حرفه ل سم تساوى $\sqrt{٣}$ ل^٢ سم^٢

٩ هرم رباعى منتظم مساحة أى وجه من أوجهه الجانبية تساوى مساحة قاعدته فإذا كان طول ضلع قاعدة الهرم = ٦ سم فإن حجم الهرم = ... سم^٣

(أ) ٣٦ (ب) ٦ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٣٦ $\sqrt{١٥}$ (د) ٢١٦ $\sqrt{١٥}$

١٠ أ ب حـ ء مربع طول ضلعه = ١٠ سم ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، أثرت القوى ٢ ، ٧ $\sqrt{٥}$ ، ٤ $\sqrt{٢}$ ، ٤ نيوتن فى الاتجاهات $\overrightarrow{حـ ب}$ ، $\overrightarrow{حـ هـ}$ ، $\overrightarrow{حـ أ}$ ، $\overrightarrow{حـ ء}$ على الترتيب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

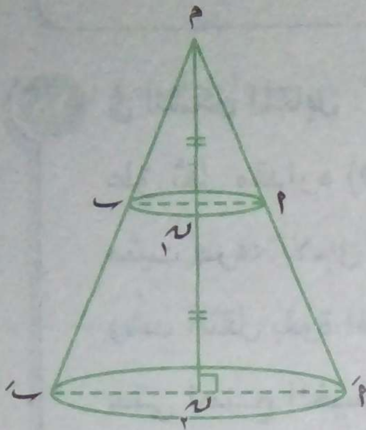
١١ قوتان مقداراهما ق ، ق $\sqrt{٣}$ نيوتن متلاقيان فى نقطة وكانت محصلتهما = $ح_١$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ٩٠° ثم أصبحت محصلتهما = $ح_٢$ عندما كانت قياس الزاوية بينهما ١٥٠° فإن : ....

(أ) $ح_١ = ح_٢$ (ب) $ح_١ = ٢ ح_٢$ (جـ) $ح_١ = \frac{٣}{٥} ح_٢$ (د) $ح_١ = \frac{١}{٢} ح_٢$

١٢ اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث : أ (٢ ، ٣) ، ب (-٤ ، ٩)

١٣ قوتان $ق_١$ ، $ق_٢$ القيمة العظمى لمحصلتهما ٢٥ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ١٣ نيوتن. أوجد $ق_١$ ، $ق_٢$ علمًا بأن $ق_١ > ق_٢$

١٤ في الشكل المقابل :



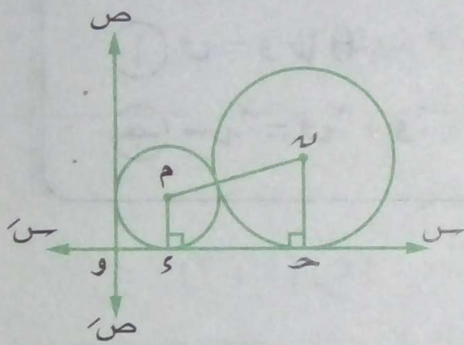
النسبة بين المساحة الجانبية للمخروط م أ ب

إلى مساحة الجانبية للمخروط م أَ بَ تساوى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٤

(جـ) ١ : ٦ (د) ١ : ٨

١٥ في الشكل المقابل :



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج

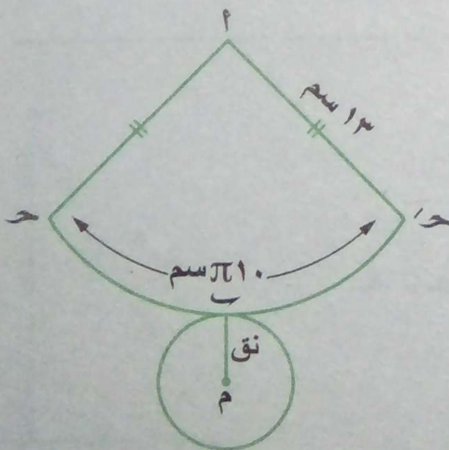
معادلتيهما $(س - ٢)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٤$

، $(س - أ)^٢ + (ص - ب)^٢ = ٦٤$

فإن : قيمة أ + ب = ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٨ (د) ٢٨

١٦ الشبكة التى أمامك تصف مجسم



، حجمه = ... سم^٣

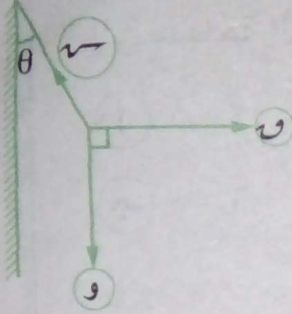
(أ) ٢٥ π (ب) ٥٠ π

(جـ) ٧٥ π (د) ١٠٠ π

١٧ قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تؤثر رأسيًا لأعلى تم تحليلها إلى مركبتين إحداهما أفقية ومقدارها ٢٠ نيوتن فإن مقدار المركبة الثانية = ...

(أ) ٢٠   (ب) ٢٠ $\sqrt{٢}$ (ج) ١٠   (د) ٢٠ $\sqrt{٥}$

١٨ فى الشكل المقابل :



علق ثقل مقداره (و) نيوتن فى طرف خيط مثبت طرفه الاخر فى حائط رأسى وشُد الثقل بقوة افقية مقدارها ق نيوتن حتى اصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها θ أى الجمل الآتية غير صحيح فى وضع الاتزان ....

(أ) ق = و طا θ   (ب) $\overleftarrow{و}$ + $\overleftarrow{ق}$ + $\overleftarrow{ش}$ = $\overleftarrow{صفر}$

(ج) ش^{٢} = ق^{٢} + و^{٢} (د) ش = ق + و

النموذج السادس



امتحان إلكترونى ٦

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ المساحة الجانبية للمخروط القائم الذى طول نصف قطر قاعدته نق وطول راسمه ل تساوى ....

(أ) ٢ π ل نق (ب) ٢ π ل $نق^٢$ (جـ) π ل نق (د) π ل $نق^٢$

٢ أى قوتين مما يأتى لا يمكن أن تكون مقدار محصلتها ٤ نيوتن ....

(أ) ٢ نيوتن ، ٤ نيوتن. (ب) ٣ نيوتن ، ٣ نيوتن.

(جـ) ٢ نيوتن ، ٦ نيوتن. (د) ٣ نيوتن ، ٨ نيوتن.

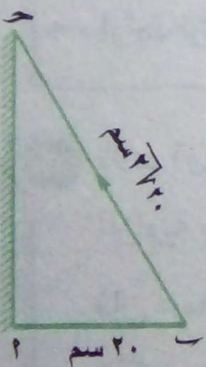
٣ النقطة التى تقع على الدائرة $(س - ٢)^٢ + ص^٢ = ١٣$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٤ عدد المستويات التى تحمل أوجه الهرم الخماسى هو ....

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) عدد لا نهائى.

٥ $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٢٠ سم ووزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل مثبت فى حائط رأسى عند أ والطرف ب مربوط بخيط خفيف طوله ٢٠ $\sqrt{٢}$ سم مثبت طرفه الآخر عند جـ على الحائط أعلى أ فإذا اتزن القضيب أفقيًا فإن رد فعل المفصل على القضيب ....



(أ) فى اتجاه $\overleftarrow{أب}$ (ب) خط عمله يبعد عن الحائط مسافة ١٠ سم

(جـ) ينصف $\overline{جـب}$ (د) مقداره ١٥ نيوتن.

٦ علق ثقل مقداره ٣٤٠ ث.جم بواسطة خيطين طولاهما ١٦ سم ، ٣٠ سم من نقطتين فى خط أفقى واحد البعد بينهما ٣٤ سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

٧ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٥ ، −٤) وتمس محور السينات هى ....

(أ) $س^2 + ص^2 - ١٠ س + ٨ ص + ٢٥ = ٠$

(ب) $س^2 + ص^2 - ٥ س + ٤ ص = ٠$

(جـ) $س^2 + ص^2 - ١٠ س + ٨ ص = ٢٥$

(د) $س^2 + ص^2 + ١٠ س - ٨ ص + ٢٥ = ٠$

٨ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم عُلِّق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ، ثُبت طرفاهما فى نقطة واحدة ، فإذا كان طولا الخيطين : ٨٠ سم ، ٦٠ سم فأوجد مقدار الشد فى كل منهما.

٩ إذا كانت $\overrightarrow{ح}$ محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ وكانت $\overrightarrow{ح} \perp \overrightarrow{ق_1}$ وكانت $ح = \frac{1}{2} ق_2$ فإن قياس الزاوية بين القوتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ هى ....

(أ) ٩٠° (ب) ١٢٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٥٠°

١٠ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^3 أوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

١١ ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة وملاقية فى نقطة ، فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠°

فإن : مقدار ك = ... نيوتن.

(أ) $٣٠\sqrt{٣}$ (ب) $٣٠\sqrt{٢}$ (جـ) ٣٠ (د) ٦٠

(١٢) مخروط قائم حجمه ٢٧ π سم^٣ ومحيط قاعدته ٦ π سم. أوجد ارتفاعه.

(١٣) النسبة بين المساحة الجانبية للهرم الثلاثى المنتظم الوجوه إلى مساحته الكلية = ... : ....

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٤ (جـ) ٣ : ٤ (د) ١ : ٢

(١٤) أ ب حـ ء هـ و شكل سداسى منتظم. تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٤ $\sqrt{٣}$ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٣}$ ، ٤ ث.كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أحـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(١٥) طول القطعة المماسة المرسومة للدائرة س^٢ + ص^٢ = نق^٢ من النقطة (٠ ، ٢ نق) هو ....

(أ) نق (ب) ٢ نق (جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

(١٦) أ ب حـ مثلث متساوى الساقين : أ ب = أ حـ = ١٠ سم ، ب حـ = ١٢ سم دار دورة كاملة حول قاعدته $\overline{ب حـ}$ احسب حجم الجسم الناشئ من الدوران.

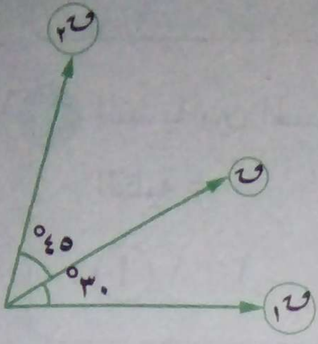
(١٧) أ ب حـ ء أَ بَ حَ ءَ مكعب طول حرفه ٢٠ سم وضع بداخله مخروط دائرى قائم بحيث رأس المخروط هو مركز القاعدة أَ بَ حَ ءَ وقاعدة المخروط تمس أضلاع القاعدة أ ب حـ ء فإن النسبة بين حجم المخروط والمكعب = ...

(أ) $\frac{\pi}{١٢}$ (ب) $\frac{\pi}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١٢}{\pi}$

(١٨) في الشكل المقابل :

القوة $\overleftarrow{ق}$ هى محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$

فإن : $\frac{ق_١ + ق_٢}{ق} = $ ....



(أ) حا ٣٠° + حا ٤٥°

(ب) $\frac{\text{حا } ٧٥° + \text{حا } ٣٠°}{\text{حا } ٧٥°}$

(جـ) $\frac{\text{حا } ٤٥° + \text{حا } ٣٠°}{\text{حا } ٧٥°}$

(د) $\frac{\text{حا } ٧٥°}{\text{حا } ٣٠°} + \frac{\text{حا } ٧٥°}{\text{حا } ٤٥°}$

(١٩) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقداراهما $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث $٠ \leq ق_١ \leq ١٣$ ، $٨ \leq ق_٢ \leq ١٧$

وقياس الزاوية بينهما ١٨٠° ومقدار محصلتهما ح فإن : ....

(أ) $٣ \leq ح \leq ٤$

(ب) $٠ \leq ح \leq ٤$

(جـ) $٠ \leq ح \leq ١٧$

(د) $٥ \leq ح \leq ١٧$

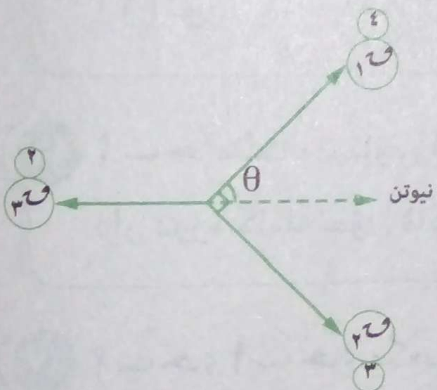
(٢٠) الشكل المقابل يمثل ثلاث قوى

$\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٢ نيوتن

على الترتيب فإذا كانت : حا $\theta = \frac{٣}{٥}$

فإن مقدار محصلة هذه القوى

يساوى .... نيوتن.



(أ) ١

(ب) ٢

(جـ) ٣

(د) ٥

النموذج السابع



امتحان إلكترونى ٧

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ إذا بلغت محصلة قوتين تؤثران فى نقطة قيمتها العظمى فإن قياس الزاوية بين خطى عملهما يساوى ....

(أ) ١٨٠° (ب) ١٢٠° (جـ) صفر$^\circ$ (د) ٦٠°

---

٢ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم وارتفاعه الجانبى ١٣ سم تكون مساحته الجانبية .... سم^٢

(أ) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (جـ) ١٣٠ (د) ٥٢٠

---

٣ مركز الدائرة $س^٢ + ص^٢ - ٦ س + ٨ ص = ٠$ هو النقطة ....

(أ) (٣ ، −٤) (ب) (٤ ، −٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (−٤ ، ٣)

---

٤ إذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى مقدرة بالنيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت : $\overleftarrow{ق_١} = ٢ \overleftarrow{س} - ٣ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢} = ٣ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$

فإن : $\overleftarrow{ق_٣}$ = ... نيوتن.

(أ) $٥ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$ (ب) $-٥ \overleftarrow{س} - ٢ \overleftarrow{ص}$

(جـ) $\sqrt{٢٩}$ (د) $\sqrt{٣٤}$

---

٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. **احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.**

---

٦ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م (−٢ ، ٥) وتمر بالنقطة (٣ ، ٢) هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ١٠ ص - ٥ = ٠$

(ب) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ١٠ ص - ٥ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ٢ س - ٥ ص - ٥ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ١٠ ص - ٢٥ = ٠$

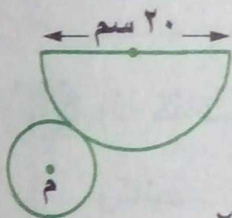
٧ إذا كان المستقيم ل // المستوى س ، أ ∈ س فإن : ل ∩ س = ...

(أ) ∅ (ب) ل (جـ) {أ} (د) س

٨ هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٢٤٠ $سم^٢$ وارتفاعه الجانبى ١٢ سم ....

أوجد : (١) ارتفاع الهرم. (٢) حجم الهرم.

٩ إذا طوينا هذه الشبكة لتصبح مخروطًا



فإن نصف قطر قاعدته = ...

(أ) ١٠ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٥ سم (د) ٢,٥ سم

١٠ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث.كجم يؤثر فى مركزها ، موضوعة بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٦٠°

أوجد رد فعل كل من المستويين.

١١ حجم مخروط قائم طول راسمه = ١٥ سم ، مساحته الكلية = ٢١٦ π $سم^٢$ يساوى .... $سم^٣$

(أ) ٢٠٥ π (ب) ٣٢٠ π (جـ) ٣٨٠ π (د) ٣٢٤ π

١٢ إذا كانت ح هى محصلة قوتين $ق_١$ ، $ق_٢$ حيث : $ق_٢ > ق_١$ فأى من الشروط الآتية تكفى لجعل ح ⊥ $ق_١$ ....

(أ) $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢$ (ب) $ح^٢ = ق_٢^٢ - ق_١^٢$

(جـ) $\overleftarrow{ق_١} \perp \overleftarrow{ق_٢}$ (د) جميع ما سبق.

١٣ أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٥ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، $٤\sqrt{٢}$ ، ٩ ث.جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ د}$ على الترتيب ، عيِّن محصلة هذه القوى.

١٤ إذا كانت : $س^٢ + ص^٢ + ٢ (جتا θ) س - ٢ (جا θ) ص - ٨ = ٠$ تمثل معادلة دائرة فإن : نق = ... وحدة طول.

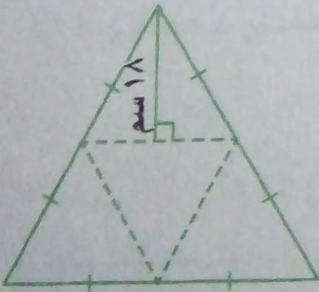
(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٢}$ (جـ) ٣ (د) ٨

١٥ أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها $ق_١$ ، $٦\sqrt{٢}$ ، $٨\sqrt{٢}$ ، $ق_٢$ ثقل جرام والقوة الأولى فى اتجاه الشرق والثانية فى اتجاه الشمال الشرقى والثالثة فى اتجاه الشمال الغربى والرابعة تؤثر فى اتجاه الجنوب فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوى ٧ ثقل جرام وتؤثر فى اتجاه الشرق. **فأوجد :** $ق_١$ ، $ق_٢$

١٦ عند طى الشبكة التى أمامك

ما هو الجسم الناتج ؟

وأوجد مساحته الكلية وحجمه



١٧ أ ب جـ ء هـ شكل خماسى منتظم أثرت قوة مقدارها ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ ثم حُللت هذه القوة فى اتجاهين $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تساوى .... نيوتن.

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٠ $\sqrt{٣}$ (د) ١٢,٤

١٨ مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥ سم وارتفاعه ٢٠ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٦٠٠ π (ب) ٣٧٥ π (جـ) ١٨٧٥ π (د) ٥٦٢٥ π

النموذج الثامن



امتحان إلكترونى ٨

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان مقداراهما ٨ ، ق ث.جم وقياس الزاوية بينهما ∋]٠ ، π[، ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن : ق = ... ث.جم.

(أ) ٢ $\sqrt{2}$ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٢ حجم هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم وارتفاعه ١٠ سم يساوى .... سم^3

(أ) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٣٦٠ (د) ٢٧٠

٣ محيط الدائرة التى معادلتها : س^2 + ص^2 = ٨ هو ....

(أ) ٨ π (ب) ٦٤ π (جـ) ٢ $\sqrt{2}$ π (د) ٤ $\sqrt{2}$ π

٤ إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع .... الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

(أ) جيب تمام (ب) جيب (جـ) ظل (د) ظل تمام

٥ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار كل منهما ق نيوتن فإذا كان مقدار محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(أ) صفر (ب) ٣٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°

٦ هرم سداسى منتظم حجمه ٨ $\sqrt{3}$ سم^3 وارتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته.

٧ قوة مقدارها $١٠\sqrt{٢}$ ثقل. جرام تعمل فى اتجاه الجنوب الشرقى تم تحليلها إلى مركبتين متعامدين فإن مقدار مركبة القوة فى اتجاه الجنوب = ... ثقل. جرام.

(أ) $١٠\sqrt{٣}$ (ب) $١٠\sqrt{٢}$ (جـ) ١٠ (د) ٥

٨ الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (٢ ، −١) وطول نصف قطرها ٣ سم هى ....

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٢ ص - ٤ = ٠$

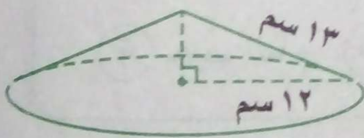
(ب) $س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ص - ٤ = ٠$

(جـ) $س^٢ + ص^٢ + ٤ س - ٢ ص - ٤ = ٠$

(د) $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٢ ص - ١٦ = ٠$

٩ جسم وزنه ٢٤ نيوتن معلق فى أحد طرفى خيط طوله ١٣٠ سم وطرفه الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أثرت على الجسم قوة أفقية ق ، أوجد مقدار ق والشد فى الخيط عندما يكون الجسم على بعد ٥٠ سم من الحائط.

١٠ الزاوية المركزية للقطاع الذى إذا طويناه أصبح المخروط الموضح تكون ....



(أ) حادة. (ب) منفرجة.

(جـ) مستقيمة. (د) منعكسة.

١١ أثرت قوى مقاديرها ق ، ٨٠ ، ك ، ٥٠ ، $٨٠\sqrt{٣}$ ث.كجم فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق ، ٣٠° شرق الشمال ، الشمال ، الغرب ، الجنوب على الترتيب.

أوجد قيمتى ق ، ك إذا كانت محصلة القوى = ٤٠ ث.كجم فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق.

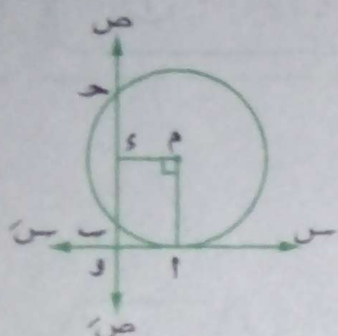
١٢ عدد المستويات التى تمر بنقطتين معلومتين هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى.

١٣ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

أوجد مساحته الكلية ثم أوجد حجمه.

١٤ فى الشكل المقابل :



دائرة م تمس محور السينات عند أ

و ب = ٢ وحدة طول ، ب جـ = ٦ وحدة طول

فإن معادلة الدائرة م هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٦$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س - ٤)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ١٦$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٥ وضع جسم وزنه ٦ ث.كجم على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°

وحفظ فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية.

أوجد كلًا من مقدار القوة الأفقية ورد فعل المستوى على الجسم.

١٦ أوجد قيم ك التى تجعل الدائرتين :

$د_١ : (س + ٢)^٢ + (ص + ١١)^٢ = ك$ ، $د_٢ : (س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٦$

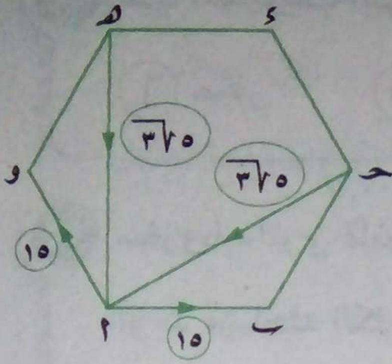
متماستين.

١٧ إذا كانت محصلة قوتين متعامدتين تميل على القوة الكبرى بزاوية قياسها θ فأى القيم

الأتية تصلح قيمة لـ θ ؟ ....

(أ) ٩٠° (ب) ٧٠° (جـ) ٤٥° (د) ١٠°

١٨ في الشكل المقابل :



أب حـ ء هـ و سداسي منتظم

أثرت القوى ١٥ ، ٥√٣ ، ٥√٣ ، ١٥ على الترتيب

في الأضلاع $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{أو}}$

فإن المحصلة ح = ... نيوتن.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٥ (د) صفر

النموذج التاسع



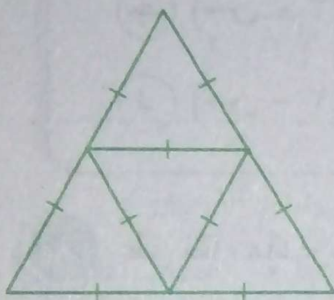
امتحان إلكترونى ٩

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ قوتان متعامدتان مقداراهما ٢ ق − ٥ ، ق + ٢ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، مقدار محصلتهما يساوى ٣ $\sqrt{5}$ نيوتن فإن : ق = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٢ أى المجسمات يعبر عن الشبكة المقابلة : ....



(أ) هرم رباعى.

(ب) هرم باعى منتظم.

(جـ) هرم ثلاثى منتظم الوجوه.

(د) غير ذلك.

٣ مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠ سم³ فإن حجمه عندما يتضاعف ارتفاعه يساوى .... سم³

(أ) ١٠٠ (ب) ٢٠٠ (جـ) ٤٠٠ (د) ٨٠٠

٤ وضع جسم وزنه ١٨ ثقل كجم على مستوٍ مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة قدرها (ق) تميل على اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° **فأوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.**

٥ قوة مقدارها ٤ $\sqrt{2}$ تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها إلى مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى .... نيوتن.

(أ) ٤ (ب) ٤ $\sqrt{2}$ (جـ) ٨ (د) ٨ $\sqrt{2}$

٦ هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٤٠ سم وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته السطحية = ... سم^٢

(أ) ٢٠٠ (ب) ٢٤٠ (جـ) ٢٦٠ (د) ٣٢٠

٧ معادلة الدائرة التى يمسها المستقيم س + ص = ٢ ومركزها (٣ ، ٥) هى ....

(أ) (س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ٣ $\sqrt{٢}$

(ب) (س + ٣)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ١٨

(جـ) (س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ١٢

(د) (س − ٣)^٢ + (ص − ٥)^٢ = ١٨

٨ علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف والطرف الآخر مثبت فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°

أوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

٩ $\overline{أ ب}$ قضيب منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ٨ ث.كجم يتصل طرفه أ بحائط رأسى بواسطة مفصل ، حفظ القضيب فى وضع أفقى بربطه من إحدى نقطة حـ حيث : أ حـ = ٤ أمتار بأحد طرفى خيط ثم ثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ء على الحائط الرأسى فوق أ وعلى بعد ٤ أمتار منها. **احسب مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.**

١٠ اكتب معادلة الدائرة التى تمس محور السينات عند النقطة (−٢ ، ٠) وتقطع من الجزء الموجب لمحور الصادات وترًا طوله ٤ $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

١١ قوتان متساويتان فى المقدار محصلتهما ٢٤ نيوتن وتميل على القوة الأولى بزاوية قياسها °٣٠ فإن مقدار أى من هاتين القوتين = ... نيوتن.

(أ) ٨ (ب) ٨ $\sqrt{٣}$ (جـ) ٨ $\sqrt{٢}$ (د) ١٢

١٢ قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨ سم وقياس زاويته المركزية °٦٠ طوى ولصق نصفا قطره ليكون أكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. **أوجد حجم هذا المخروط.**

١٣ النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثى المنتظم الوجوه وارتفاعه = ... : ....

(أ) $\sqrt{٢}$: $\sqrt{٣}$ (ب) $\sqrt{٣}$: ٢ (جـ) $\sqrt{٦}$: ٢ (د) $\sqrt{٣}$: ٣

١٤ ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، الأولى نحو الشرق ، الثانية تصنع زاوية قياسها °٣٠ غرب الشمال والثالثة تصنع زاوية قياسها °٦٠ جنوب الغرب.

أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

١٥ مخروط دائرى قائم مساحة قاعدته ٢٥ π سم^{٢} وطول راسمه ١٣ سم فإن مساحته الجانبية = ... سم^{٢}

(أ) ٥٠ π (ب) ٦٥ π (جـ) ٩٠ π (د) ١٠٠ π

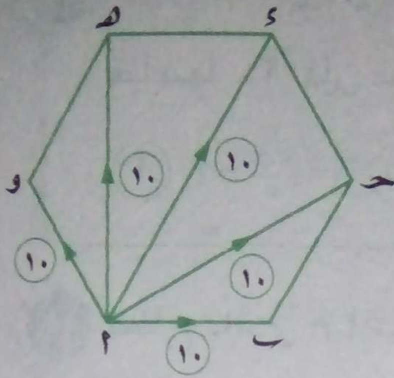
١٦ قوتان مقداراهما ق ، ٢ ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وكانت المحصلة عمودية على إحداهما فإن قياس الزاوية بين القوتين = ...

(أ) °٦٠ (ب) °٩٠ (جـ) °١٢٠ (د) °١٣٥

١٧ النقطة التى تقع على الدائرة : (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، −٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

١٨ أثرت خمس قوى متساوية فى المقدار ومقدار كل منها ١٠ نيوتن فى أحد رؤوس سداسى منتظم وفى اتجاهات الرؤوس الأخرى للسداسى كما بالشكل المقابل



فإن محصلة هذه القوى = ... نيوتن

(أ) ٥٠ (ب) ٢٠ (جـ) $٣٠\sqrt{٣}$ (د) $(٢٠ + ١٠\sqrt{٣})$

النموذج العاشر



امتحان إلكترونى ١٠

أجب عن الأسئلة الآتية :

١ النقطة التى تقع على الدائرة $س^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٢٠$ هى ....

(أ) (٢ ، ٣) (ب) (٣ ، -٢) (جـ) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٣)

٢ قوتان ٣ ، ٤ نيوتن محصلتهما ٧ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما هو ....

(أ) صفر° (ب) ٦٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

٣ إذا كانت : $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ومتزنة

فإن مقدار محصلة $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ...

(أ) $ق_١$ (ب) $ق_١ + ق_٢$ (جـ) $ق_٣$ (د) صفر

٤ قوتان مقداراهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان قياس الزاوية بينهما ١٢٠° ومحصلتهما ق $\sqrt{٣}$ نيوتن فإن : ق = ... نيوتن

(أ) ٤ (ب) ٤ $\sqrt{٢}$ (جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ (د) ٨

٥ مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧ سم وارتفاعه ١٥ سم

فإن مساحته الكلية = ... $سم^٢$

(أ) ٢٠٠ π (ب) ١٣٦ π (جـ) ٣٢٠ π (د) ٤٠٠ π

٦ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

أوجد : (١) المساحة الجانبية للهرم. (٢) حجم الهرم.

٧ إذا كانت (و) هى نقطة الأصل لنظام إحداثى متعامد فى المستوى وكانت $\overleftarrow{ق}$ = (٨ ث.كجم ، ١٣٥°) قوة تؤثر فى نقطة و فإن مركبة القوة $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه محور الصادات تساوى ....

(أ) $-٤\sqrt{٢}$ (ب) $٤\sqrt{٢}$ (جـ) $٤\sqrt{٣}$ (د) ٤

٨ أ ب جـ د هـ و سداسى منتظم. أثرت قوى مقاديرها ٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، ٤ ، $٣\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أد}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

٩ علق ثقل مقداره ٣٢ نيوتن فى طرف خيط طوله ١٠ سم وثبت الطرف الآخر للخيط فى حائط رأسى ثم شد الثقل بقوة أفقية أبعدته عن الحائط فاتزن عندما كان الثقل يبعد عن الحائط مسافة ٦ سم. أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط.

١٠ وضع جسم وزنه ١٨ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية قدرها ق نيوتن.

أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

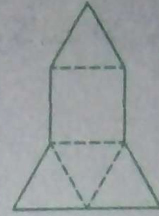
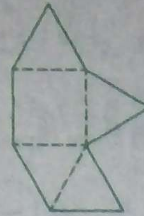
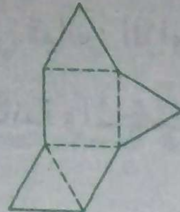
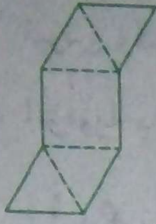
١١ معادلة الدائرة التى مركزها (-٤ ، ٣) وتمر بنقطة الأصل هى ....

(أ) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٥$ (ب) $(س - ٤)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٢٥$

(جـ) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٦٢٥$ (د) $(س + ٤)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

١٢ إناء أسطوانى الشكل به ماء ، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ، ارتفاعه ١٢ سم وطول نصف قطر قاعدته ٢ سم غمرًا كاملًا ، فارتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١ سم أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

١٣ أى الشبكات التالية لا تصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها ....

(أ) (ب) (جـ) (د)

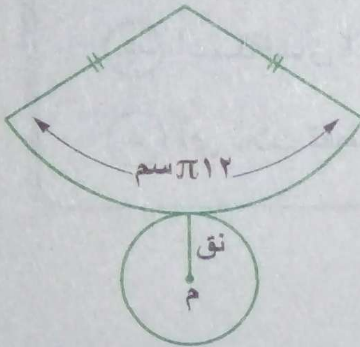
١٤ خمس قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة مقاديرها ١٢ ، ٩ ، ٥ $\sqrt{٣}$ ، ٧ $\sqrt{٢}$

، ٧ ث.كجم تعمل فى اتجاهات الشرق ، الشمال ، الشمال الغربى

، الجنوب الغربى ، الجنوب على الترتيب. أثبت أن المجموعة متزنة.

١٥ الشبكة التى أمامك تصف مجسمًا حجمه ٩٦ π سم^{٣}

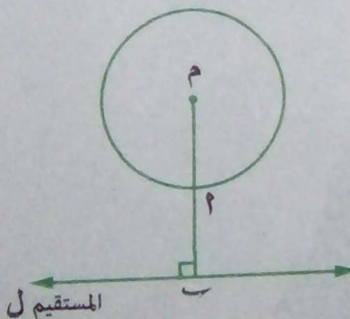
فإن مساحته الكلية = ... سم^{٢}



(أ) ٩٦ π (ب) ٤٨ π

(جـ) ٣٢ π (د) ١٦ π

١٦ فى الشكل المقابل :



إذا كانت معادلة الدائرة هى

$س^{٢} + ص^{٢} - ٦ س + ٤ ص - ١٢ = ٠$

، $\overline{م ب} \perp$ المستقيم ل حيث ل : ٣ س - ٤ ص + ٢٣ = ٠

، $\overline{م ب}$ يقطع الدائرة فى أ

فإن : طول $\overline{أ ب}$ = ... وحدة طول.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٢

١٧ قوتان مقداراهما $ق$ ، $ق\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومقدار محصلتهما $ق$ نيوتن وكانت $هـ_١$ هى قياس الزاوية بين القوة الأولى والمحصلة وكانت $هـ_٢$ قياس الزاوية بين القوة الثانية والمحصلة فإن : ....

(أ) $هـ_١ = هـ_٢$

(ب) $هـ_١ = \frac{١}{٢} هـ_٢$

(جـ) $هـ_١ = ٣ هـ_٢$

(د) $هـ_١ = ٤ هـ_٢$

١٨ أى الجمل الاتية غير صحيحة ....

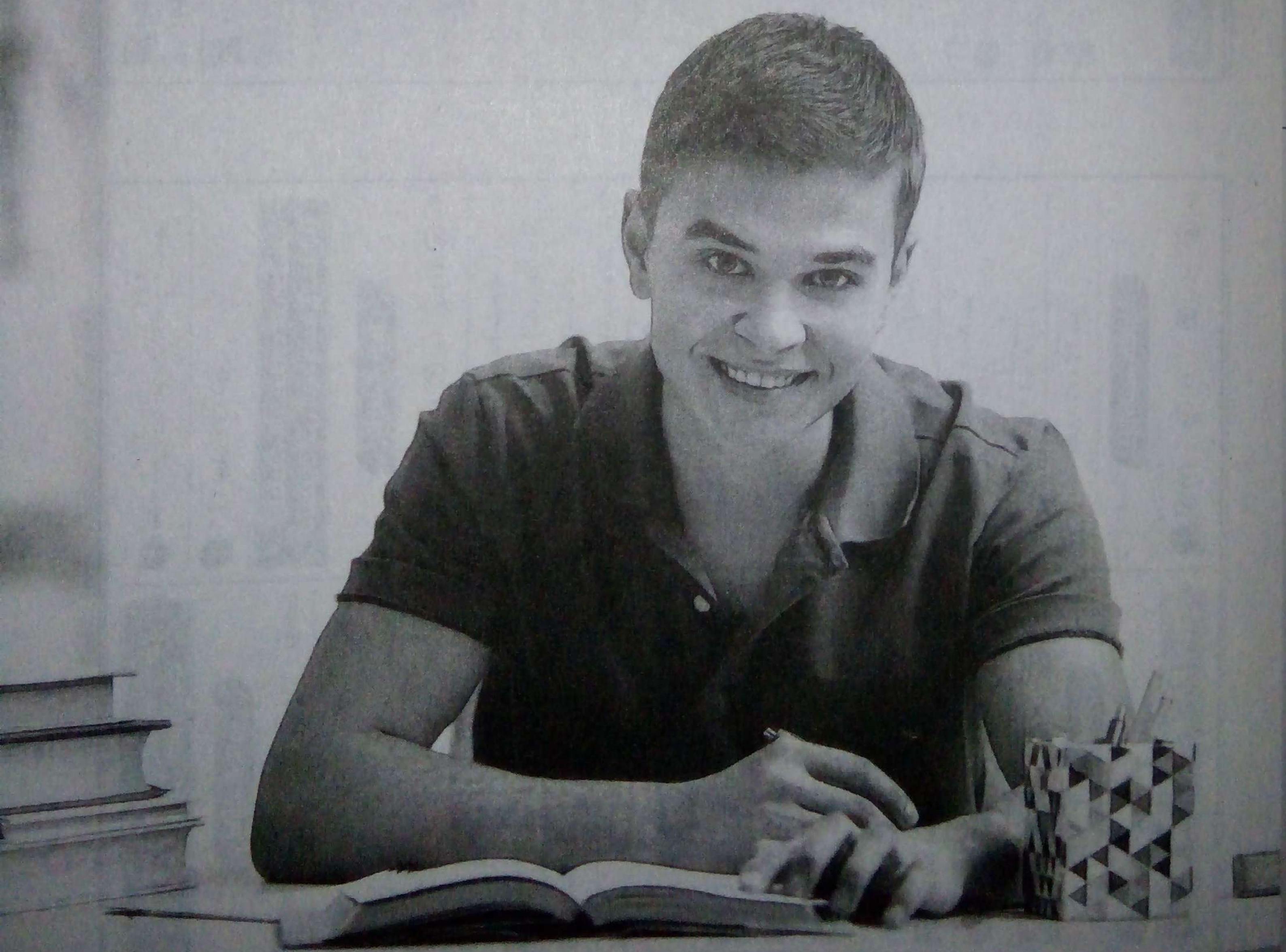
(أ) أى مستقيمين مختلفين ومتوازيين يعينان مستويًا.

(ب) كل مستقيمين مختلفين متقاطعين يشتركان فى نقطة واحدة.

(جـ) المستقيمان المتخالفان لا يجمعهما مستوى واحد.

(د) أى ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر بها مستوى واحد على الأقل.

الإجابات



إرشادات اختبار الكتاب المدرسى

١

① (أ)   ② (د)   ③ (د)   ④ (ب)

٢

(أ) أ = −١ ، ب = ١

(ب) ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم ، ١٠٠ $\sqrt{٣}$ ث.جم

٣

(أ) $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص - ٤ = ٠$

(ب) $\frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣}$ ، $\frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.جم

٤

(أ) ٢٢٫٩٥٩ سم

(ب) ١٢٠ ث.جم ، ٩٠ ث.جم

٥

(أ) ح = $\sqrt{٦٥١}$ نيوتين ، هـ ≃ ٩َ ٤٠°

(ب) ١٥ $\sqrt{٢}$ ، ١٥ $\sqrt{٢}$ نيوتين.

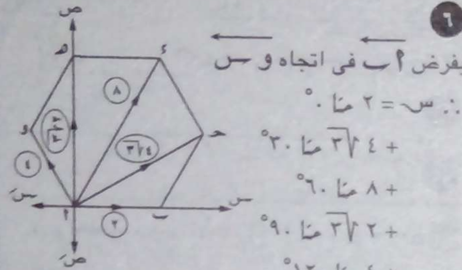
إجابات نماذج الامتحانات النهائية

النموذج الأول

١ (ب)   **٢** (جـ)   **٣** (أ)

٤ (جـ)   **٥** (د)

٦



بفرض $\overleftarrow{أب}$ فى اتجاه $\overleftarrow{وس}$

∴ س = ٢ حتا ٠°

+ ٤ $\sqrt{٣}$ حتا ٣٠°

+ ٨ حتا ٦٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ حتا ٩٠°

+ ٤ حتا ١٢٠°

= ٢ × ١ + ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٨ × $\frac{١}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$

× صفر + ٤ × $\frac{-١}{٢}$ = ١٠

، ص = ٢ حا ٠° + ٤ $\sqrt{٣}$ حا ٣٠° + ٨ حا ٦٠°

+ ٢ $\sqrt{٣}$ حا ٩٠° + ٤ حا ١٢٠° = ٢ × صفر

+ ٤ $\sqrt{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ + ٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٢ $\sqrt{٣}$ × ١

+ ٤ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ١٠ $\sqrt{٣}$

∴ $\overleftarrow{ح}$ = ١٠ $\overleftarrow{س}$ + ١٠ $\sqrt{٣}$ $\overleftarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^٢ + (١٠\sqrt{٣})^٢}$ = ٢٠ ثقل.كجم.

، طا هـ = $\frac{١٠\sqrt{٣}}{١٠}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة = ٢٠ ثقل.كجم وتعمل زاوية قياسها ٦٠° مع $\overleftarrow{وس}$

٧ (ب)

٨

① ∵ مساحة القاعدة = π $نق^٢$

∴ ٣٦ π = π $نق^٢$ ∴ نق = ٦ سم

، ∵ المساحة الجانبية = π نق ل

= π × ٦ × ١٠

= ٦٠ π $سم^٢$

② المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × ٦ × (١٠ + ٦)

= ٩٦ π $سم^٢$

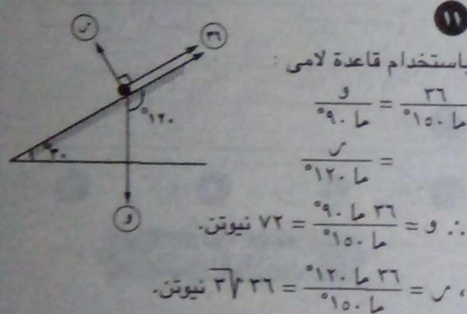
، ع = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨ سم

③ الحجم = $\frac{١}{٣}$ π $نق^٢$ ع = $\frac{١}{٣}$ × π × $(٦)^٢$ × ٨

= ٩٦ π $سم^٣$

٩ (أ)   **١٠** (أ)

١١



باستخدام قاعدة لامى :

$\frac{٣٦}{حا ١٥٠°}$ = $\frac{و}{حا ٩٠°}$

= $\frac{ر}{حا ١٢٠°}$

∴ و = $\frac{٣٦ حا ٩٠°}{حا ١٥٠°}$ = ٧٢ نيوتن.

، ر = $\frac{٣٦ حا ١٢٠°}{حا ١٥٠°}$ = ٣٦ $\sqrt{٣}$ نيوتن.

١٢ (د)

١٣

$س^٢ + ص^٢ - ١٢س + ٦ص + ٢٠ = ٠$

∴ ل = −٦ ، ك = ٣ ، جـ = ٢٠

∴ مركز الدائرة هو (٦ ، −٣)

، نق = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ}$ = $\sqrt{٣٦ + ٩ - ٢٠}$

= ٥ وحدة طولية.

∴ مركز الدائرة المطلوبة (٨ ، −٥) وطول نصف قطرها = ٥

∴ المعادلة المطلوبة هى $(س - ٨)^٢ + (ص + ٥)^٢ = ٢٥$

١٤ (جـ)

١٥

بفرض أن: $أب = ٤$ ل

∴ $حب = ٢$ ل

∴ $حـهـ =$ ل

∴ $أهـ = ٢\sqrt{٣}$ ل

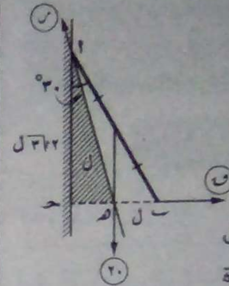
في Δ أحـهـ: $أهـ = \sqrt{١٣}$ ل

، ∵ Δ أحـهـ هو مثلث القوة

∴ $\frac{ر}{\sqrt{١٣}\,ل} = \frac{ق}{ل} = \frac{٢٠}{٢\sqrt{٣}\,ل}$

∴ $ق = \frac{١٠\sqrt{٣}}{٣}$ ث.كجم.

، $ر = \frac{١٠\sqrt{٣٩}}{٣}$ ث.كجم.



١٦ (ب)

١٧

∵ حجم الشمع = حجم المكعب = $(٢٠)^٣ = ٨٠٠٠$ سم^٣

، ∵ ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتي الصهر والتحويل.

∴ حجم المخروط = ٨٨٪ × ٨٠٠٠ = $\frac{٨٨}{١٠٠} \times ٨٠٠٠$

$= ٧٠٤٠$ سم^٣

، ∵ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^٢ ع

∴ $\frac{١}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ نق$^٢ \times ٢١ = ٧٠٤٠$

∴ نق$^٢ = ٣٢٠$ ∴ نق $= ٨\sqrt{٥}$ سم

١٨ (أ) ١٩ (د) ٢٠ (ب)

النموذج الثاني

١ (أ) ٢ (ب) ٣ (أ)

٤ (ب) ٥ (د)

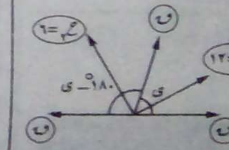
٦

$ح_١ = ٢ ق جتا \frac{ى}{٢} = ١٢$

∴ $ق جتا \frac{ى}{٢} = ٦$ (١)

، $ح_٢ = ٢ ق جتا \left(\frac{١٨٠ - ى}{٢}\right)$

$= ٦$



∴ $ق جا \frac{ى}{٢} = ٣$ (٢)

بتربيع المعادلتين وجمعهما:

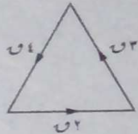
∴ $ق^٢ جتا^٢ \frac{ى}{٢} + ق^٢ جا^٢ \frac{ى}{٢} = ٦^٢ + ٣^٢$

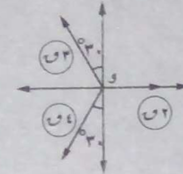
∴ $ق^٢ \left(جتا^٢ \frac{ى}{٢} + جا^٢ \frac{ى}{٢}\right) = ٤٥$

∴ $ق^٢ = ٤٥$

∴ $ق = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ ثقل.كجم.

٧





بفرض و $\overrightarrow{س}$ في اتجاه القوة الأولى.

$س = ٢ ق جتا صفر° + ٣ ق جتا ١٢٠° + ٤ ق جتا ٢٤٠°$

$= ٢ ق \times ١ + ٣ ق \times \frac{-١}{٢} + ٤ ق \times \frac{-١}{٢}$

$= \frac{-٣}{٢} ق$

، $ص = ٢ ق جا صفر° + ٣ ق جا ١٢٠° + ٤ ق جا ٢٤٠°$

$= ٢ ق \times صفر + ٣ ق \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٤ ق \times \frac{-\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{-\sqrt{٣}}{٢} ق$

∴ $\overrightarrow{ح} = \frac{-٣}{٢} ق \overrightarrow{س} - \frac{\sqrt{٣}}{٢} ق \overrightarrow{ص}$

∴ $ح = \sqrt{\left(\frac{-٣}{٢} ق\right)^٢ + \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢} ق\right)^٢} = \sqrt{٣}$ ق نيوتن.

، $طا هـ = \frac{-\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٢}{-٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ مقدار المحصلة = $\sqrt{٣}$ ق ث جم وتعمل في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٢١٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٨ (أ)

٩

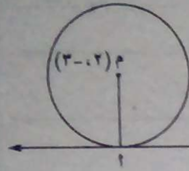
∵ $\overline{مأ} \perp \overline{أب}$

∴ $مأ = \frac{|٣ \times ٢ - ٤ \times -٣ + ٢|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

$= ٤$

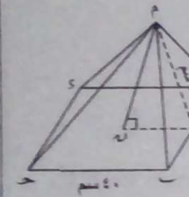
∴ نق = ٤

∴ معادلة الدائرة هي $(س - ٢)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ١٦$



١٠ (جـ) ١١ (ب)

١٢



(١) في Δ م ن هـ:

$م ن = \sqrt{(٢٥)^٢ - (٢٠)^٢}$

$= ١٥$ سم

∴ الارتفاع = ١٥ سم

(٢) المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢} \times$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي = $\frac{١}{٢} \times (٤ \times ٤٠ \times ٢٥)$

$= ٢٠٠٠$ سم^٢

(٣) المساحة الكلية = $٢٠٠٠ + (٤٠)^٢ = ٣٦٠٠$ سم^٢

(٤) الحجم = $\frac{١}{٣} \times (٤٠)^٢ \times ١٥ = ٨٠٠٠$ سم^٣

١٣ (د)

١٤

من الشكل وباستخدام قاعدة لامي:

$\frac{٦٠٠}{جا ٩٠°} = \frac{ق}{جا ١٥٠°} = \frac{ش}{جا ١٢٠°}$

∴ $\frac{٦٠٠}{١} = \frac{ق}{\frac{١}{٢}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{٣}}{٢}}$

∴ ق = ٣٠٠ داين

، ش = $٣٠٠\sqrt{٣}$ داين

١٥ (جـ)

١٦

طول القوس $\overset{\frown}{أب}$

$= م ب \times \theta^ء$

$= ٣٦ \times \frac{٢١٠}{١٨٠} \pi$

$= ٤٢ \pi$ سم



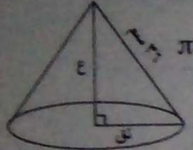
∵ محيط قاعدة المخروط = ٤٢π

∴ ٢π نق $= ٤٢ \pi$

∴ نق = ٢١

∴ $ع = \sqrt{(٣٦)^٢ - (٢١)^٢}$

$= ٣\sqrt{٩٥}$ سم ≈ ٢٩,٢ سم



١٧ (أ) ١٨ (أ) ١٩ (ب)

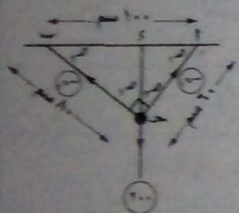
النموذج الثالث

١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (جـ) ٤ (ب)

٥

∵ $(٦٠)^٢ + (٨٠)^٢ = (١٠٠)^٢$

∴ Δ أحب قائم الزاوية في حـ



، باستخدام قاعدة لامي:

$\frac{٢٠٠}{جا ٩٠°} = \frac{ش_١}{جا هـ_١} = \frac{ش_٢}{جا هـ_٢}$

، ∵ $جا هـ_١ = \frac{بحـ}{بأ} = \frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٤}{٥}$

، $جا هـ_٢ = \frac{أحـ}{أب} = \frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{٢٠٠}{١} = \frac{ش_١}{\frac{٤}{٥}} = \frac{ش_٢}{\frac{٣}{٥}}$

∴ $ش_١ = \frac{٤}{٥} \times ٢٠٠ = ١٦٠$ ث جم

، $ش_٢ = \frac{٣}{٥} \times ٢٠٠ = ١٢٠$ ث جم.

٦

من الشكل:

$ع = \sqrt{(١٥)^٢ - (٩)^٢}$

$= ١٢$ سم

∴ حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

$= \frac{١}{٣} \times (١٨)^٢ \times ١٢ = ١٢٩٦$ سم^٣

٧ (جـ)

٨

$ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$

$= \sqrt{(٦)^٢ + (١٢)^٢ + ٢ \times ٦ \times ١٢ \times جتا ١٢٠°}$

$= ٦\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ ظا هـ $= \frac{ق_٢ جا ى}{ق_١ + ق_٢ جتا ى} = \frac{١٢ جا ١٢٠°}{٦ + ١٢ جتا ١٢٠°}$

$= \frac{٦\sqrt{٣}}{صفر}$

∴ هـ $= ٩٠°$ (مع القوة الأولى)

٩ (ب)

١٠

بفرض أن:

$\overrightarrow{و س}$ هو اتجاه القوة الأولى

س $= ٨$ جتا صفر°

$+ ٤\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

$+ ٦\sqrt{٣}$ جتا ١٥٠°

$+ ١٤$ جتا ٢٤٠°

$= ٨ \times ١ + ٤\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٦\sqrt{٣} \times \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right)$

$+ ١٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right) = -٢$

، ص $= ٨$ جا صفر $+ ٤\sqrt{٣}$ جا ٣٠° $+ ٦\sqrt{٣}$ جا ١٥٠°

$+ ١٤$ جا ٢٤٠° $= ٨ \times$ صفر $+ ٤\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}$

$+ ٦\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢} + ١٤ \times \left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}\right) = -٢\sqrt{٣}$

∴ $\overrightarrow{ح} = -٢\,\overrightarrow{س} - ٢\sqrt{٣}\,\overrightarrow{ص}$

∴ $ح = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٢\sqrt{٣})^٢} = ٤$ نيوتن

، ظا هـ $= \frac{-٢\sqrt{٣}}{-٢} = \sqrt{٣}$

، ∵ س < ٠ ، ص < ٠ ∴ هـ $= ٢٤٠°$

∴ مقدار المحصلة = ٤ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ٢٤٠° مع $\overrightarrow{و س}$

١١ (أ) **١٢** (ب) **١٣** (جـ)

١٤

∵ القوى متزنة

∴ $\frac{١٠٠}{جا ١٢٠°} = \frac{ق}{جا ٩٠°}$

$= \frac{ش}{جا ١٥٠°}$

∴ ق $= \frac{٢٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن

، ش $= \frac{١٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ نيوتن

١٥ (ب)

١٦

∵ مركز الدائرة الأولى م$_١$ (١ ، −٣)

، الدائرة الثانية:

$س^٢ + ص^٢ - ٢ س + ٦ ص + \frac{٣٩}{٤} = ٠$

∴ مركز الدائرة الثانية م$_٢$ = (١ ، −٣)

∴ الدائرتان لهما نفس المركز

∴ الدائرتان متحدتان المركز

$نق_١ = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - ١} = ٣$ وحدة طول

$نق_٢ = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - \frac{٣٩}{٤}} = ٠,٥$ وحدة طول

١٧ (ب) **١٨** (ب) **١٩** (د)

١ (د) **٢** (ب) **٣** (جـ)

٤

من هندسة الشكل:

جـ هـ $= ٢\sqrt{١٠}$ سم

∵ القوى متزنة

∴ س = صفر

، ص = صفر

∴ ق جتا صفر + ٥ جتا هـ − $٦\sqrt{١٠}$ جتا ى

+ ك جتا ٩٠° = صفر

∴ ق + ٥ × $\frac{٤}{٥}$ − $٦\sqrt{١٠} \times \frac{٢}{٢\sqrt{١٠}}$ + ك × صفر

= صفر

∴ ق = ٢ نيوتن

، ق جا صفر + ٥ جا هـ − $٦\sqrt{١٠}$ جا ى + ك جا ٩٠°

= صفر

∴ صفر + ٥ × $\frac{٣}{٥}$ − $٦\sqrt{١٠} \times \frac{٦}{٢\sqrt{١٠}}$ + ك × ١

= صفر

∴ ك = ١٥ نيوتن

٥ (د)

٦

الحجم $= \frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

$= \frac{١}{٣} \times \pi (٣)^٢ \times ٤$

$= ١٢\pi$ سم^٣

٧

طول نصف قطر قاعدة المخروط = ٦ وحدات

، ارتفاعه = ٨ وحدات

∴ حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \times \pi (٦)^٢ \times ٨$

$= ٩٦\pi$ وحدة مكعبة

، طول الراسم $= \sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢} = ١٠$ وحدات

∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

$= \pi \times ٦ (١٠ + ٦)$

$= ٩٦\pi$ وحدة مربعة

٨ (د) **٩** (ب)

١٠

باستخدام قاعدة لامي

$\frac{و}{جا (هـ + ٣٠°)} = \frac{١٢}{جا ١٥٠°}$

$= \frac{١٢\sqrt{٣}}{جا (١٥٠° - هـ)}$

∴ جا هـ $= \frac{١٢\sqrt{٣}\; جا ١٥٠°}{١٢} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ هـ $= ٦٠°$

∴ و $= \frac{١٢ جا (٦٠° + ٣٠°)}{جا ١٥٠°} = ٢٤$ نيوتن

١١ (أ)

١٢

من الشكل $ع = \sqrt{(١٥)^٢ - (٩)^٢} = ١٢$ سم

∴ حجم الهرم $= \frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

$= \frac{١}{٣} \times (١٨)^٢ \times ١٢ = ١٢٩٦$ سم^٣

١٣

بفرض أن المركز (س ، ٠) ∈ محور السينات

∴ المركز يقع على أبعاد متساوية من (١ ، ٣) ، (٢ ، −٤)

∴ $\sqrt{(س - ١)^٢ + (٠ - ٣)^٢}$

$= \sqrt{(س - ٢)^٢ + (٠ - (-٤))^٢}$

∴ $س^٢ - ٢ س + ١ + ٩ = س^٢ - ٤ س + ٤ + ١٦$

∴ $س^٢ - ٢ س + ١٠ = س^٢ - ٤ س + ٢٠$

∴ ٢ س = ١٠ ∴ س = ٥

∴ المركز = (٥ ، ٠)

∴ نق $= \sqrt{(٥ - ١)^٢ + (٠ - ٣)^٢} = ٥$

∴ معادلة الدائرة هي $(س - ٥)^٢ + ص^٢ = ٢٥$

(١٤) أ (١٥) د (١٦) أ

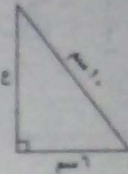
(١٧) جـ (١٨) جـ (١٩) ب

النموذج الخامس

(١) د (٢) أ (٣) د

(٤) ب (٥) جـ

(٦)



∵ المساحة الكلية

$= \pi$ نق (ل + نق)

∴ $٩٦ \pi = \pi \times$ نق × (١٠ + نق)

∴ ٩٦ = نق × (١٠ + نق)

∴ نق^{٢} + ١٠ نق − ٩٦ = ٠

∴ نق = −١٦ (مرفوض) أ، نق = ٦ سم

∴ ع $= \sqrt{(١٠)^{٢} - (٦)^{٢}} = ٨$ سم

∴ حجم المخروط $= \frac{١}{٣} \pi (٦)^{٢} \times ٨ = ٩٦ \pi$ سم^{٣}

(٧)

من الشكل :

Δ أ ب جـ يمثل مثلث القوى

، أ ب $= \sqrt{(٢٠)^{٢} - (١٠)^{٢}}$

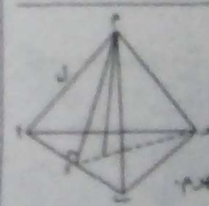
$= ١٠\sqrt{٣}$

∴ $\frac{٣٠}{١٠\sqrt{٣}} = \frac{ر}{١٠} = \frac{ش}{٢٠}$

∴ ش $= \frac{٣٠ \times ٢٠}{١٠\sqrt{٣}} = ٢٠\sqrt{٣}$ ث كجم.

، ر $= \frac{٣٠ \times ١٠}{١٠\sqrt{٣}} = ١٠\sqrt{٣}$ ث كجم.

(٨)



م أ ب مثلث متساوي الأضلاع

ارتفاعه م ء $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل

، ∵ م ء هو الارتفاع الجانبي للهرم.

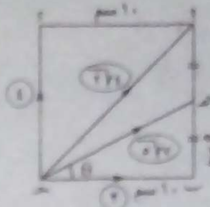
∴ المساحة الكلية للهرم = مساحة الوجه الواحد × ٤

$= \frac{١}{٢} \times$ ل $\times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ل × ٤

$= \sqrt{٣}$ ل^{٢} سم^{٢}

(٩) جـ

(١٠)



اعتبر $\overrightarrow{جـ ب}$ ، $\overrightarrow{جـ ء}$

هو المحوران و س ، و ص

∴ س = ٢ جتا صفر°

+ ٧ $\sqrt{٥}$ جتا θ

+ ٤ $\sqrt{٢}$ جتا ٤٥° + ٤ جتا ٩٠°

$= ٢ + ٧\sqrt{٥} \times \frac{١٠}{٥\sqrt{٥}} + ٤\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

+ صفر = ٢٠ نيوتن.

، ص = ٢ جا صفر + ٧ $\sqrt{٥}$ جا θ + ٤ $\sqrt{٢}$ جا ٤٥°

+ ٤ جا ٩٠° = صفر + ٧ $\sqrt{٥} \times \frac{١}{٥\sqrt{٥}}$ + ٤ $\sqrt{٢}$

$\times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ + ٤ = ١٥ نيوتن.

∴ ح $= \sqrt{(٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢}} = ٢٥$ نيوتن.

، ظا هـ $= \frac{ص}{س} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$

∴ θ = ٢٥َ ٣٦° مع القوى الأولى.

(١١) ب

(١٢)

مركز الدائرة هو نقطة منتصف $\overline{أ ب}$

∴ م $= \left(\frac{٢ + (-٤)}{٢} ، \frac{٣ + ٩}{٢}\right) = (-١ ، ٦)$

، طول قطر الدائرة $= \sqrt{(٢ - (-٤))^{٢} + (٣ - ٩)^{٢}}$

$= ٦\sqrt{٢}$

∴ (س + ١)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} $= (٣\sqrt{٢})^{٢}$

∴ س^{٢} + ٢ س + ١ + ص^{٢} − ١٢ ص + ٣٦ = ١٨

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ١٢ ص + ١٩ = ٠

(١٣)

∵ ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ = ٢٥ نيوتن. (١)

∴ ق$_{١}$ − ق$_{٢}$ = ١٣ نيوتن. (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ ٢ ق$_{١}$ = ٣٨ ∴ ق$_{١}$ = ١٩ نيوتن.

، من (١) : ∴ ق$_{٢}$ = ٦ نيوتن.

(١٤) ب (١٥) جـ (١٦) د

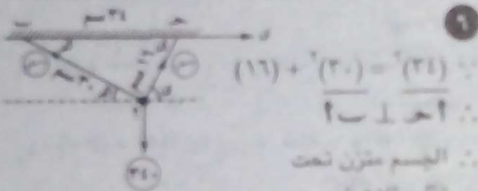
(١٧) د (١٨) د

النموذج السادس

(١) جـ (٢) د (٣) د

(٤) ب (٥) جـ

(٦)



∵ (٣٤)^{٢} = (٣٠)^{٢} + (١٦)

∴ $\overline{أ جـ} \perp \overline{ب أ}$

∵ الجسم متزن تحت

تأثير ثلاث قوى

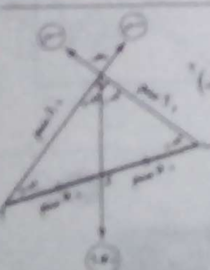
∴ $\frac{٣٤٠}{جا ٩٠°} = \frac{ش_{١}}{جا (٩٠° + هـ)} = \frac{ش_{٢}}{جا (٩٠° + ى)}$

∴ ش$_{١}$ $= \frac{٣٤٠ \times جتا هـ}{جا ٩٠°} = \frac{٣٤٠ \times \frac{٣٠}{٣٤}}{١} = ٣٠٠$ ث كجم.

∴ ش$_{٢}$ $= \frac{٣٤٠ \times جتا ى}{جا ٩٠°} = \frac{٣٤٠ \times \frac{١٦}{٣٤}}{١} = ١٦٠$ ث كجم.

(٧) أ

(٨)



∵ (أ ب)^{٢} = (ب جـ)^{٢} + (أ جـ)^{٢}

∴ ق (∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∴ جـ ء $= \frac{١}{٢}$ أ ب = ٥٠ سم

∴ جـ ء = ء ب

∴ ق (∠ ب) = هـ$_{٢}$

، جـ ء = أ ء ∴ ق (∠ أ) = هـ$_{١}$

∴ $\frac{ش_{١}}{جا (٩٠° + هـ_{١})} = \frac{ش_{٢}}{جا (٩٠° + هـ_{٢})} = \frac{١٥٠}{جا ٩٠°}$

∴ $\frac{ش_{١}}{جتا هـ_{١}} = \frac{ش_{٢}}{جتا هـ_{٢}} = \frac{١٥٠}{١}$

∴ $\frac{ش_{١}}{\frac{٦}{١٠}} = \frac{ش_{٢}}{\frac{٨}{١٠}} = \frac{١٥٠}{١}$

∴ ش$_{١}$ = ٩٠ ث كجم ، ش$_{٢}$ = ١٢٠ ث كجم

(٩) د

(١٠)



∵ حجم الهرم = ١٢٩٦

∴ $\frac{١}{٣} \times (١٨)^{٢} \times$ ع = ١٢٩٦

∴ ع = ١٢ سم

∴ الارتفاع الجانبي $= \sqrt{(١٢)^{٢} + (٩)^{٢}} = ١٥$ سم

∴ المساحة الجانبية $= \frac{١}{٢}$ محيط القاعدة

× الارتفاع الجانبي $= \frac{١}{٢} \times (٤ \times ١٨) \times ١٥$

= ٥٤٠ سم^{٢}

(١١) أ

(١٢)

∵ محيط القاعدة = ٦ π

∴ ٢ π نق = ٦ π

∴ نق = ٣ سم

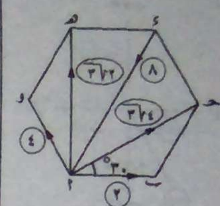
∴ حجم المخروط = ٢٧ π

∴ $\frac{١}{٣} \pi (٣)^{٢} \times$ ع = ٢٧ π

∴ ع = ٩ سم

(١٣) جـ

١٤



باعتبار الاتجاه $\overrightarrow{و س}$ هو $\overrightarrow{أ ب}$

∴ س = ٢ جتا صفر°

+ ٤ $\sqrt{3}$ جتا ٣٠°

+ ٨ جتا ٢٤٠°

+ ٢ $\sqrt{3}$ جتا ٩٠° + ٤ جتا ١٢٠°

= ٢ + ٦ − ٤ + صفر − ٢ = ٢ ثقل.كجم.

، ص = ٢ جا صفر° + ٤ $\sqrt{3}$ جا ٣٠° + ٨ جا ٢٤٠°

+ ٢ $\sqrt{3}$ جا ٩٠° + ٤ جا ١٢٠°

= صفر + ٢ $\sqrt{3}$ − ٤ $\sqrt{3}$ + ٢ $\sqrt{3}$ + ٢ $\sqrt{3}$

= ٢ $\sqrt{3}$ ثقل.كجم.

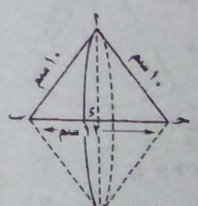
∴ ح = $\sqrt{(٢)^2 + (٢\sqrt{3})^2}$ = ٤ ثقل.كجم.

، ظا هـ = $\frac{٢\sqrt{3}}{٢} = \sqrt{3}$ ∴ هـ = ٦٠°

∴ مقدار المحصلة = ٤ ثقل.كجم فى اتجاه $\overrightarrow{أ ء}$

١٥ (جـ)

١٦



الجسم الناشئ من الدوران حول $\overline{ب حـ}$ عبارة عن مخروطين لهما نفس القاعدة ومتطابقان

∴ أ ء = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$ = ٨ سم

∴ حجم الجسم الناتج = ٢ ($\frac{١}{٣}$ π نق^2 ع)

= ٢ × $\frac{١}{٣}$ × π × (٨)^2 × ٦

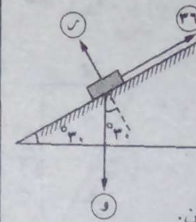
= ٢٥٦ π سم^3

١٧ (أ) ١٨ (جـ) ١٩ (جـ) ٢٠ (جـ)

النموذج السابع

١ (جـ) ٢ (أ) ٣ (أ) ٤ (ب)

٥



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

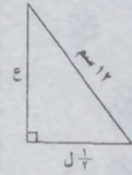
∴ $\frac{و}{جا ٩٠°} = \frac{ر}{جا ١٢٠°} = \frac{٣٦}{جا ١٥٠°}$

∴ و = $\frac{٣٦ × جا ٩٠°}{جا ١٥٠°}$ = ٧٢ نيوتن.

، ر = $\frac{٣٦ × جا ١٢٠°}{جا ١٥٠°}$ = ٣٦ $\sqrt{3}$ نيوتن.

٦ (ب) ٧ (أ)

٨



∵ المساحة الجانبية = ٢٤٠

∴ $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة) × الارتفاع الجانبى = ٢٤٠

وبفرض طول ضلع القاعدة = ل سم

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٤ ل × ١٢ = ٢٤٠

∴ ل = ١٠ سم

∴ ع = $\sqrt{(١٢)^2 - (٥)^2} = \sqrt{١١٩}$ سم

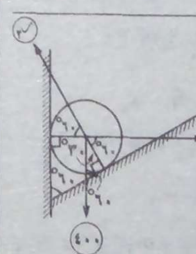
، حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (١٠)^2 × $\sqrt{١١٩}$

= $\frac{١٠٠}{٣}\sqrt{١١٩}$ = ٣٦٣,٦ سم^3

٩ (جـ)

١٠



∵ المستويان أملسان

∴ كلًا من $ر_1$ ، $ر_2$ عمودى على مستويهما ويمران بمركز الكرة وبتطبيق قاعدة لامى

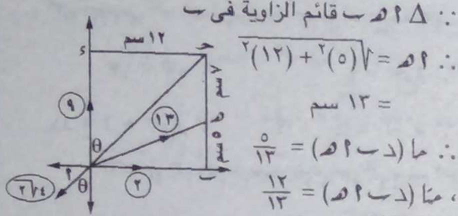
∴ $\frac{ر_1}{جا ١٥٠°} = \frac{ر_2}{جا ٩٠°} = \frac{٤٠٠}{جا ١٢٠°}$

∴ $ر_1$ = $\frac{٤٠٠ × جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°} = \frac{٤٠٠\sqrt{3}}{٣}$ ثقل.كجم.

∴ $ر_2$ = $\frac{٤٠٠ × جا ٩٠°}{جا ١٢٠°} = \frac{٨٠٠\sqrt{3}}{٣}$ ثقل.كجم.

١١ (د) ١٢ (ب)

١٣



∵ Δ أ هـ ب قائم الزاوية فى ب

∴ أ هـ = $\sqrt{(٥)^2 + (١٢)^2}$ = ١٣ سم

∴ جا (د أ هـ) = $\frac{٥}{١٣}$

، جتا (د أ هـ) = $\frac{١٢}{١٣}$

∵ $\overline{أ حـ}$ قطر فى المربع أ ب حـ ء

∴ θ = ٤٥°

∴ س = ٢ جتا صفر° + ١٣ جتا (د أ هـ)

+ ٩ جتا ٩٠° + ٤ $\sqrt{2}$ جتا ٢٢٥°

= ٢ × ١ + ١٣ × $\frac{١٢}{١٣}$ + ٩ × صفر

+ ٤ $\sqrt{2}$ × $\frac{-١}{\sqrt{2}}$ = ١٠

، ص = ٢ جا صفر° + ١٣ جا (د أ هـ)

+ ٩ جا ٩٠° + ٤ $\sqrt{2}$ جا ٢٢٥°

= ٢ × صفر + ١٣ × $\frac{٥}{١٣}$ + ٩ × ١

+ ٤ $\sqrt{2}$ × $\frac{-١}{\sqrt{2}}$ = ١٠

∴ $\overrightarrow{ح}$ = ١٠ $\overrightarrow{س}$ + ١٠ $\overrightarrow{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(١٠)^2 + (١٠)^2}$ = ١٠ $\sqrt{2}$ ثقل.جم.

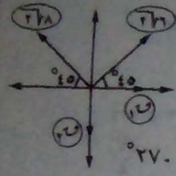
، ظا هـ = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١ ، ∵ س > ٠

، ص > ٠ ∴ هـ = ٤٥°

∴ $\overrightarrow{ح}$ يؤثر فى اتجاه $\overrightarrow{أ حـ}$

١٤ (جـ)

١٥



∵ س = ٧

، س = $ق_1$ جتا صفر°

+ ٦ $\sqrt{2}$ جتا ٤٥°

+ ٨ $\sqrt{2}$ جتا ١٣٥° + $ق_2$ جتا ٢٧٠°

∴ $ق_1$ + ٦ − ٨ + صفر = ٧

∴ $ق_1$ = ٩ ثقل.جم.

، ∵ ص = صفر

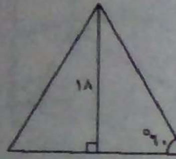
∴ $ق_1$ جا صفر° + ٦ $\sqrt{2}$ جا ٤٥° + ٨ $\sqrt{2}$ جا ١٣٥°

+ $ق_2$ جا ٢٧٠° = صفر

∴ صفر + ٦ + ٨ + (− $ق_2$) = صفر

∴ $ق_2$ = ١٤ ثقل.جم.

١٦



المجسم الناتج عبارة عن هرم ثلاثى منتظم الوجوه ارتفاعه الجانبى = ١٨ سم وبدراسة وجه واحد من أوجهه

نجد أن جا ٦٠° = $\frac{١٨}{ل}$ حيث ل طول ضلعه

∴ ل = $\frac{١٨}{جا ٦٠°}$ = ١٢ $\sqrt{3}$ سم

∴ المساحة الكلية

= ٤ × مساحة الوجه الواحد

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × (١٢ $\sqrt{3}$)^2 × جا ٦٠°

= ٤٣٢ $\sqrt{3}$ سم^2 ≃ ٧٤٨,٢ سم^2

∴ ارتفاع الهرم = $\sqrt{(١٨)^2 - (٦)^2}$ = ١٢ $\sqrt{2}$ سم

∴ حجم الهرم

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × (١٢ $\sqrt{3}$)^2 × جا ٦٠° × ١٢ $\sqrt{2}$

= ٤٣٢ $\sqrt{6}$ ≃ ١٠٥٨ سم^3

١٧ (ب) ١٨ (ب)

النموذج الثامن

1 (ج) 2 (د) 3 (د)

4 (ب) 5 (د)

6

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ $8\sqrt{3}$ = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × 4

∴ مساحة القاعدة = $6\sqrt{3}$ سم^2

∴ $\frac{6}{4}$ × س^2 ظتا $\frac{\pi}{6}$ = $6\sqrt{3}$

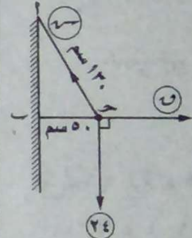
∴ س^2 = 4 ∴ س = 2

∴ طول ضلع السداسى = 2 سم

∴ محيط القاعدة = 2 × 6 = 12 سم

7 (ج) 8 (أ)

9



∵ أب = $\sqrt{(130)^2 - (50)^2}$

= 120 سم

ومن الشكل نجد أن:

Δ أب حـ هو مثلث القوى

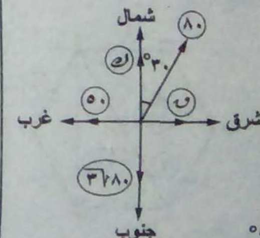
∴ $\frac{ش}{130} = \frac{و}{50} = \frac{24}{120}$

∴ و = $\frac{24 \times 50}{120}$ = 10 نيوتن.

، ش = $\frac{24 \times 130}{120}$ = 26 نيوتن.

10 (د)

11



∵ س = و جتا صفر

+ 80 جتا 60°

+ ك جتا 90°

+ 50 جتا 180°

+ $80\sqrt{3}$ جتا 270°

= و × 1 + 80 × $\frac{1}{2}$ + ك × صفر + 50 × −1

+ $80\sqrt{3}$ × صفر = و − 10

، ص = و جا صفر + 80 جا 60° + ك جا 90°

+ 50 جا 180° + $80\sqrt{3}$ جا 270°

= و × صفر + 80 × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + ك × 1

+ 50 × صفر + $80\sqrt{3}$ × −1 = ك − $40\sqrt{3}$

∴ ح = (و − 10) س + (ك − $40\sqrt{3}$) ص (1)

، ∵ ح = 40 نيوتن فى اتجاه 60° شمال شرق.

∴ ح = (40 جتا 60°) س + (40 جا 60°) ص

= 20 س + $20\sqrt{3}$ ص (2)

من (1) ، (2):

∴ و − 10 = 20

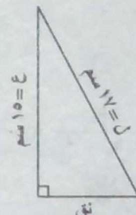
∴ و = 30 نيوتن.

، ك − $40\sqrt{3}$ = $20\sqrt{3}$

∴ ك = $60\sqrt{3}$ نيوتن.

12 (د)

13



طول نصف القطر

= $\sqrt{(17)^2 - (15)^2}$

= 8 سم

∴ المساحة الكلية = π نق (ل + نق)

= π × 8 (17 + 8) = 200 π سم^2

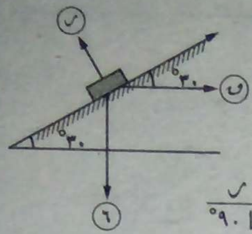
، حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ π نق^2 ع

= $\frac{1}{3}$ × π × $(8)^2$ × 15 = 320 π سم^3

14 (ب)

النموذج التاسع

15



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى وبتطبيق قاعدة لامى

$\frac{6}{جا 120°} = \frac{و}{جا 150°} = \frac{ر}{جا 90°}$

∴ و = $\frac{6 \times جا 150°}{جا 120°} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ = $2\sqrt{3}$ ثقل جم.

، ر = $\frac{6 \times جا 90°}{جا 120°} = \frac{6 \times 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ = $4\sqrt{3}$ ثقل جم.

16

بالنسبة للدائرة $د_1$: $نق_1 = \sqrt{ك}$ ، $م_1$ = (−2 ، −11)

، بالنسبة للدائرة $د_2$: $نق_2 = \sqrt{16}$ = 4 ، $م_2$ = (3 ، 1)

∴ المسافة بين المركزين $م_1 م_2$

= $\sqrt{(3+2)^2 + (1+11)^2}$

= 13 وحدة طول.

فى حالة أن الدائرتين متماستين من الخارج

∴ $م_1 م_2 = نق_1 + نق_2$ ∴ $\sqrt{ك}$ + 4 = 13

∴ $\sqrt{ك}$ = 9 ∴ ك = 81

، فى حالة أن الدائرتين متماستين من الداخل فإن:

$م_1 م_2 = |نق_1 - نق_2|$ ∴ $|\sqrt{ك} - 4|$ = 13

∴ $\sqrt{ك}$ − 4 = ±13

ومنها $\sqrt{ك}$ = 17 ومنها ك = 289

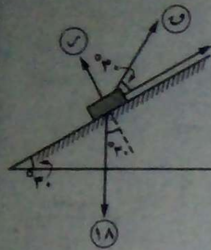
أ، $\sqrt{ك}$ − 4 = −13 ومنها $\sqrt{ك}$ = −9 (مرفوض)

∴ قيم ك هى 81 أ، 289

17 (د) 18 (د)

1 (ج) 2 (ج) 3 (ب)

4



∵ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية وبتطبيق قاعدة لامى

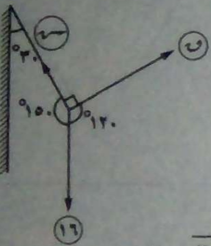
∴ $\frac{و}{جا 150°} = \frac{18}{جا 60°}$

= $\frac{ر}{جا 150°}$

∴ و = ر = $\frac{18 \times جا 150°}{جا 60°}$ = $6\sqrt{3}$ ثقل كجم.

5 (أ) 6 (ج) 7 (د)

8



بتطبيق قاعدة لامى

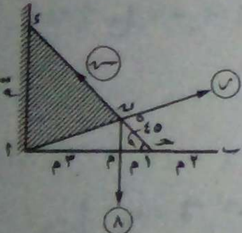
∴ $\frac{و}{جا 150°} = \frac{ش}{جا 120°}$

= $\frac{16}{جا 90°}$

∴ $\frac{و}{\frac{1}{2}} = \frac{ش}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ = 16

∴ و = 8 نيوتن ، ش = $8\sqrt{3}$ نيوتن.

9



∵ أحـ = أء = 4 متر

∴ و(∠ أحـ ء) = 45°

∴ حـ ء = $4\sqrt{2}$ متر

من Δ م حـ ن:

∴ م ن = 1 متر

، و(∠ ن حـ م) = 45° ، و(∠ ن م حـ) = 90°

∴ ن حـ = $\sqrt{2}$ متر

∴ ء ن = $4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ متر

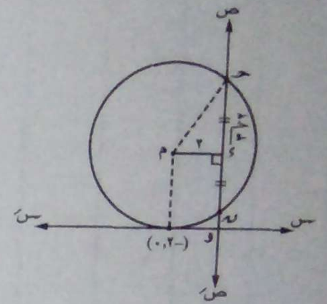
، من Δ أ م ن: أ ن = $\sqrt{10}$ متر

∵ Δ أ ء ى هو مثلث القوى

∴ $\frac{ل}{\sqrt{١٠}} = \frac{ش}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٨}{٤}$

∴ ل = $٢\sqrt{١٠}$ ث.كجم ، ش = $٦\sqrt{٢}$ ث.كجم.

١٠



نق = $\sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = ٤ وحدة طول.

∴ مركز الدائرة م = (−٢ ، ٤)

∴ حـ = ٤ + ١٦ − ١٦ = ٤

∴ معادلة الدائرة هى :

$س^٢ + ص^٢$ + ٤ س − ٨ ص + ٤ = ٠

١١ (ب)

١٢

∵ طول راسم المخروط = ١٨ سم.

، ∵ محيط دائرة قاعدة المخروط = طول القوس $\overset{\frown}{أب}$

= نق × هـ = ١٨ × $\frac{٦٠ \times \pi}{١٨٠}$ = ٦ π

، ٢ π نق = ٦ π ∴ نق = ٣ سم

، ع = $\sqrt{ل^٢ - نق^٢} = \sqrt{(١٨)^٢ - (٣)^٢} = ٣\sqrt{٣٥}$

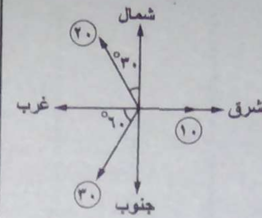
∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع

= $\frac{١}{٣}$ × π × $(٣)^٢$ × $٣\sqrt{٣٥}$

≃ ١٦٧,٣ سم³

١٣ (جـ)

١٤



س = ١٠ جتا صفر°

+ ٢٠ جتا ١٢٠°

+ ٣٠ جتا ٢٤٠°

= ١٠ + ٢٠ × $\frac{-١}{٢}$

+ ٣٠ × $\frac{-١}{٢}$ = −١٥

، ص = ١٠ جا صفر° + ٢٠ جا ١٢٠° + ٣٠ جا ٢٤٠°

= صفر + ٢٠ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ + ٣٠ × $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ = $-٥\sqrt{٣}$

∴ $\vec{ح} = -١٥\ \vec{س} - ٥\sqrt{٣}\ \vec{ص}$

∴ ح = $\sqrt{(-١٥)^٢ + (-٥\sqrt{٣})^٢} = ١٠\sqrt{٣}$ نيوتن

، ظا هـ = $\frac{-٥\sqrt{٣}}{-١٥} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$ ∴ هـ = ٢١٠°

∴ خط عمل المحصلة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

١٥ (ب) **١٦** (جـ) **١٧** (د) **١٨** (د)

النموذج العاشر

١ (د) **٢** (أ) **٣** (جـ)

٤ (أ) **٥** (أ)

٦

الارتفاع الجانبى

= $\sqrt{(١٠\sqrt{٣})^٢ + (١٠)^٢}$

= ٢٠ سم.

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة)

× الارتفاع الجانبى

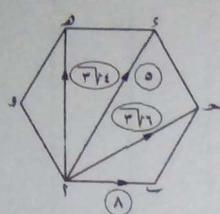
= $\frac{١}{٢}$ × (٤ × ٢٠) × ٢٠ = ٨٠٠ سم²

، الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٢٠)^٢$ × $١٠\sqrt{٣}$ = $\frac{٤٠٠٠\sqrt{٣}}{٣}$ سم³

٧ (ب)

٨



س = ٨ جتا صفر°

+ $٦\sqrt{٣}$ جتا ٣٠°

+ ٥ جتا ٦٠°

+ $٤\sqrt{٣}$ جتا ٩٠°

= ٨ + ٩ + $\frac{٥}{٢}$ + صفر = $\frac{٣٩}{٢}$

، ص = ٨ جا صفر° + $٦\sqrt{٣}$ جا ٣٠° + ٥ جا ٦٠°

+ $٤\sqrt{٣}$ جا ٩٠° = صفر + $٣\sqrt{٣}$

+ $\frac{٥\sqrt{٣}}{٢}$ + $٤\sqrt{٣}$ = $\frac{١٩}{٢}\sqrt{٣}$

∴ $\vec{ح} = \frac{٣٩}{٢}\ \vec{س} + \frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}\ \vec{ص}$

∴ ح = $\sqrt{٦٥١}$ نيوتن.

، ظا هـ = $\frac{\frac{١٩\sqrt{٣}}{٢}}{\frac{٣٩}{٢}} = \frac{١٩\sqrt{٣}}{٣٩}$

∴ هـ = ٩َ ٤٠° مع اتجاه $\vec{أب}$

٩

أب = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٦)^٢}$ = ٨

من الشكل نجد أن :

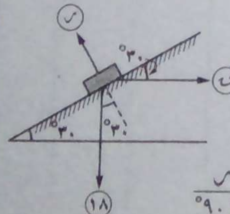
Δ أب حـ هو مثلث القوى

∴ $\frac{ش}{١٠} = \frac{ى}{٦} = \frac{٣٢}{٨}$

∴ ى = $\frac{٣٢ \times ٦}{٨}$ = ٢٤ نيوتن.

، ش = $\frac{٣٢ \times ١٠}{٨}$ = ٤٠ نيوتن.

١٠



∵ الجسم متزن تحت

تأثير ثلاث قوى

∴ بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{١٨}{جا ١٢٠°} = \frac{ى}{جا ١٥٠°} = \frac{ر}{جا ٩٠°}$

∴ ى = $\frac{١٨ \times جا ١٥٠°}{جا ١٢٠°}$ = $٦\sqrt{٣}$ نيوتن.

، ر = $\frac{١٨ \times جا ٩٠°}{جا ١٢٠°}$ = $١٢\sqrt{٣}$ نيوتن.

١١ (د)

١٢

∴ حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ × π $(٢)^٢$ × ١٢ = ١٦ π سم³

∴ حجم الماء المرتفع فى الإناء الأسطوانى = ١٦ π سم³

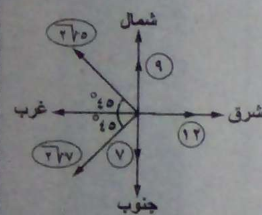
∴ π نق² × ١ = ١٦ π

∴ نق² = ١٦ ∴ نق = ٤ سم

∴ طول قطر قاعدة الإناء = ٤ × ٢ = ٨ سم

١٣ (ب)

١٤



س = ١٢ جتا صفر°

+ ٩ جتا ٩٠°

+ $٥\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥°

+ $٧\sqrt{٢}$ جتا ٢٢٥°

+ ٧ جتا ٢٧٠°

= ١٢ + صفر − ٥ − ٧ + صفر = صفر

، ص = ١٢ جا صفر° + ٩ جا ٩٠° + $٥\sqrt{٢}$ جا ١٣٥°

+ $٧\sqrt{٢}$ جا ٢٢٥° + ٧ جا ٢٧٠°

= صفر + ٩ + ٥ − ٧ − ٧ = صفر

∴ $\vec{ح}$ = صفر ∴ المجموعة متزنة.

١٥ (أ) **١٦** (أ) **١٧** (د) **١٨** (د)